ordem) tem como resultado final o tensor $S_c^e := T_{bc}^a Q_a^{eb}$ cujo posto é $(1,1)$ (certifique-se de que você entende isso).

Com essa notação, os elementos da base adquirem formato peculiar. Uma base arbitrária de $\mathbb{V}$ será denotada por $\{\mathbf{x}_\mu^a\}$, enquanto que uma base tetrada será dada por $\{\mathbf{e}_\mu^a\}$. O índice concreto μ, aqui, continua indexando elementos diferentes da base, enquanto que o índice abstrato aparece apenas para deixar claro o caráter vetorial de cada elemento. Analogamente, as respectivas bases duais serão denotadas por $\{\mathbf{X}_a^\mu\}$ e $\{\mathbf{E}_a^\mu\}$, onde a condição de dualidade, agora, é escrita como $\mathbf{X}_a^\mu \mathbf{x}_\nu^a = \delta_\nu^\mu = \mathbf{E}_a^\mu \mathbf{e}_\nu^a$. Manteremos o negrito para nos referirmos a elementos de bases para deixar claro que o índice concreto, aqui, *não* se refere a componentes, mas a elementos diferentes. Assim, um tensor é expresso em termos de suas componentes como

$$T^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n} = T^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n} \, \mathbf{x}^{a_1}_{\mu_1} \dots \mathbf{x}^{a_m}_{\mu_m} \mathbf{X}^{\nu_1}_{b_1} \dots \mathbf{X}^{\nu_n}_{b_n},$$

enquanto que suas componentes são dadas por

$$T^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n} = T^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n} \mathbf{X}^{\mu_1}_{a_1} \dots \mathbf{X}^{\mu_m}_{a_m} \mathbf{x}^{b_1}_{\nu_1} \dots \mathbf{x}^{b_n}_{\nu_n}.$$

O(a) leitor(a) deve se certificar de que entende a sutil diferença entre as duas expressões acima: a primeira representa uma combinação linear de elementos da base de $\mathcal{T}(m,n)$ — portanto, tendo como resultado um elemento desse mesmo espaço —, enquanto a segunda representa a aplicação (equivalentemente, a contração) de um elemento de $\mathcal{T}(m,n)$ em (com) m elementos da base de $\mathbb{V}^*$ e n elementos da base de $\mathbb{V}$ — tendo como resultado números reais. Note, ainda, a perfeita correspondência entre os índices "livres" (i.e., "não-mudos") de ambos os lados de cada expressão. Isso é uma característica obrigatória de *qualquer* legítima equação tensorial.

Munidos desse arsenal de estruturas, convenções e notações, podemos (finalmente!) voltar para a física.

1.5 Métrica e Intervalo invariante

Recapitulando, definimos nosso espaço-tempo de Minkowski $\mathbb{M}$ como sendo um espaço afim de dimensão $d = 4$, munido de uma forma bilinear simétrica, não-degenerada, com assinatura lorentziana, $\mathcal{G}$. Na linguagem tensorial, vimos que $\mathcal{G}$ nada mais é do que um tensor de posto $(0,2)$ (com certas propriedades), que a partir de agora denotaremos simplesmente por g_{ab}, de acordo com a notação de índices abstratos introduzida. Traduzindo as propriedades de $\mathcal{G}$ para essa notação, temos que:

(i) $g_{ab} = g_{ba}$; (Simetria)

(ii) $g_{ab} u^b = 0$ se, se somente se, $u^a = 0$; (Não-degenerescência)

(iii) Existe u_0^a tal que $g_{ab}u_0^a u_0^b < 0$. E todo $e^a \neq 0$ satisfazendo $g_{ab}u_0^a e^b = 0$ também satisfaz $g_{ab}e^a e^b > 0$. (Assinatura lorentziana)

Note que a definição de base tetrada $\{\mathbf{e}_\mu^a\}$ passa a ser expressa como $g_{ab}\mathbf{e}_\mu^a \mathbf{e}_\nu^b = \eta_{\mu\nu}$, onde $\eta_{\mu\nu}$ são as entradas da matriz dada na Eq. (1.2). As componentes de g_{ab} serão denotadas por $\eta_{\mu\nu}$ *apenas* quando expressas numa base tetrada. Numa base qualquer $\{\mathbf{x}_\mu^a\}$ suas componentes serão comumente denotadas por $g_{\mu\nu}$ $(= g_{ab}\mathbf{x}_\mu^a \mathbf{x}_\nu^b)$.

A estrutura afim de $\mathbb{M}$ permite que g_{ab} induza uma "medida" entre pares de eventos. Cada par $p, q \in \mathbb{M}$ determina um 4-vetor separação $s^a := \overrightarrow{pq}$ que, por sua vez, tem uma norma devida a g_{ab}. Assim, define-se o *intervalo invariante* $\mathcal{I} : \mathbb{M}\times\mathbb{M} \to \mathbb{R}$ entre pares de evetos p, q como sendo a quantidade

$$\mathcal{I}(p,q) := \mathcal{G}(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq}) \equiv g_{ab}s^a s^b.$$

O adjetivo "invariante" se refere ao fato que o valor de $\mathcal{I}(p,q)$ depende apenas dos eventos escolhidos (que são entes absolutos), não da maneira como escolhemos representá-los em termos, por exemplo, de coordenadas (que podem ser arbitrárias). Assim, $\mathcal{I}$ é uma propriedade geométrica intrínseca de $\mathbb{M}$, análoga ao conceito de distância (ao quadrado) no espaço euclidiano — com a diferença importante que $\mathcal{I}$ *não* é positivo-definido. Por essa razão, g_{ab} é chamada de *métrica* do espaço-tempo.

Um dos papéis de g_{ab}, como dissemos quando a introduzimos, é o de distinguir direções temporais de espaciais em $\mathbb{V}_p = \mathbb{V}$, em cada evento $p \in \mathbb{M}$. Além disso, também vimos que g_{ab} provê uma noção de "ortogonalidade" no espaço-tempo, que, em particular, a cada direção temporal — dada, digamos, por u^a —, determina as direções que são "puramente espaciais" em relação a ela — aquelas dadas por elementos de $\mathbb{V}^\perp(u^a)$. Assim, para um observador com linha-de-mundo passando por $p \in \mathbb{M}$, na direção de u^a, sua *seção espacial* instantânea em p é definida por

$$\Sigma(p, u^a) := \left\{ q \in \mathbb{M};\ \ \overrightarrow{pq} \in \mathbb{V}^\perp(u^a) \right\}.$$

(Vide Exercício ⑥ para uma justificativa física para essa interpretação de $\Sigma(p,u^a)$.) Lembrando que g_{ab} é positivo-definido em $\mathbb{V}^\perp(u^a)$ e notando que $\Sigma(p,u^a)$ herda, de $\mathbb{M}$, uma estrutura de (sub)espaço afim, tem-se que $\Sigma(p,u^a)$ é um legítimo espaço euclidiano $\mathbb{E}^3$. Logo, de acordo com o observador em questão, um evento $q \in \Sigma(p,u^a)$ será simultâneo a p e a distância espacial entre eles será dada por $D(p,q) = \|\overrightarrow{pq}\| = \sqrt{g_{ab}s^a s^b} = \sqrt{\mathcal{I}(p,q)}$, onde $s^a = \overrightarrow{pq}$. Inversamente, quaisquer que sejam os eventos $p, q \in \mathbb{M}$ separados na direção espacial (ou seja, com $s^a = \overrightarrow{pq}$ tipo-espaço; $g_{ab}s^a s^b > 0$), sempre podemos encontrar um 4-vetor u^a tipo-tempo tal que $g_{ab}u^a s^b = 0$. Em outras palavras, se a separação entre p e q for tipo-espaço, sempre há um observador para quem esses eventos são simultâneos e espacialmente separados pela distância $D(p,q) = \sqrt{\mathcal{I}(p,q)}$. Isso nos fornece uma interpretação para o intervalo invariante nesse caso: *se* $\mathcal{I}(p,q) > 0$*, então* $\sqrt{\mathcal{I}(p,q)}$ *é a distância espacial entre os eventos* p *e* q *de acordo com um observador para quem eles são simultâneos.*

Suponha, agora, que a separação entre p e q seja numa direção temporal; ou seja, $\mathcal{I}(p,q) = g_{ab}s^a s^b < 0$. Nesse caso, existe um observador inercial cuja linha-de-mundo (que é uma reta no espaço-tempo) passa por esses dois eventos. Para esse observador particular, ambos os eventos se localizam em sua própria posição espacial, de modo que a distância entre eles é nula. Logo, $\mathcal{I}(p,q)$ depende apenas do intervalo de tempo que esse observador mede entre os eventos p e q; denotaremos esse intervalo de tempo por $\Delta\tau(p,q)$ (para diferenciar esse intervalo de tempo, medido por esse observador específico, de intervalos de tempo medidos por outros observadores). Pelas propriedades que queríamos para a dependência de Δt com a separação dos eventos — linearidade com o vetor separação; vide discussão na Seção 1.4 —, temos que $\mathcal{I}(p,q) = -\kappa^2[\Delta\tau(p,q)]^2$, onde κ^2 é uma constante de proporcionalidade a ser determinada. Logo: *se* $\mathcal{I}(p,q) < 0$*, então* $\kappa^{-1}\sqrt{-\mathcal{I}(p,q)}$ *é o intervalo de tempo entre os eventos* p *e* q *de acordo com o observador inercial para quem eles acontecem no mesmo ponto do espaço.*

O valor de κ é fixado usando-se o ingrediente que falta: linhas-de-mundo da luz. Vimos que se $\mathcal{I}(p,q) > 0$, então existe um observador para o qual p e q são simultâneos. Logo, eles não podem ser conectados por uma linha-de-mundo de luz, pois, se o fossem, a velocidade da luz medida por esse observador seria infinita (já que $\Delta t(p,q) = 0$). Por outro lado, se $\mathcal{I}(p,q) < 0$, então existe um observador para o qual ambos os eventos ocorrem no mesmo ponto do espaço. Mais uma vez, então, eles não podem ser conectados por uma linha-de-mundo de luz, pois, se o fossem, a luz teria velocidade zero para esse observador. Sendo assim, só resta o caso em que $\mathcal{I}(p,q) = 0$. Considere eventos p e q com $\mathcal{I}(p,q) = 0$ e um observador inercial $\mathcal{O}$ com linha-de-mundo passando por p, na direção dada por um 4-vetor tipo-tempo u^a *qualquer*. Agora, decomponha o 4-vetor separação $s^a = \overrightarrow{pq}$ num 4-vetor na direção de u^a, $s^a_\parallel := \mathcal{P}_{\mathbf{u}}(s^a)$, e num 4-vetor ortogonal a u^a, $s^a_\perp := s^a - s^a_\parallel \in \mathbb{V}^\perp(u^a)$. O 4-vetor $s^a_\parallel$ determina um evento $q_\parallel$ — através de $\overrightarrow{pq_\parallel} := s^a_\parallel$ — que, de acordo com o observador $\mathcal{O}$, é simultâneo a q — pois $\overrightarrow{q_\parallel q} = \overrightarrow{pq} - \overrightarrow{pq_\parallel} = s^a - s^a_\parallel \in \mathbb{V}^\perp(u^a)$ e, então, $q \in \Sigma(q_\parallel, u^a)$. Portanto, para esse observador, $\Delta t(p,q) = \Delta\tau(p,q_\parallel) = \kappa^{-1}\sqrt{-\mathcal{I}(p,q_\parallel)} = \kappa^{-1}\sqrt{-g_{ab}s^a_\parallel s^b_\parallel}$. Além disso, para esse mesmo observador, a localização espacial do evento q é a mesma do evento $q_\perp$ determinado por $\overrightarrow{pq_\perp} := s^a_\perp$. Logo, considerando que $q_\perp \in \Sigma(p, u^a)$, tem-se que $D(p,q) = D(p,q_\perp) = \sqrt{\mathcal{I}(p,q_\perp)} = \sqrt{g_{ab}s^a_\perp s^b_\perp}$. Combinando esses resultados, podemos expressar o intervalo invariante entre

p e q como

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{I}(p,q) := g_{ab}s^a s^b = g_{ab}s^a_\parallel s^b_\parallel + 2g_{ab}s^a_\parallel s^b_\perp + g_{ab}s^a_\perp s^b_\perp \\ &= -\kappa^2 \Delta t(p,q)^2 + D(p,q)^2. \end{aligned}$$

Como a velocidade da luz, $D(p,q)/\Delta t(p,q)$, para qualquer observador é dada por c, essa condição obriga que $\kappa^2 = c^2$. Com isso, vemos que: *se* $\mathcal{I}(p,q) = 0$*, então existe uma linha-de-mundo de luz ligando os eventos* p *e* q *e a velocidade dessa linha-de-mundo medida por qualquer observador em* p *vale* c. Por isso, as direções dadas por 4-vetores ℓ^a satisfazendo $g_{ab}\ell^a\ell^b = 0$ são chamadas de *tipo-luz*. Lembrando do conceito de cones-de-luz que introduzimos no final da Seção 1.3, tem-se que

$$\mathcal{C}_p = \{q \in \mathbb{M};\ \mathcal{I}(p,q) = 0\}.$$

Note que, na argumentação acima, o fato que $\mathcal{I}(p,q) = 0$ foi utilizado apenas na manipulação final para fixar o valor de κ. Logo, a expressão

$$\mathcal{I}(p,q) = -c^2 \Delta t(p,q)^2 + D(p,q)^2, \tag{1.3}$$

onde $\Delta t(p,q)$ é o intervalo de tempo e $D(p,q)$ é a distância espacial entre os eventos p e q, medidos por um observador inercial qualquer, é válida para quaisquer eventos p e q (mesmo que $\mathcal{I}(p,q) \neq 0$). É importantíssimo lembrar que, embora $\Delta t(p,q)$ e $D(p,q)$ dependam de observador, $\mathcal{I}(p,q)$ depende apenas dos eventos escolhidos. Isso nos permitirá deduzir, de maneira geométrica, os principais efeitos cinemáticos da Relatividade referentes a observadores inerciais.

• <u>Exercícios</u>

① Condidere o tensor $\delta \in \mathcal{T}(1,1)$ definido por

$$\delta(\mathbf{U}, \mathbf{u}) := \mathbf{U}(\mathbf{u}),$$

para todos $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ e $\mathbf{U} \in \mathbb{V}^*$.

(a) Rescreva a definição acima usando a notação de índices abstratos, na qual δ é representado por δ^a_b;

(b) Calcule as componentes de δ^a_b numa base arbitrária induzida em $\mathcal{T}(1,1)$ e veja se você reconhece o resultado com outro nome;

(c) Mostre que δ^a_b pode ser interpretado como o operador *identidade* tanto em $\mathbb{V}$ quanto em $\mathbb{V}^*$;

(d) Utilizando o item anterior, mostre que $\delta^c_{b_j} T^{a_1\ldots a_m}_{b_1\ldots c\ldots b_n} = T^{a_1\ldots a_m}_{b_1\ldots b_n}$ (c colocado na j-ésima posição, com $1 \leq j \leq n$) e $\delta^{a_j}_c T^{a_1\ldots c\ldots a_m}_{b_1\ldots b_n} = T^{a_1\ldots a_m}_{b_1\ldots b_n}$ (c colocado na j-ésima posição, com $1 \leq j \leq m$);

(e) Calcule o escalar δ^a_a.

② A métrica $\mathcal{G} = g_{ab} \in \mathcal{T}(0,2)$ fornece um isomorfismo "natural" entre $\mathbb{V}$ e $\mathbb{V}^*$ — também chamado de *isomorfismo canônico* — que, na notação usando $\mathcal{G}$, é definido por[12]

$$\mathbb{V}^* \ni \mathbf{U} \leftrightarrow \mathbf{u} \in \mathbb{V} \iff \mathbf{U}(\mathbf{v}) = \mathcal{G}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \text{ para todo } \mathbf{v} \in \mathbb{V}.$$

[Concisamente, representa-se isso por $\mathbf{U} = \mathcal{G}(\mathbf{u}, \cdot)$.]

(a) Rescreva a definição de isomorfismo acima usando a notação de índices abstratos (inclusive para a representação concisa dada);

(b) Considere, agora, o isomorfismo *inverso* $\mathcal{F} : \mathbb{V}^* \to \mathbb{V}$, dado por

$$\mathcal{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{u} \iff \mathbf{U} = \mathcal{G}(\mathbf{u}, \cdot).$$

Mostre que $\mathcal{F}$ pode ser visto como um tensor simétrico de posto $(2,0)$ que, em notação de índices abstratos ($\mathcal{F} = f^{ab}$), satisfaz $f^{ab} g_{bc} = \delta^a_c$.

O tensor f^{ab} é comumente denotado simplesmente por g^{ab} e a versatilidade da notação de índices abstratos nos permite definir o "abaixamento" e "levantamento" de índices tensoriais contraídos com um dos índices de g_{ab} e g^{ab}, respectivamente. Assim, ao invés de usarmos uma letra diferente para representar o covetor $g_{ab}u^b$ (digamos, U_a), simplesmente usaremos a mesma letra mas com o índice "abaixado": $u_a := g_{ab}u^b$. Note que se "levantarmos" de volta o índice de $u_a = g_{ab}u^b$, voltamos ao 4-vetor original: $g^{ab}u_b = g^{ab}g_{bc}u^c = \delta^a_c u^c = u^a$. Note, também, que a notação é consistente com o próprio levantamento de índices da métrica: $g^{ac}g^{bd}g_{cd} = g^{ac}\delta^b_c = g^{ab}$. A notação de índices abstratos permite que usemos a mesma letra para representar objetos relacionados pelos isomorfismos canônicos definidos acima, sem que haja confusão a qual espaço tensorial cada objeto pertence.

(c) Calcule as componentes de g^{ab} na base de $\mathcal{T}(2,0)$ induzida por uma base tetrada;

(d) Considere uma base tetrada $\{\mathbf{e}^a_\mu\}$ e a respectiva base dual $\{\mathbf{E}^\mu_a\}$. Definindo $(\mathbf{e}_\mu)_a := g_{ab}\,\mathbf{e}^b_\mu$ e $(\mathbf{E}^\mu)^a := g^{ab}\,\mathbf{E}^\mu_b$, relacione $(\mathbf{e}_\mu)_a$ com $\mathbf{E}^\mu_a$ e $(\mathbf{E}^\mu)^a$ com $\mathbf{e}^a_\mu$. Discuta se essas relações encontradas são válidas para uma base $\{\mathbf{x}^a_\mu\}$ (e sua dual $\{\mathbf{X}^\mu_a\}$) qualquer.

[12] A existência desse isomorfismo é garantida pelo fato da métrica ser não-degenerada. Tente entender o porquê.

③ Considere a operação de projeção ortogonal a um 4-vetor u^a (com $u_a u^a \neq 0$), definida na Sec. 1.4 através de $\mathbb{V} \ni \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}^{\perp} := \mathbf{v} - \mathcal{P}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) \in \mathbb{V}_{\perp}(\mathbf{u})$. Mostre que essa operação é feita pelo tensor de posto (1,1) dado por

$$h^a_b = \delta^a_b - \frac{u_b u^a}{u_c u^c}.$$

Em seguida, mostre que, de fato, $h^a_b h^b_c = h^a_c$ (que o caracteriza como uma *projeção*) e $g_{ab} h^b_c = g_{cb} h^b_a$ (que, juntamente com a propriedade anterior, o caracteriza como uma projeção *ortogonal*).

④ Usando a prescrição de como um observador inercial mede distâncias e intervalos de tempo [que levou à Eq. (1.3)], pede-se:

(a) Mostre que se a velocidade de um observador inercial $\widetilde{\mathcal{O}}$ em relação a outro observador inercial $\mathcal{O}$ tem módulo V, então a velocidade de $\mathcal{O}$ em relação a $\widetilde{\mathcal{O}}$ também tem módulo V; (Sugestão: Mostre que

$$\frac{V}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(g_{ab}\, \mathbf{e}^a_0\, \widetilde{\mathbf{e}}^b_0\right)^2}}, \tag{1.4}$$

onde $\mathbf{e}^a_0$ e $\widetilde{\mathbf{e}}^a_0$ são 4-vetores *normalizados* na direção da linha-de-mundo de $\mathcal{O}$ e $\widetilde{\mathcal{O}}$, respectivamente. Assim, argumente que a relação entre $\mathcal{O}$ e $\widetilde{\mathcal{O}}$ é simétrica.)

(b) Isole a quantidade $g_{ab}\, \mathbf{e}^a_0\, \widetilde{\mathbf{e}}^b_0$ na Eq. (1.4) e veja se o resultado lhe é familiar. (Atenção ao sinal do resultado.)

⑤ Num diagrama $c\Delta t$ por D, represente os lugares geométricos que representam valores constantes de $\mathcal{I}$ de acordo com a Eq. (1.3)

⑥ A **Fig. 1.3** mostra como construir a superfície espacial $\Sigma(p, u^a)$ para um observador inercial passando pelo evento p. Sobre a linha-de-mundo do observador, escolha dois eventos que sejam "equidistantes" (no sentido temporal) de p, um no futuro e outro no passado. A partir deles, considere linhas-de-mundo (retilíneas) de luz que se cruzam. O cruzamento dessas linhas-de-mundo de luz determina um evento q que *naturalmente* pertence a $\Sigma(p, u^a)$. Na verdade, todos os pontos de $\Sigma(p, u^a)$ podem ser gerados dessa maneira, variando-se o par de eventos (equidistantes de p) inicialmente escolhidos.

(a) Argumente o porquê é *fisicamente* natural considerar que o evento q obtido na construção acima seja considerado simultâneo a p de acordo com o observador em questão;

(b) Mostre que, de fato, $s^a := \overrightarrow{pq}$ satisfaz $g_{ab} u^a s^b = 0$ (ou seja, $\overrightarrow{pq} \in \mathbb{V}^{\perp}(u^a)$).

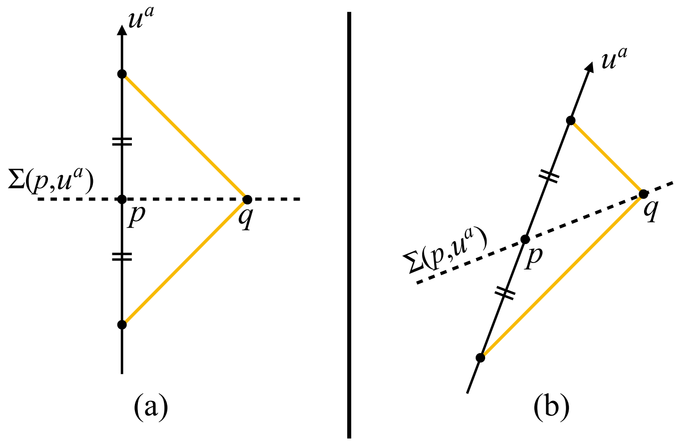

Figura 1.3: Construção da superfície espacial $\Sigma(p, u^a)$ para diferentes escolhas de observador passando pelo evento p.

⑦ Considere dois eventos p e q arbitrários (**Fig. 1.4(a)**). Agora, considere um observador inercial *qualquer* passando por um deles (digamos, p) e o cone-de-luz do outro. Seja τ_1 o intervalo de tempo, medido por esse observador, decorrido entre a intersecção de sua linha-de-mundo com o cone-de-luz passado de q e o evento p (*nessa ordem*); analogamente, τ_2 é o intervalo de tempo, medido por esse observador, decorrido entre o evento p e a intersecção de sua linha-de-mundo com o cone-de-luz futuro de q (*nessa ordem*; vide **Fig. 1.4(b)**). Com a ajuda do resultado do exercício anterior, mostre que

$$\mathcal{I}(p, q) = c^2 \tau_1 \tau_2. \tag{1.5}$$

⑧ Considere a **Fig. 1.5** abaixo, onde estão representadas as linhas-de-mundo de dois observadores inerciais passando por um mesmo evento p e parte do cone-de-luz de um evento q. A linha tracejada representa o lugar geométrico dos eventos cuja separação até o evento q possui intervalo invariante constante e positivo: $\{r \in \mathbb{M};\ \mathcal{I}(q, r) = R^2\}$. Com a ajuda do resultado do exercício anterior, mostre que

$$\tau_1 \tau_2 = \tau_3 \tau_4 = [\mathcal{I}(p, q) - R^2]/c^2. \tag{1.6}$$

(Esse resultado é o análogo espaço-temporal do chamado *teorema das cordas* em geometria euclidiana plana.)

⑨ Podemos construir um espaço-tempo que seja condizente com a física newtoniana — chamado de espaço-tempo de Galileu $\mathbb{G}$ — da seguinte

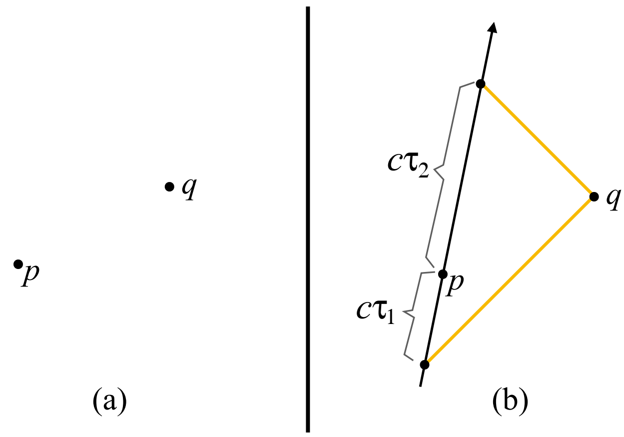

Figura 1.4: Construção para se calcular $\mathcal{I}(p,q)$ a partir de intervalos de tempo medidos por um observador inercial arbitrário.

maneira.[13] Analogamente ao caso de Minkowski, munimos o conjunto de eventos que constitui $\mathbb{G}$ de uma estrutura de espaço afim: existe um espaço vetorial $\mathbb{V}$ de dimensão 4 e um mapeamento $\psi : \mathbb{G}\times\mathbb{G} \to \mathbb{V}$ satisfazendo as propriedades listadas na Seção 1.4 — ou seja, podemos falar da separação entre eventos $p, q \in \mathbb{G}$ como sendo um 4-vetor $s^a \equiv \overrightarrow{pq} := \psi(p,q) \in \mathbb{V}$. Agora, ao invés de introduzirmos uma métrica lorenztiana (que levaria ao espaço-tempo de Minkowski), equipamos $\mathbb{G}$ com um covetor $t_a : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ privilegiado que tem a tarefa de, a cada par de eventos $p, q \in \mathbb{G}$, com separação $s^a := \overrightarrow{pq}$, fornecer o intervalo de tempo entre eles: $\Delta t(p,q) := t_a s^a$. Esse covetor também é o responsável por discernir direções temporais de espaciais: um 4-vetor u^a tem direção temporal se $t_a u^a \neq 0$; caso contrário ($t_a u^a = 0$), u^a tem direção espacial. Dessa forma, as direções espaciais formam um (sub)espaço vetorial de dimensão 3:

$$\mathbb{S} := \{s^a \in \mathbb{V};\ t_a s^a = 0\}.$$

Finalmente, $\mathbb{S}$ é equipado com um legítimo produto interno — ou seja, um tensor simétrico de posto (0,2), $\delta_{ab} : \mathbb{S}\times\mathbb{S} \to \mathbb{R}$, satisfazendo $\delta_{ab}s^a s^b \geq 0$, com a igualdade ocorrendo apenas para $s^a = 0$. Isso completa o espaço-tempo de Galileu.

(a) Mostre que o conjunto $\mathbb{S}$ definido acima é, de fato, um espaço vetorial de dimensão 3.

Dado um 4-vetor tipo-tempo u^a (ou seja, com $t_a u^a \neq 0$), o tensor de

[13] Há diferentes — mas equivalentes — maneiras de se definir o espaço-tempo de Galileu. Uma particularmente elaborada é como espaço fibrado, com espaço base $\mathbb{R}$ e fibras $\mathbb{E}^3$. Aqui, apresentaremos uma construção muito mais elementar.

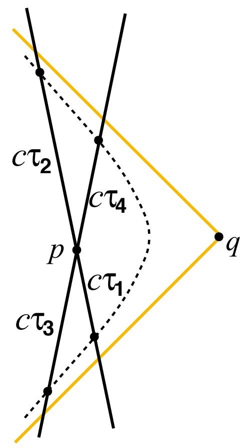

Figura 1.5: Representação de dois observadores inerciais passando pelo mesmo evento p, cone-de-luz (parcial) de um evento q e o lugar geométrico determinado por $\{r \in \mathbb{M};\ \mathcal{I}(q,r) = R^2\}$. Fixados os eventos p e q, o produto $\tau_1\tau_2$ é uma constante independente do observador escolhido. Esse resultado é o análogo do *teorema das cordas* válido em geometria euclidiana.

posto $(1,1)$ definido por

$$h^a_b := \delta^a_b - \frac{t_b u^a}{t_c u^c}$$

define uma projeção de $\mathbb{V}$ em $\mathbb{S}$. Com ele, podemos obter a distância espacial que um observador inercial — com linha-de-mundo (retilínea) na direção de u^a — atribui para um par de eventos $p, q \in \mathbb{G}$:

$$D(p,q) := \sqrt{\delta_{ab} h^a_c h^b_d s^c s^d},$$

onde $s^a := \overrightarrow{pq}$. (Ou seja, D é a norma da projeção de s^a em $\mathbb{S}$, projeção essa associada a u^a.)

(b) Mostre que, de fato, h^a_b definido acima define uma projeção e que a imagem dessa projeção é elemento de $\mathbb{S}$;

(c) Sejam $\mathcal{O}$ e $\widetilde{\mathcal{O}}$ dois observadores inerciais com linhas-de-mundo (retilíneas) nas direções dadas pelos 4-vetores u^a e $\widetilde{u}^a$, respectivamente, ambos normalizados, por coveniência, segundo $t_a u^a = 1 = t_a \widetilde{u}^a$. Mostre que o módulo da velocidade relativa entre eles é dada por

$$V = \|u^a - \widetilde{u}^a\| := \sqrt{\delta_{ab}(u^a - \widetilde{u}^a)(u^b - \widetilde{u}^b)};$$