Introdução a ÁLGEBRA LINEAR - Licenciatura
2ª Lista de Exercícios

Parte I : Transformações lineares

1. Em cada um dos itens abaixo, verifique se a transformação T dada é linear:
 - (a) $T : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(f) = f(a)$, para toda f em $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, onde a é um número real fixado.
 - (b) $T : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ definida por $T(f) = f'$, para toda f em $C^\infty(\mathbb{R})$.
 - (c) $T : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ definida por $T(f) = af'' + bf' + cf$, para toda f em $C^\infty(\mathbb{R})$, onde a, b e c são números reais fixados.
 - (d) $T : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R})$ definida por $T(f)(x) = \int_a^x f(t) dt$, para toda f em $C^\infty(\mathbb{R})$ e todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a \in \mathbb{R}$ é um número real fixado.
2. Recorde que o *traço* de uma matriz quadrada A é a soma de todos os elementos de sua diagonal principal, isto é, se $A = (a_{ij})_{n \times n}$, então $\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.
 - (a) Mostre que a função $\text{tr} : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ é linear.
 - (b) Mostre que $\dim(\text{Ker}(T)) = n^2 - 1$.
 - (c) Mostre que $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^t)$, onde A^t denota a transposta da matriz A .
3. Considere em $P_2(\mathbb{R})$ o produto interno $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$. Seja $W = [1, x]$ e defina $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ por $T(p) = \text{proj}_W p$.
 - (a) Calcule $T(a + bx + cx^2)$.
 - (b) Mostre que $\text{Ker}(T) = W^\perp$ e $\text{Im}(T) = W$.
4. Seja $T : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ definida por $T(M) = AM - MA$, onde $A \in M_n(\mathbb{R})$ é uma matriz fixada. Mostre que T é linear e determine seu núcleo. A matriz identidade pertence à imagem de T ?
5. Ache uma transformação linear $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$ tal que $\text{Im}(T)$ seja gerada pelos vetores
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Ache uma base para $\text{Im}(T)$ e uma base para $\text{Ker}(T)$.
6. Seja $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja matriz em relação às bases canônicas é igual a
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ a & 0 & b & 4 \end{pmatrix}.$$
 - (a) Determine os valores de a e b para os quais T não é sobrejetora.
 - (b) Para os valores de a e b encontrados no item (a), determine uma base de $\text{Im}(T)$ e uma base de $\text{Ker}(T)$.

7. Verdadeiro ou falso? Justifique suas respostas.

- (a) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(x) = x^2$ é linear.
- (b) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(x) = |x|$ é linear.
- (c) $T : P_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = a_n$ é linear.
- (d) Qualquer matriz real 5×6 define uma transformação linear de $\mathbb{R}^6$ em $\mathbb{R}^5$.
- (e) Se $T : V \rightarrow W$ é uma transformação linear, $\dim(V) = 6$, $\dim(W) = 4$ e $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$, então T é sobrejetora.
- (f) Se $T : V \rightarrow W$ é uma transformação linear e $\text{Im}(T) = \{0\}$, então $T(x) = 0$, para todo $x \in V$.
- (g) Se $T : V \rightarrow W$ é uma transformação linear e $\dim(V) \leq \dim(W)$, então T é injetora.
- (h) Se $T : V \rightarrow W$ é uma transformação linear injetora, então $\dim(V) \leq \dim(W)$.

8. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $[T]_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, onde B e C são as bases $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,1,2)\}$ e $C = \{(1,0), (1,1)\}$.

- (a) Ache uma base de $\text{Ker}(T)$.
- (b) Determine $T(x, y, z)$.

9. Verdadeiro ou falso? Justifique suas respostas.

- (a) Existe uma transformação linear inversível $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$.
- (b) Se $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$ é definida por $T(p) = p'$, então T é sobrejetora.
- (c) Existe uma transformação linear injetora $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$.
- (d) Se V é um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \rightarrow V$ é um operador linear, então T é sobrejetor se, e somente se, $\text{Ker}(T) = \{0\}$.
- (e) Existe um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(T) \oplus \text{Im}(T)$.
- (f) Se B e C são bases de um espaço vetorial V de dimensão finita e $T : V \rightarrow V$ é um operador linear, então as matrizes $[T]_B$ e $[T]_C$ são semelhantes.

10. Determine um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja a reta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$ e cuja imagem seja a reta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$.
11. Determine um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que tenha como núcleo e como imagem a reta $[(1,0)]$.
12. Determine um operador linear $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\text{Ker}(T) = \text{Im}(T)$.
13. Considere o operador linear $T : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R})$ definido por $T(f) = \varphi$, onde $\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Determine o núcleo e a imagem desse operador.
14. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita. Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique suas respostas.

(a) Uma transformação linear $T : U \rightarrow V$ é sobrejetora se, e somente se,

$$\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(U) - \dim(V).$$

(b) Dada uma transformação linear $T : U \rightarrow V$ e um vetor $v \in V$ então o conjunto $G = \{x \in U : T(x) = v\}$ é um subespaço de U .

(c) O núcleo de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tem dimensão maior ou igual a 3.

(d) Se uma transformação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ for injetora, então $\dim(\text{Im}(T)) = m$.

(e) Se $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ for uma transformação linear sobrejetora, então

$$\dim(\text{Ker}(T)) = m - n.$$

15. Seja $T : P_5(\mathbb{R}) \rightarrow P_5(\mathbb{R})$ o operador linear definido por $T(p)(x) = x \cdot p'''(x)$, para todo $p \in P_5(\mathbb{R})$. Obtenha bases para $\text{Ker}(T)$ e $\text{Im}(T)$.

16. Determine a matriz do operador derivação $\mathcal{D} : P_4(\mathbb{R}) \rightarrow P_4(\mathbb{R})$ definido por $\mathcal{D}(p) = p'$, relativamente à base $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ de $P_4(\mathbb{R})$.

17. Qual é a matriz, relativamente à base canônica, do operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(2, 3) = (2, 3)$ e $T(-3, 2) = (0, 0)$?

18. Sejam V um espaço vetorial e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Prove que $T^2 = 0$ se, e somente se, $\text{Im}(T) \subset \text{Ker}(T)$.

19. Considere as transformações lineares $T : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow P_n(\mathbb{R})$ e $S : P_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definidas por $T(a_0, a_1, \dots, a_n) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ e $S(p) = (p(0), p(1), \dots, p(n))$. Determine as matrizes de $S \circ T$ e de $T \circ S$ com respeito às bases canônicas apropriadas.

20. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ e $G : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$[T]_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [G]_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

onde:

$$B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}, \quad C = \{1, 1 + x, x + x^2\}.$$

(a) Determine bases para $\text{Ker}(G \circ T)$ e $\text{Ker}(T \circ G)$.

(b) Seja $H = 3(T \circ G) + I$. Determine $[H]_{DC}$, onde $D = \{1, x, x^2\}$.

21. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um operador linear não nulo tal que $T^2 = 0$. Prove que existe uma base B de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Parte II : Espaços com produto interno

1. Para que valores de $t \in \mathbb{R}$ a função definida por $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 + tx_2y_2$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$?
2. Para cada par de vetores $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$, defina

$$\langle u, v \rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

Prove que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$. Ache todos os vetores de $\mathbb{R}^2$ que são ortogonais ao vetor $(1, 0)$. Calcule $\|(1, 0)\|$.

3. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sejam $u, v \in V$.
 - (a) Prove que, se $\|u\| = \|v\|$, então $\langle u + v, u - v \rangle = 0$.
(Observe que essa afirmação corresponde ao resultado familiar: “as diagonais de um losango são perpendiculares”.)
 - (b) Enuncie, na linguagem de espaços vetoriais com produto interno, o seguinte teorema da geometria elementar: “um paralelogramo é um retângulo se, e somente se, as suas diagonais têm o mesmo comprimento”. Dê uma demonstração desse enunciado.
4. Determine $\lambda \in \mathbb{R}$ para que os polinômios $p = x^2 - 1$ e $q = \lambda x - 2$ sejam ortogonais com respeito aos seguintes produtos internos em $P_2(\mathbb{R})$:

(a) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx$;

(b) $\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$.

5. Determine o polinômio de grau menor ou igual a 2 que está mais próximo da função $f(x) = e^x$ no intervalo $[0, 1]$ considerando em $\mathcal{C}([0, 1])$ o produto interno usual, ou seja, o produto interno dado por $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$.
6. No espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ considere o produto interno:

$$\langle A, B \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}.$$

- (a) Prove que $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$, onde X^t denota a transposta de uma matriz X e $\text{tr}(X)$ denota o traço de uma matriz quadrada X (isto é, a soma dos elementos de sua diagonal principal).
 - (b) Se $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} : x + y - z = 0 \right\}$, determine uma base ortonormal para W .
 - (c) Se W é como em (b), determine o vetor de W que está mais próximo de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
7. Em $P_3(\mathbb{R})$ considere o produto interno:

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

Calcule $\text{proj}_{P_1(\mathbb{R})} x^3$. Esboce num mesmo plano cartesiano os gráficos dos polinômios x^3 e $\text{proj}_{P_1(\mathbb{R})} x^3$.

8. Em $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ munido do produto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$ considere o subespaço $S = [1, \sin x, \cos x]$. Calcule $\text{proj}_S(x - 2)$.
9. Considere em $\mathbb{R}^4$ o produto interno canônico e seja

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z + w = 0\}.$$

- (a) Determine uma base ortonormal de S .
- (b) Dado $v \in \mathbb{R}^4$, encontre vetores $v_1 \in S$ e $v_2 \in S^\perp$ tais que $v = v_1 + v_2$.
10. Considere em $P_3(\mathbb{R})$ o produto interno dado por $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$. Seja

$$S = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p(1) = 0\}.$$

- (a) Determine uma base ortonormal de S .
- (b) Dado $p \in P_3(\mathbb{R})$ encontre vetores $p_1 \in S$ e $p_2 \in S^\perp$ tais que $p = p_1 + p_2$.
11. Encontre uma base ortonormal (com respeito ao produto interno canônico) para o subespaço U de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 2, 4)$ e $v_3 = (1, 2, -4, -3)$.
12. Considere em $P(\mathbb{R})$ o produto interno definido por $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$.

- (a) Aplique o algoritmo de Gram–Schmidt ao conjunto $\{1, x, x^2\}$ e obtenha um conjunto ortogonal com coeficientes inteiros.
- (b) Encontre uma base ortonormal para o subespaço gerado por $\{1, x, x^2\}$.
13. Sejam V um espaço vetorial com produto interno e $v_1 \in V$ um vetor não nulo. Mostre que, se $\{v_2, v_3, \dots, v_n\}$ é uma base para $[v_1]^\perp$, então $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ é uma base para V .

Parte III : Autovalores e autovetores, diagonalização

1. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Dizemos que A é *semelhante* a B (e escrevemos $A \sim B$) se existir uma matriz invertível $M \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $M^{-1}AM = B$. Mostre que:
- (a) A semelhança de matrizes é uma *relação de equivalência* em $M_n(\mathbb{R})$, isto é, valem as seguintes propriedades:
- (i) Para toda matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A \sim A$. (*Reflexiva*)
- (ii) Para $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, se $A \sim B$ então $B \sim A$. (*Simétrica*)
- (iii) Para $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$, se $A \sim B$ e $B \sim C$ então $A \sim C$. (*Transitiva*)
- (b) As matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

não são semelhantes.

2. Mostre que se $A \in M_2(\mathbb{R})$ então seu polinômio característico é dado por

$$p_A(t) = t^2 - a_1t + a_0$$

onde $a_0 = \det(A)$ e $a_1 = \text{traço}(A)$.

3. Mostre que se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é diagonalizável, então a matriz A^m é diagonalizável qualquer que seja o número natural m , $m \geq 1$.
4. Exiba uma matriz A não diagonalizável tal que a matriz A^2 seja diagonalizável.

Sugestão: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

5. Mostre que o operador linear $T : C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$ dado por

$$T(u(x)) = \int_0^x u(s)ds$$

não tem autovalores.

6. Mostre que se λ é um autovalor do operador linear $T : V \rightarrow V$ e n é um número natural, então:
- (a) λ^n é um autovalor de T^n .
- (b) Se $f(t)$ é um polinômio qualquer então $f(\lambda)$ é um autovalor de $f(T)$.

7. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$. Calcule A^n , $n \in \mathbb{N}$.

Sugestão: Lembre-se de que $(M^{-1}BM)^n = M^{-1}B^nM$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

8. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear com autovetores $v_1 = (1, -1)$ e $v_2 = (1, 1)$ correspondendo respectivamente aos autovalores $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = 2$. Seja $v = (5, 1)$. Calcule $T^{10}(v)$.

9. Verifique que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ é semelhante à matriz $\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

10. Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ o operador linear cuja matriz em relação à base

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ é } [T]_B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ache uma matriz real 4×4 invertível tal que $M^{-1}[T]_B M$ seja uma matriz diagonal.

11. Verifique se cada uma das matrizes abaixo é ou não diagonalizável. Quando for diagonalizável, determine uma matriz invertível M tal que $M^{-1}AM$ seja uma matriz diagonal.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

12. Sendo $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ e $C = \{(0, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$, considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$[T]_{B,C} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Encontre os autovalores e autovetores de T .
 (b) É T diagonalizável?

13. Considere a matriz real $A = \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Determine *todos* os valores de a , b , e c para os quais A é diagonalizável.

14. Seja $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma transformação linear com polinômio característico indicado por $p_T(t)$. Verifique se T é diagonalizável em cada um dos seguintes casos:

- (a) $p_T(t) = t^4 - 1$
 (b) $p_T(t) = t^3(t + 1)$, e $\dim \ker(T) = 2$.
 (c) $p_T(t) = t^2(t^2 - 4)$, e $\dim \ker(T) = 2$.

15. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear invertível. Prove que:

- (a) Se λ é um valor próprio de T então $\lambda \neq 0$.
 (b) λ é um valor próprio de T se, e somente se $\frac{1}{\lambda}$ é um valor próprio de T^{-1} (onde T^{-1} é o operador inverso de T).
 (c) Se λ é um valor próprio de T , mostre que a multiplicidade algébrica de λ é igual à multiplicidade algébrica de $\frac{1}{\lambda}$.

16. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear tal que $T^2 = T$.

- (a) Prove que se λ é um autovalor de T então $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.
 (b) Prove que $V = \ker(T) \oplus \text{Im}(T)$ e conclua que T é diagonalizável.

17. Seja $T : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ o operador linear tal que $T(M) = M^t$, onde $M \in M_n(\mathbb{R})$ e M^t é a transposta de M . Prove que T é diagonalizável.

18. Seja $T : P_n(\mathbb{R}) \rightarrow P_n(\mathbb{R})$ definida por $T(f(t)) = f(t+1)$ para todo $f(t) \in P_n(\mathbb{R})$. É T diagonalizável? Por que?
19. Seja $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ uma base do espaço vetorial V e seja $T : V \rightarrow V$ o operador linear dado por

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Mostre que os subespaços $[v_1, v_2]$ e $[v_3, v_4]$ são invariantes sob T .
 (b) Verifique que T não tem autovetores.
20. No $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual, determine uma base ortonormal B formada por vetores próprios do operador simétrico T cuja matriz em relação à base canônica é:

$$(a) \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

21. No $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear dado por

$$T(x, y, z) = (x - 2y, -2x + y, -z).$$

- (a) Verifique que T é simétrico.
 (b) Determine uma matriz M tal que $M^{-1}[T]_{can}M$ seja diagonal.
22. No $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico cujos autovalores são -2 e 3 . Sendo $V(-2) = \ker(T + 2I) = [(1, 1, 1), (-1, 0, 1)]$, ache $[T]_{can}$, onde can é a base canônica de $\mathbb{R}^3$.
23. No $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual seja $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ o operador linear dado por:

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

onde can é a base canônica de $\mathbb{R}^4$.

- (a) Mostre que T é diagonalizável.
 (b) Ache uma base *ortonormal* B de $\mathbb{R}^4$ tal que $[T]_B$ é diagonal.
 (c) Ache uma matriz real invertível M tal que $M^{-1}[T]_{can}M$ é diagonal.
24. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por:

$$T(x, y, z) = (4x + 2y + 2z, 6x + 2z, 12x + 4y + 2z).$$

- (a) Ache uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de T .
 (b) Considerando $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual mostre que *não existe* uma base *ortogonal* formada por vetores próprios de T . (Se ortogonalizarmos a base encontrada em (a) *não* obteremos uma base formada por *vetores próprios* de T . Por que?)

25. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle, \rangle$ e sejam $u, w \in V$ vetores não nulos. Defina $T : V \rightarrow V$ por $T(v) = \langle v, u \rangle w$ para todo $v \in V$. Prove que T é um operador simétrico se, e somente se u e w são vetores paralelos.
26. Reconheça as seguintes cônicas dadas pelas suas equações em relação ao sistema de coordenadas $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- (a) $4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$
 - (b) $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$
 - (c) $x^2 + 4y^2 + 3\sqrt{3}xy - 1 = 0$
 - (d) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$
27. Reconheça as seguintes quádricas dadas pelas suas equações em relação ao sistema de coordenadas $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- (a) $2xy + z = 0$
 - (b) $x^2 + y^2 - 2z^2 + 4xy - 2xz + 2yz - x + y + z = 0$
 - (c) $x^2 + y^2 + z^2 - 4yz = 1$
 - (d) $11x^2 + 11y^2 + 14z^2 + 2xy + 8xz - 8yz - 12x + 12y + 12z = 6$