EESC · USP
Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo

ARC Lab
Laboratório de Controle de Robótica Avancada

SEM5950 - SEM0586
Legged Robots

Aula #2: Revisão de cinemática e dinâmica de robôs

Prof. Dr. Thiago Boaventura
tboaventura@usp.br

São Carlos, 27/05/19

Aula passada…

Histórico (resumido) de robôs com pernas

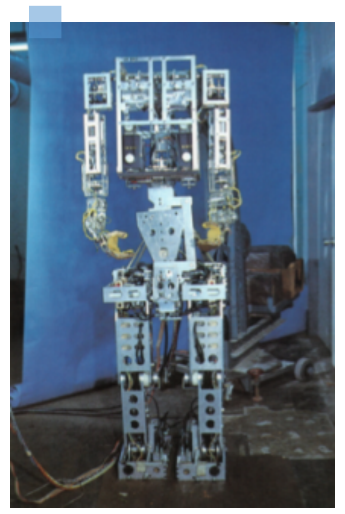
Aula passada…

First computer-controller robot (Raiber, 70s – 80s)

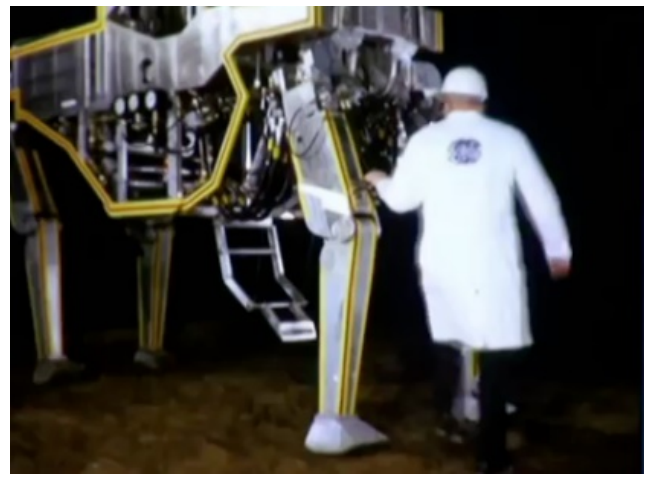
ZMP concept (Vukobratovic, 1972)

P2 (Honda, 1996)

1970 1980 1990 2000



First Humanoid Robot (1973 - Waseda University, Japan)



The pre-robotic period First walking machines were tele-operated by humans: GE Walking Truck (~1960s)

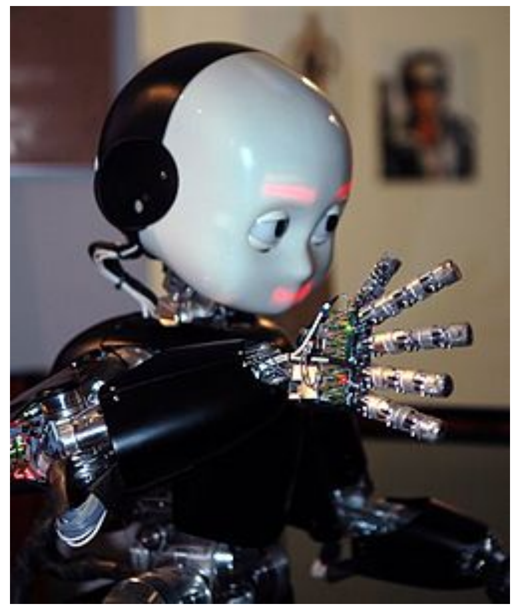
Purely passive dynamics (McGeer, 1990)

Histórico (resumido) de robôs com pernas

Aula passada…

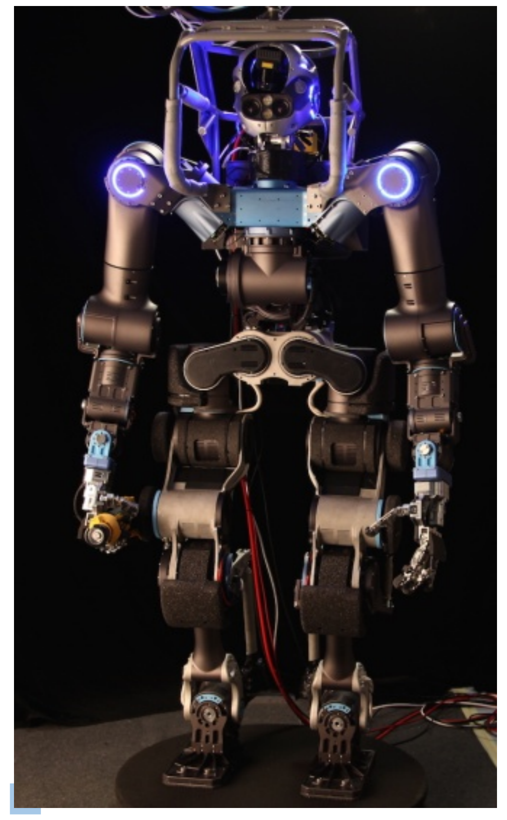
HRP-2
(Kawada, 2002)

iCub
(IIT, 2009)



Toro
(DLR, 2013)

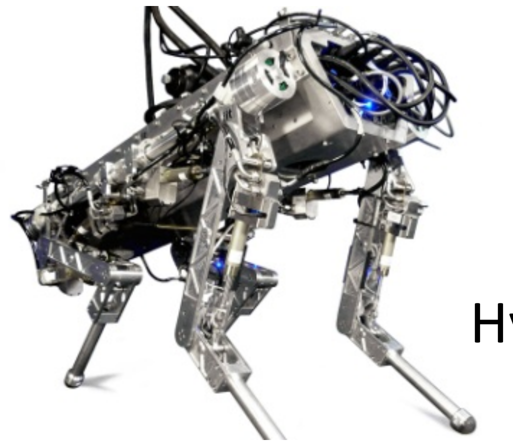
Walkman
(IIT, 2015)



2000 — 2010 — 2020

ASIMO,
Honda (2000)

BigDog, Boston Dynamics (2008)



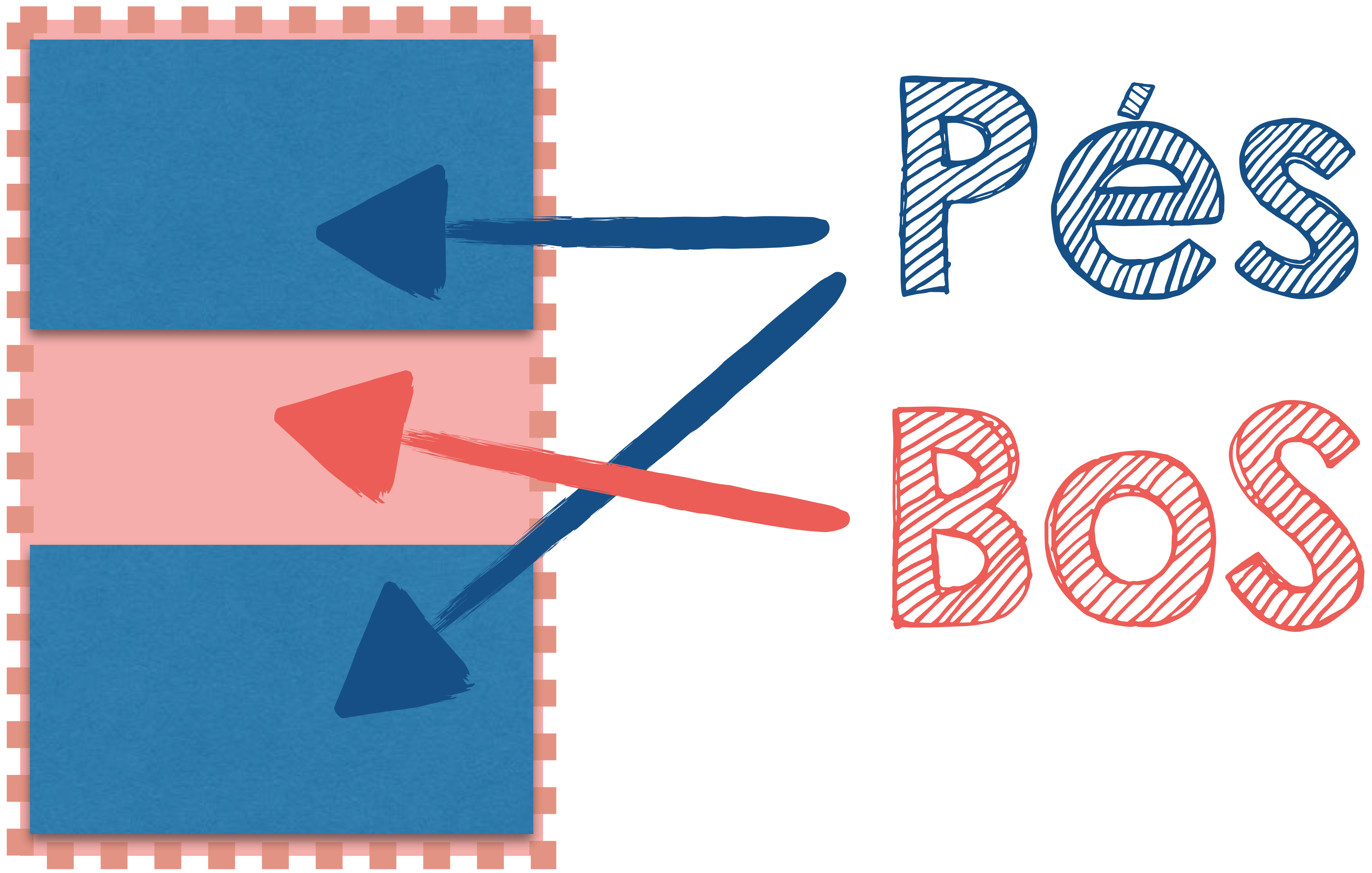
HyQ, IIT (2010)

ANYmal, ETH
(2016)

Atlas, Boston Dynamics (2019)

HyQReal, IIT (2019)

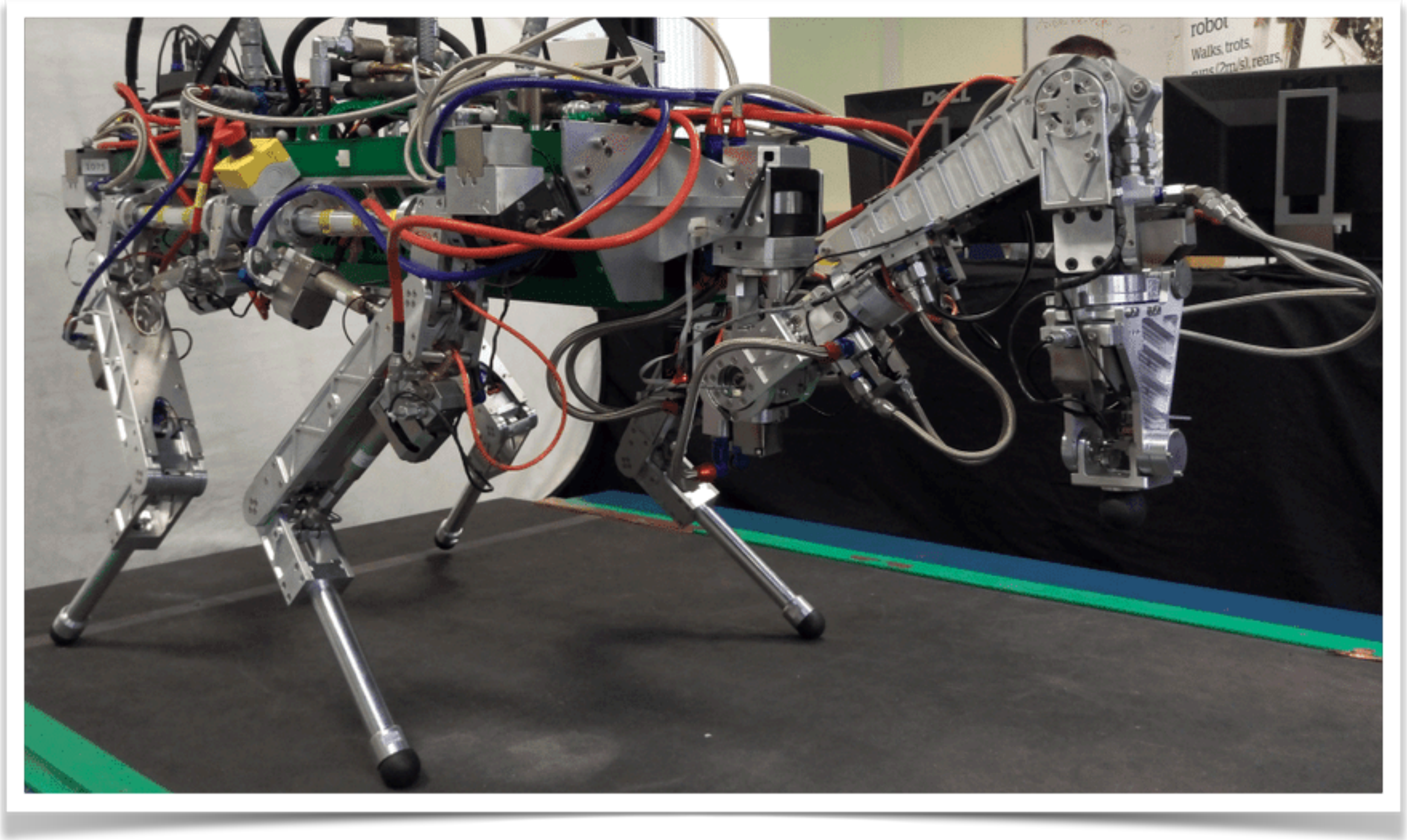
Base de suporte (BoS)

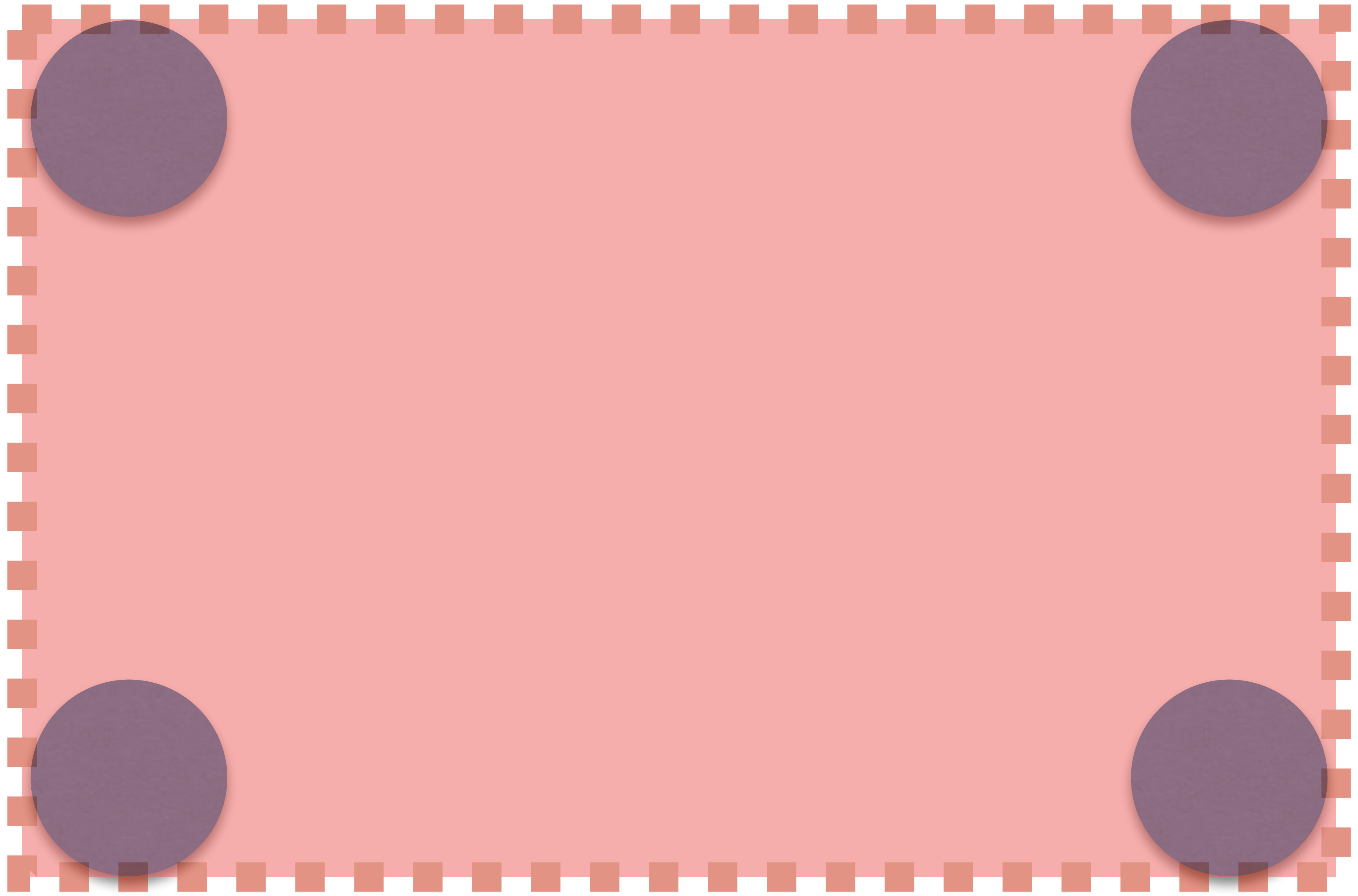


Polígono formado pela **envoltória convexa** dos **pontos de contato** com o ambiente

Base de suporte (BoS)

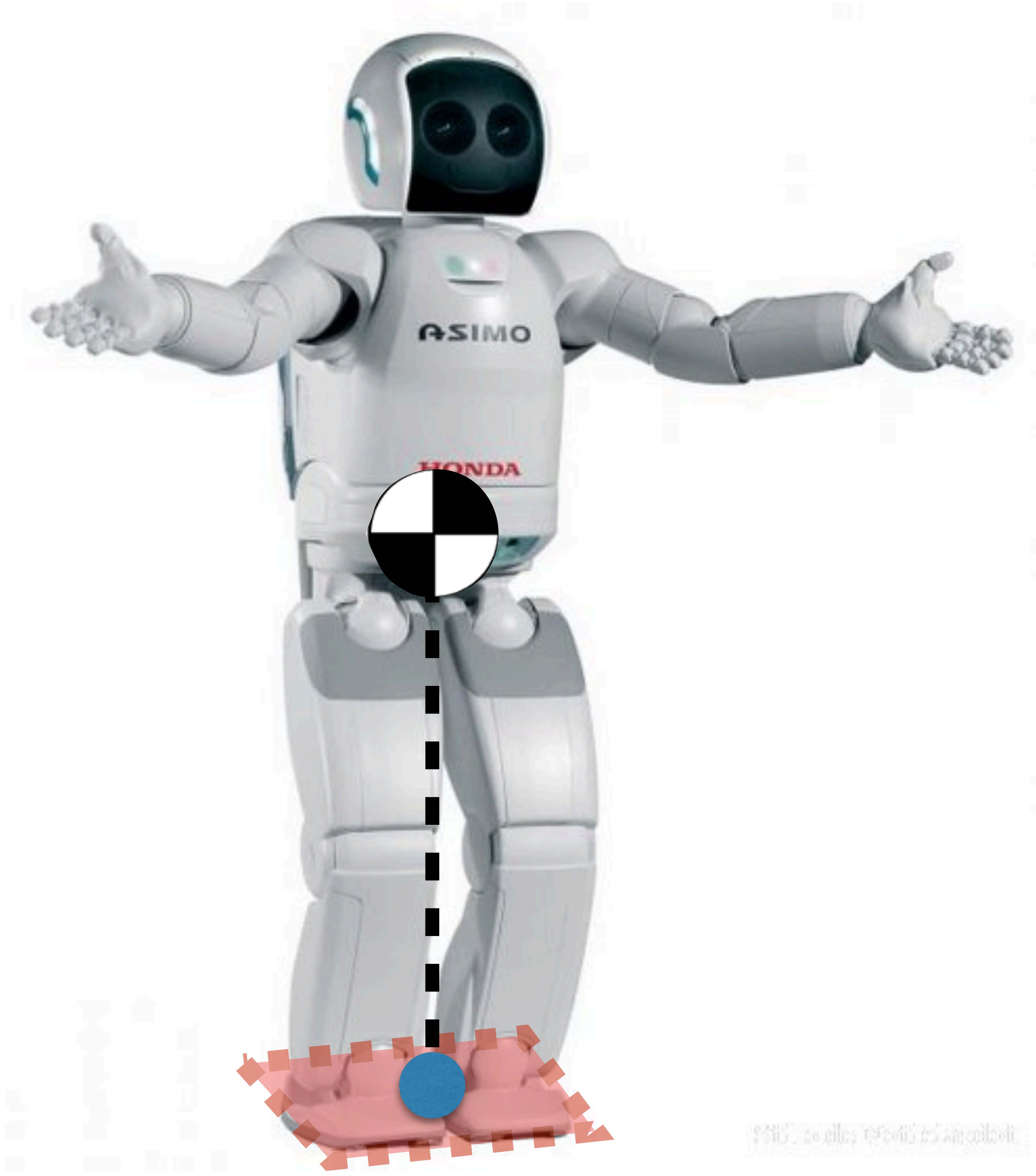
Aula passada…



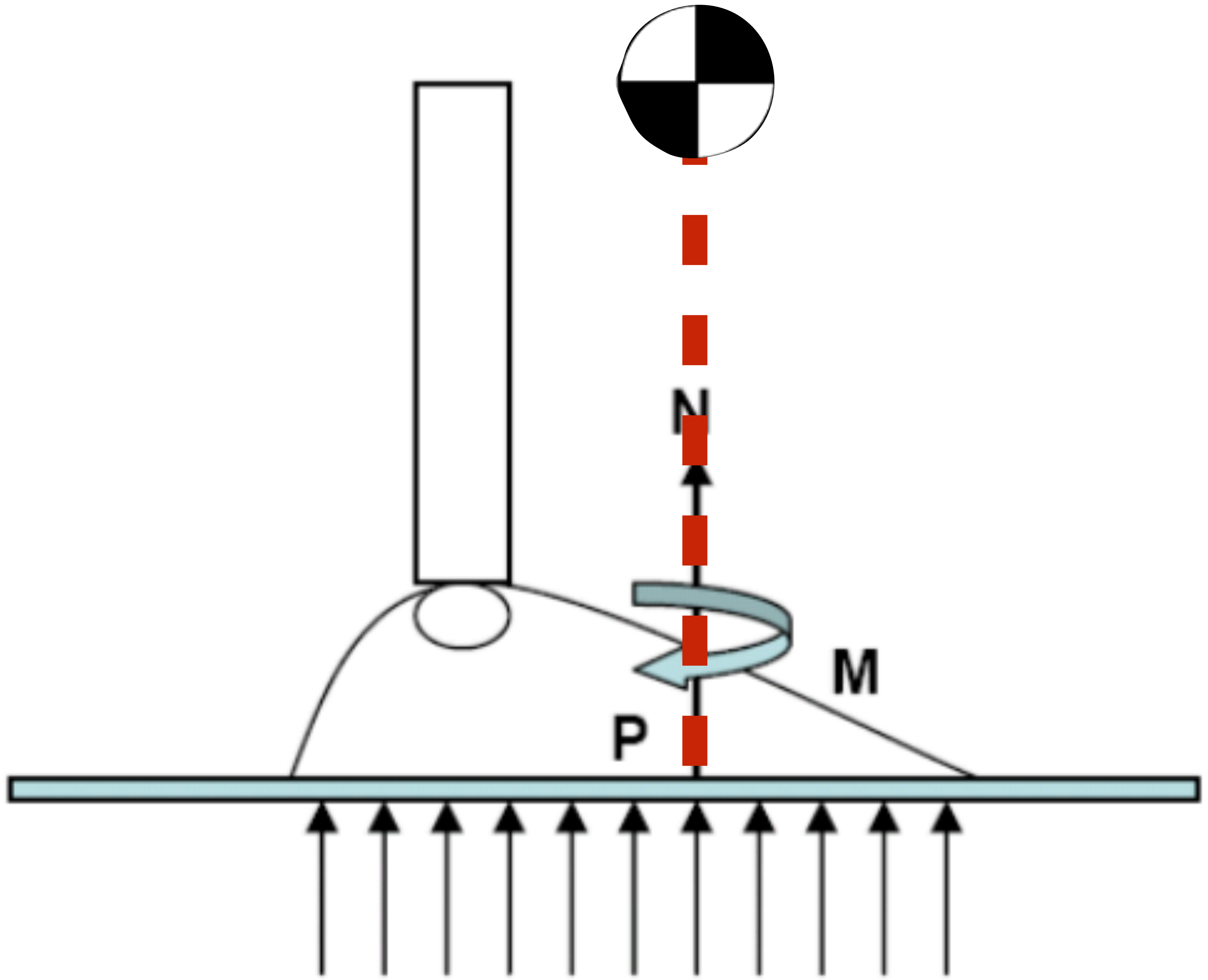


Estabilidade estática

Aula passada…



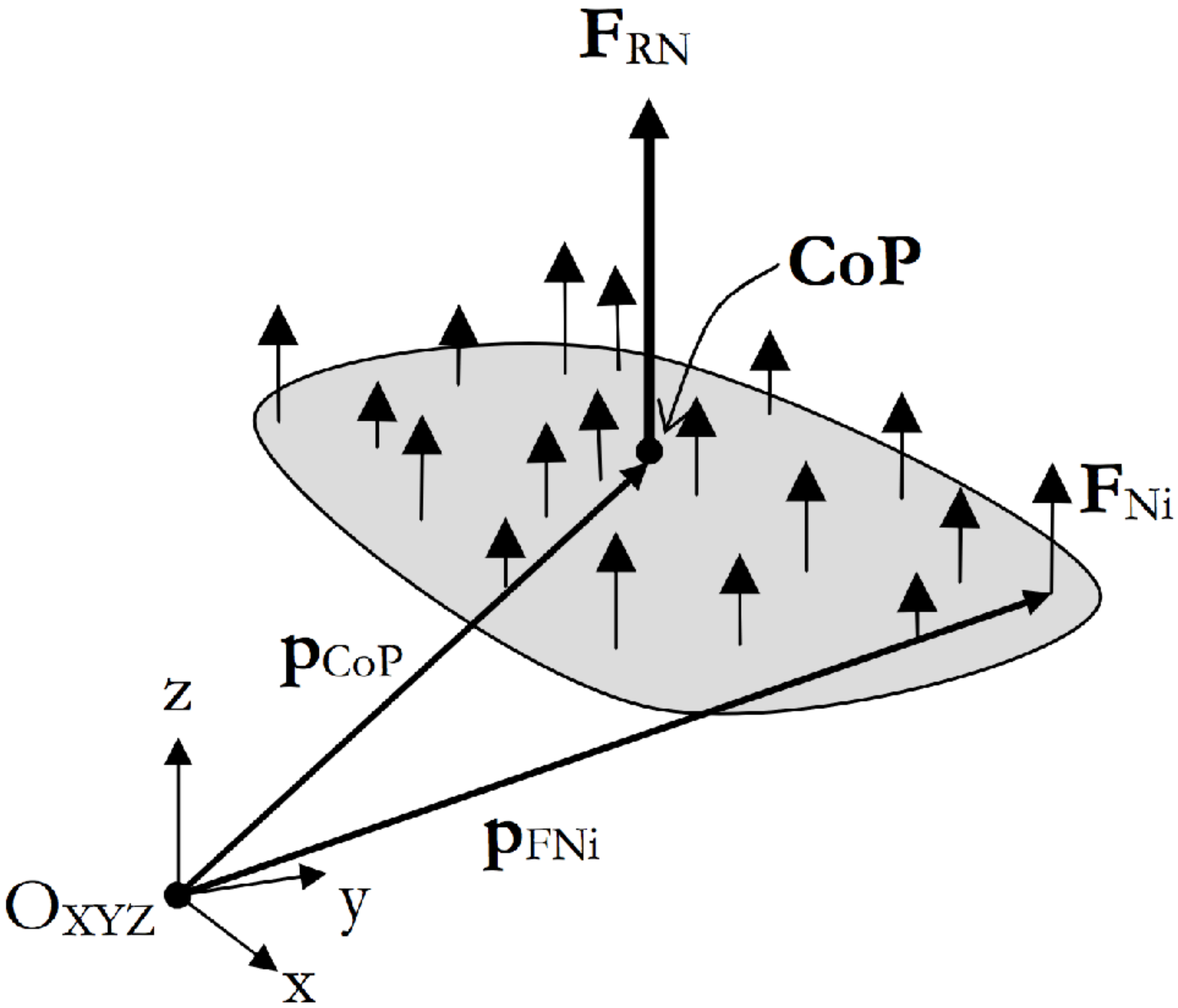
Centro de Pressão (CoP)



Ponto por onde passa a **força resultante** das forças de interação

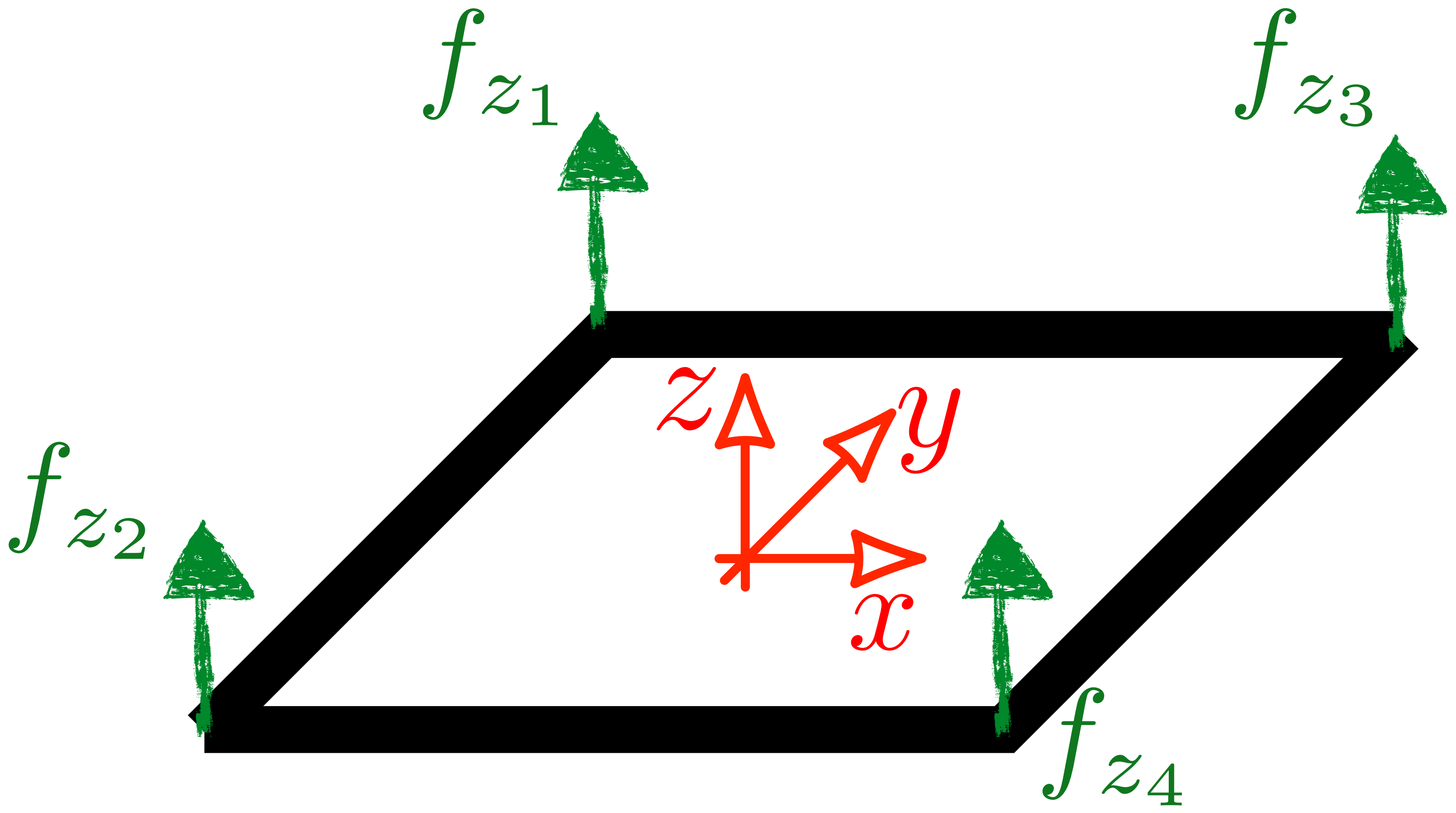
Centro de Pressão (CoP)

Aula passada…



Torques no CoP

Aula passada...



Superfície horizontal:

$$p_{iz} = p_z$$

$$\boldsymbol{p} := \frac{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i f_{iz}}{\sum_{i=1}^{N} f_{iz}}$$

$$\tau_x = \tau_y = 0$$

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}) \times \boldsymbol{f}_i$$

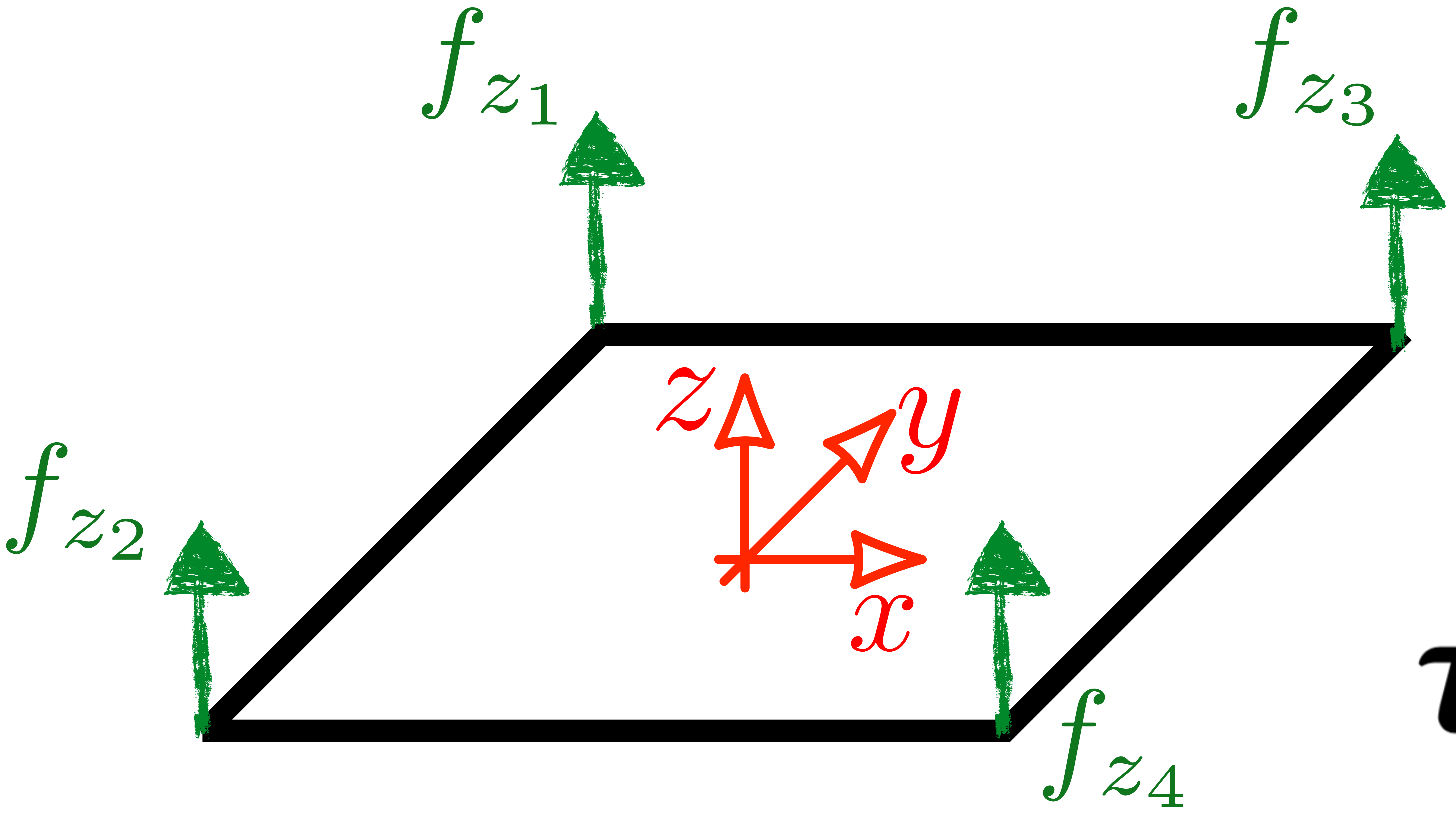
$$\tau_x = \sum_{i=1}^{N} (p_{iy} - p_y) f_{iz} - \sum_{i=1}^{N} (p_{iz} - p_z) f_{iy}$$

$$\tau_y = \sum_{i=1}^{N} (p_{iz} - p_z) f_{ix} - \sum_{i=1}^{N} (p_{ix} - p_x) f_{iz}$$

$$\tau_z = \sum_{i=1}^{N} (p_{ix} - p_x) f_{iy} - \sum_{i=1}^{N} (p_{iy} - p_y) f_{ix}$$

Torques no CoP

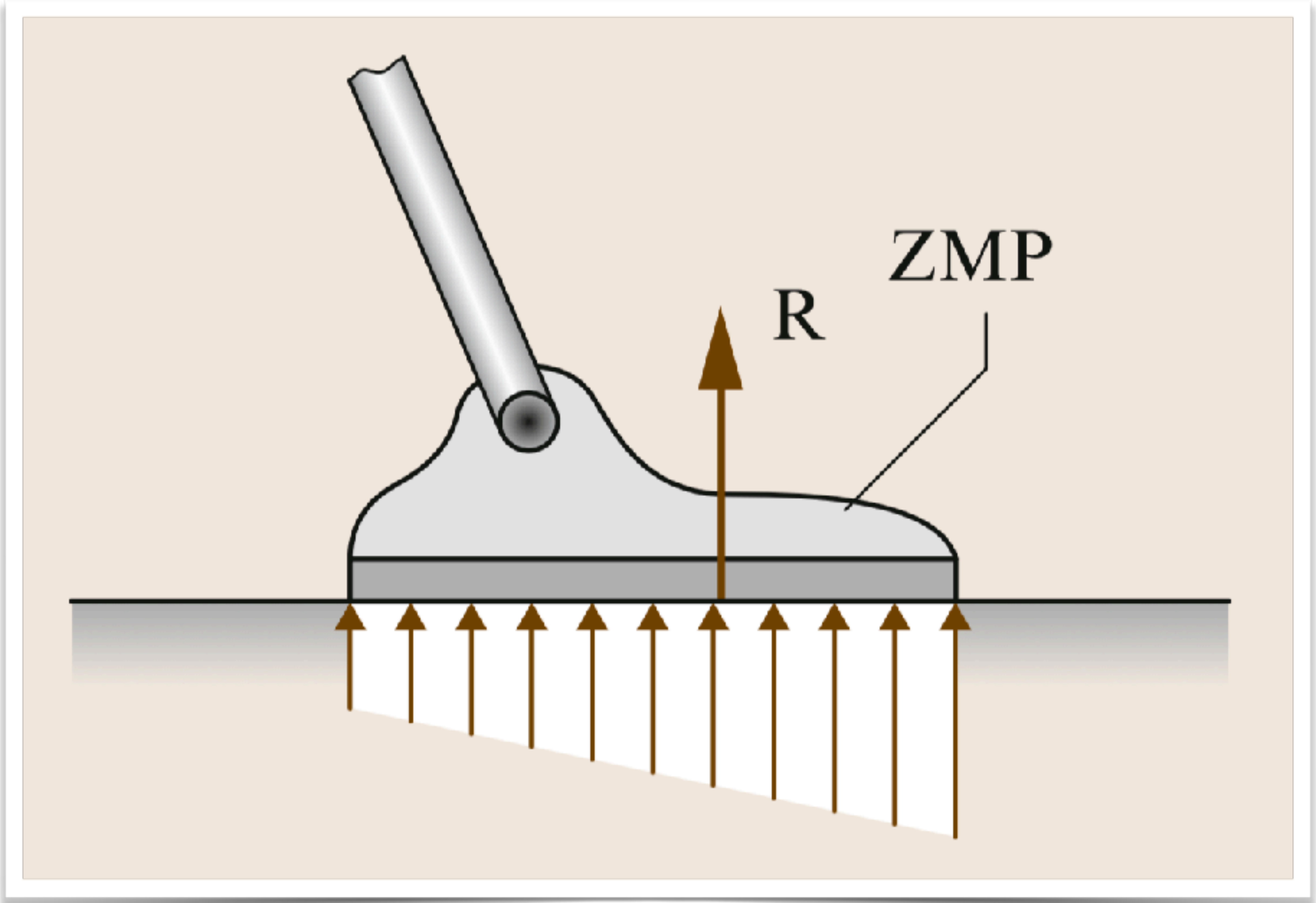
Aula passada...



$$\boldsymbol{\tau}_z \neq 0$$

ZMP: Zero moment point

(praticamente) Equivalente ao CoP



Nomenclatura não é muito precisa:

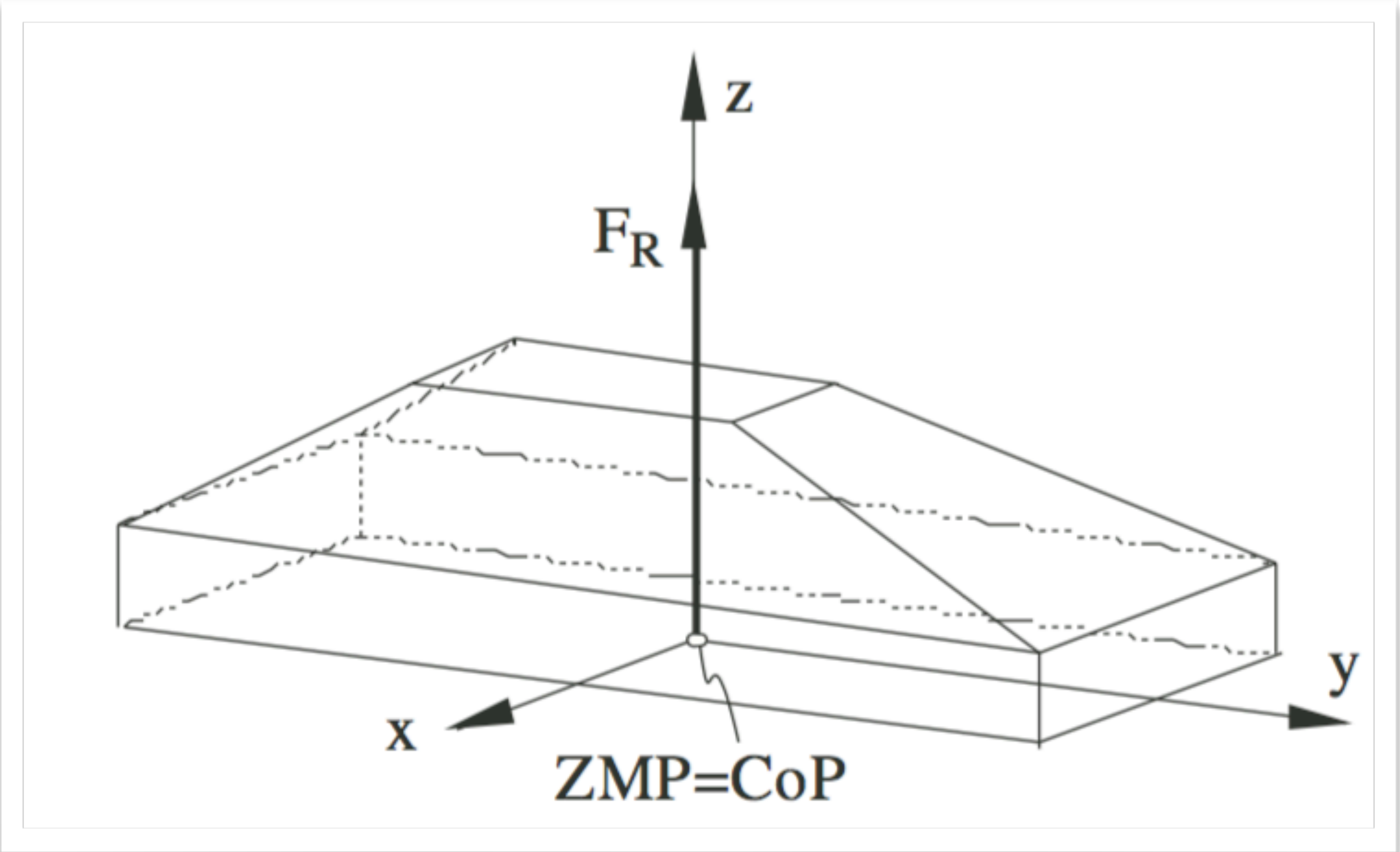
$$\tau_x = \tau_y = 0$$

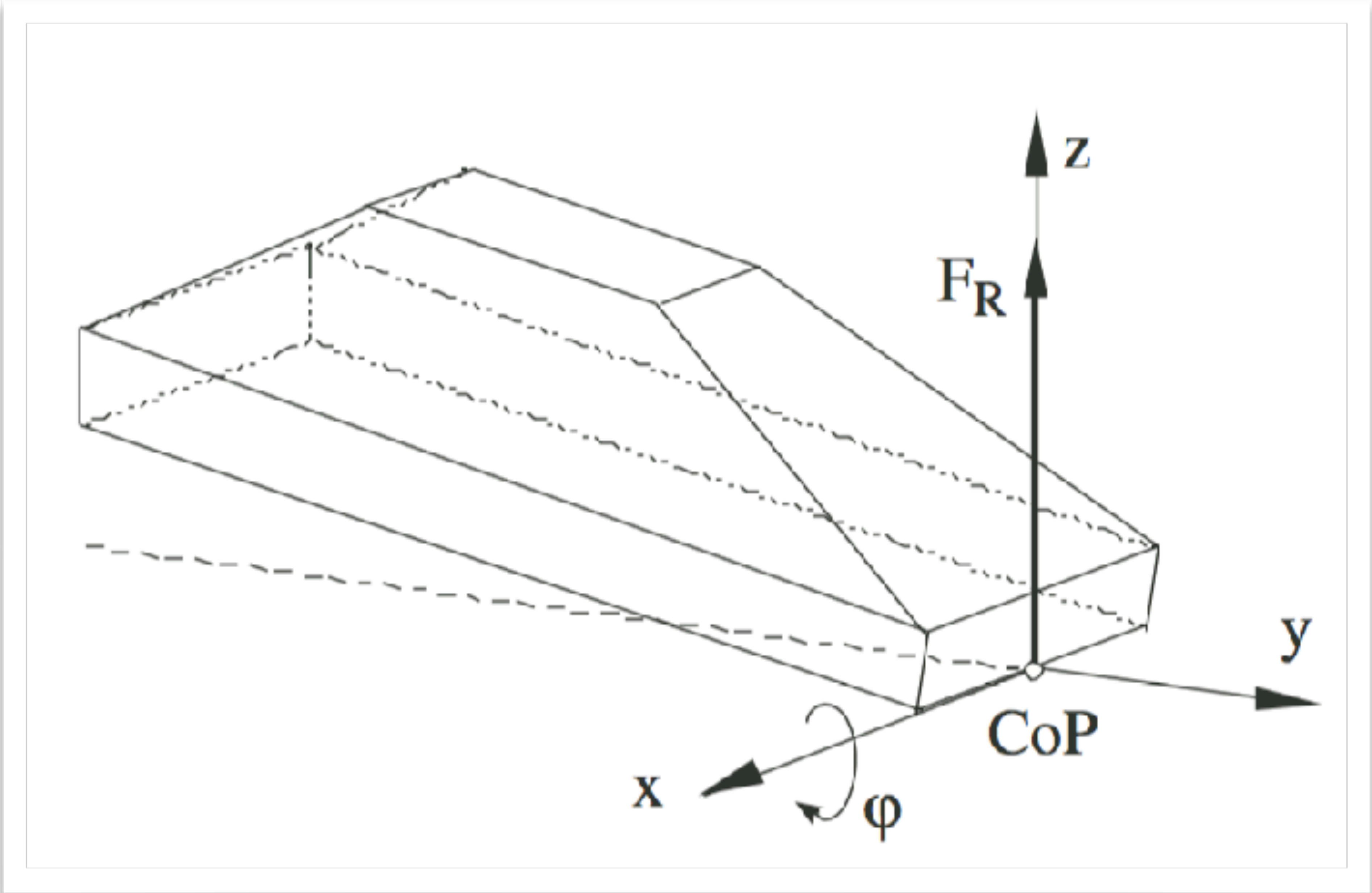
$$\tau_z \neq 0$$

ZMP: Zero moment point

(praticamente) Equivalente ao CoP

Aula passada...

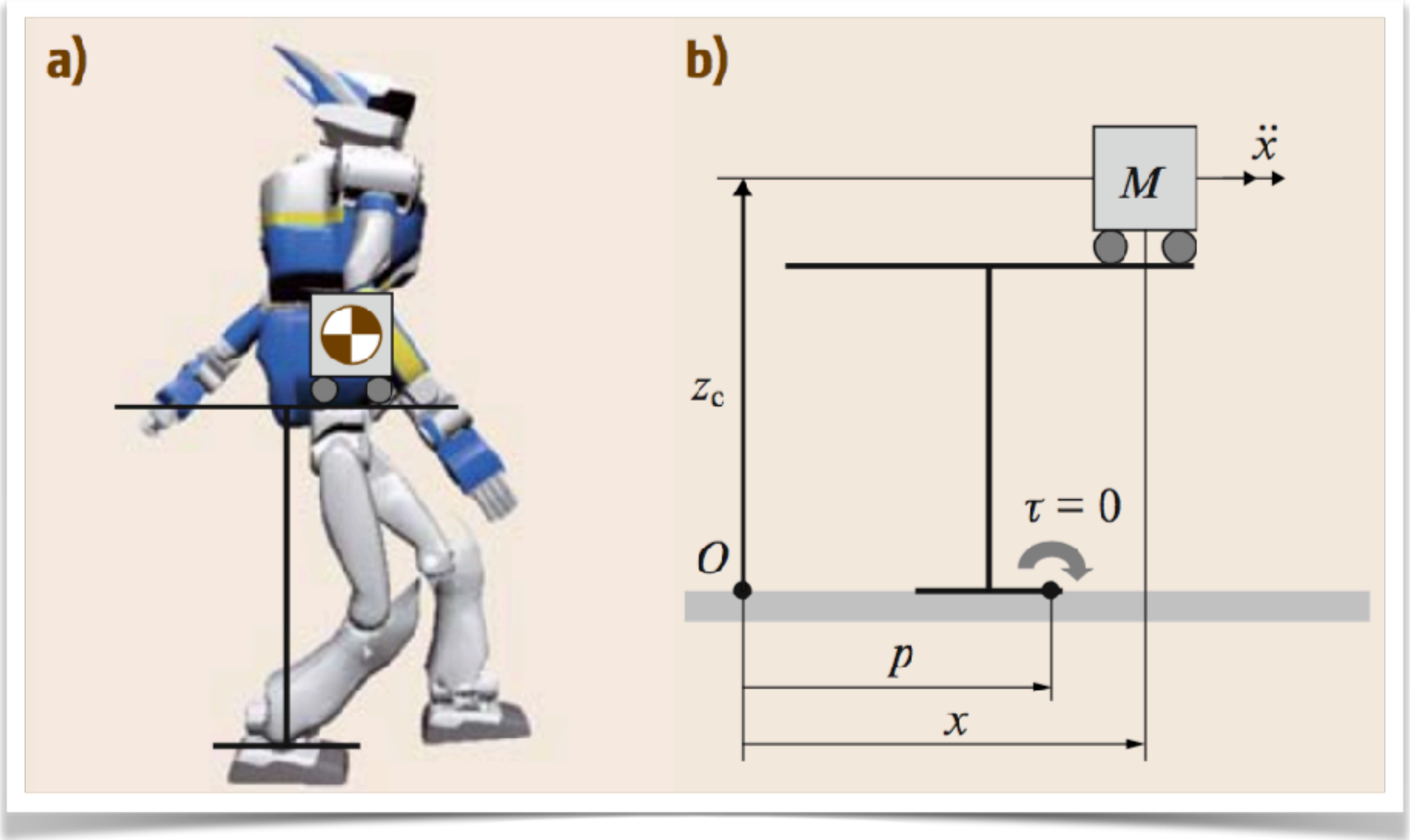




Computed ZMP

Aula passada…

Leva em consideração o **movimento** do robô

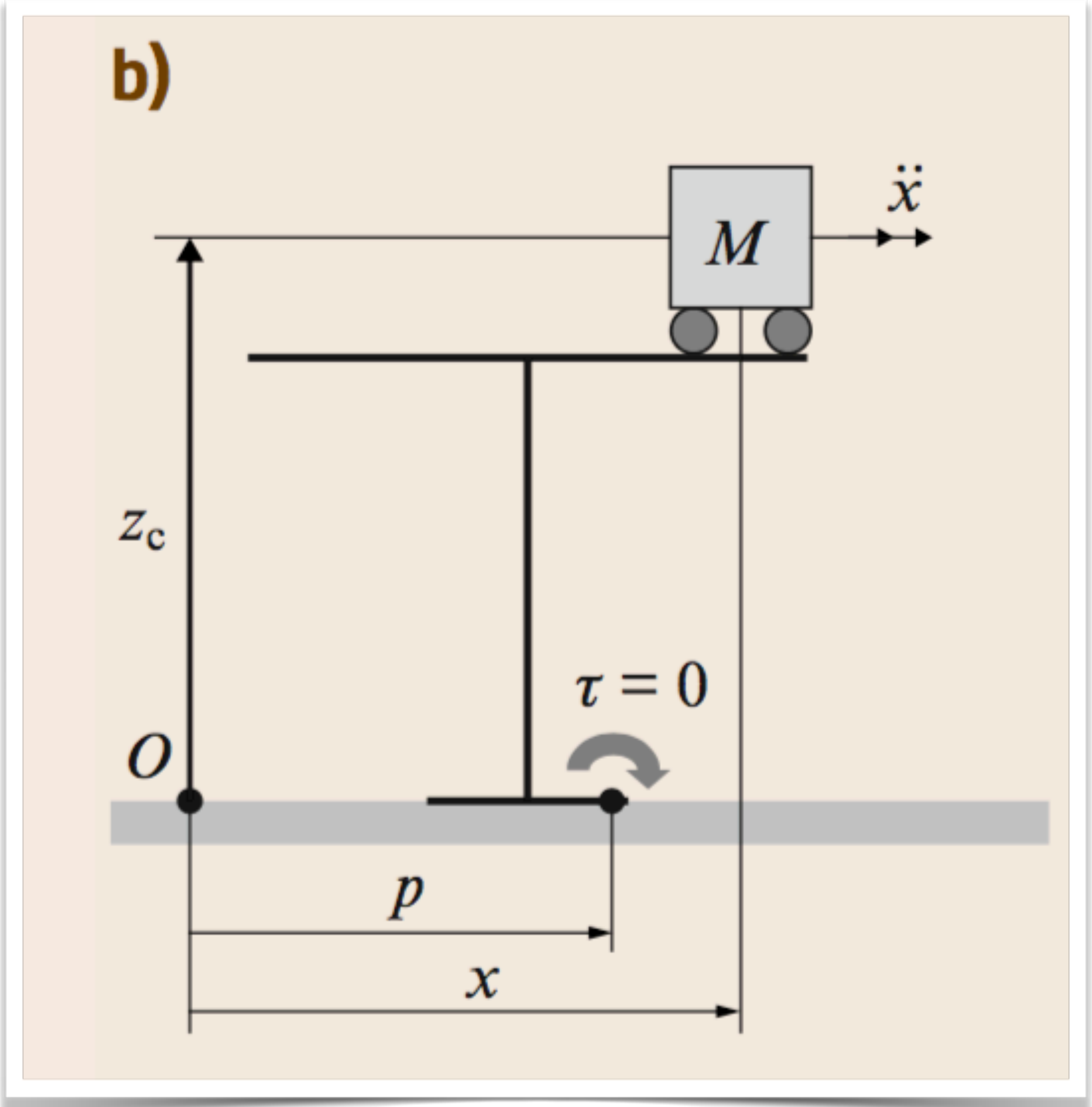


Computed ZMP

Aula passada…

$$p = x - \frac{z_c}{g}\ddot{x}$$

Para acelerações nulas, o **ZMP coincide** com a projeção do **CoM**

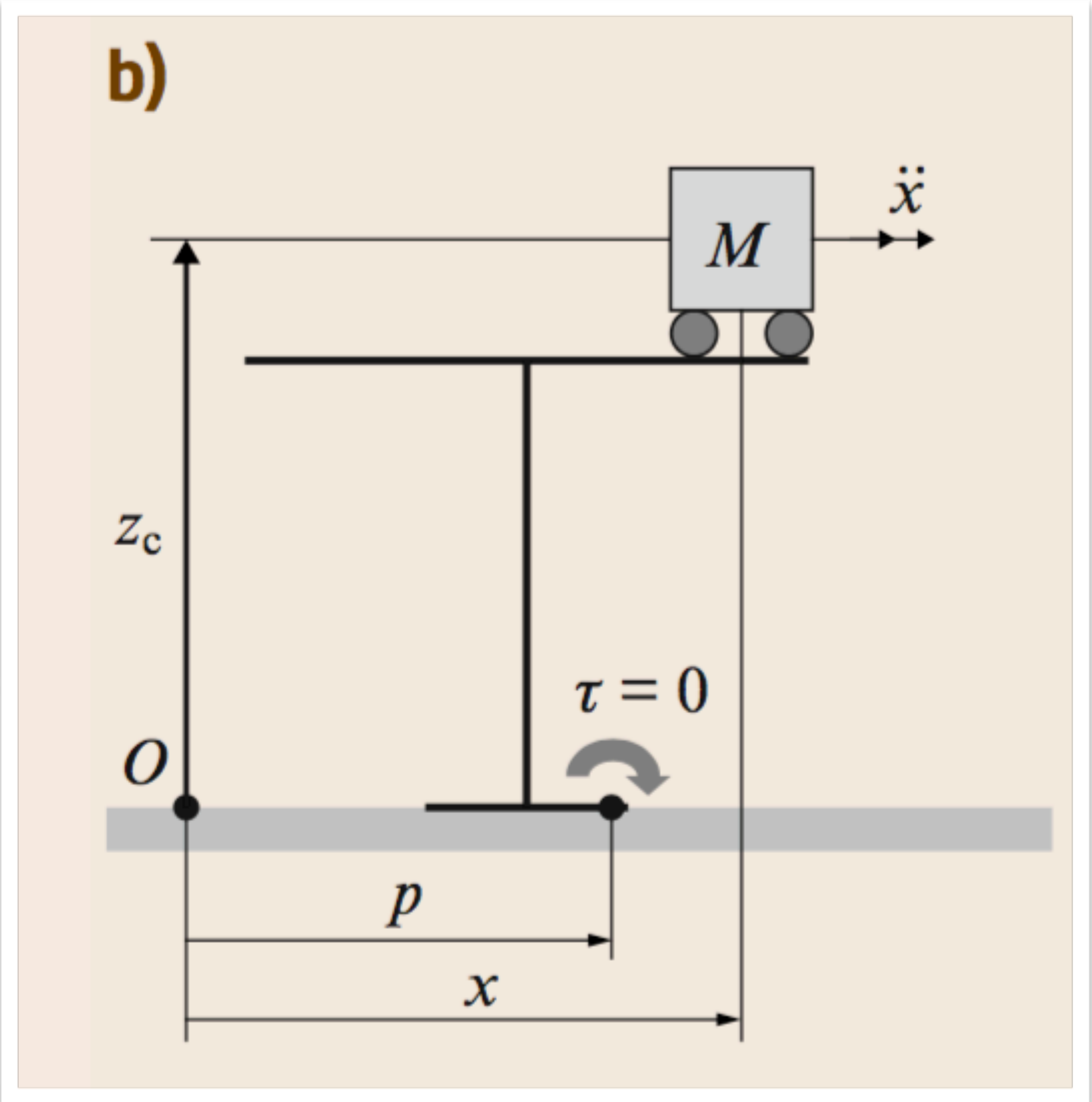


Computed ZMP

$$p = x - \frac{z_c}{g}\ddot{x}$$

Não é limitado pela base de suporte

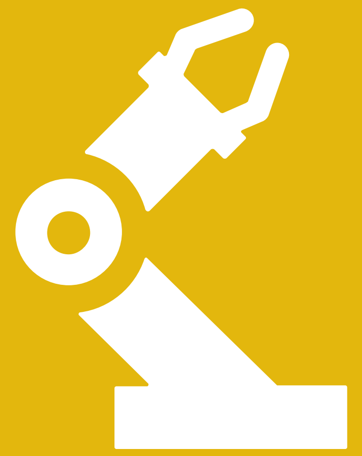
Caso o ZMP saia da área de suporte, ele é chamado '**Fictitious ZMP**' (FZMP) ou '**Foot Rotation Indicator**' (FRI)



Aula passada...


Boston Dynamics

Conteúdo



Cinemática

- Introdução e sistemas de coordenadas
- Cinemática e Jacobiano

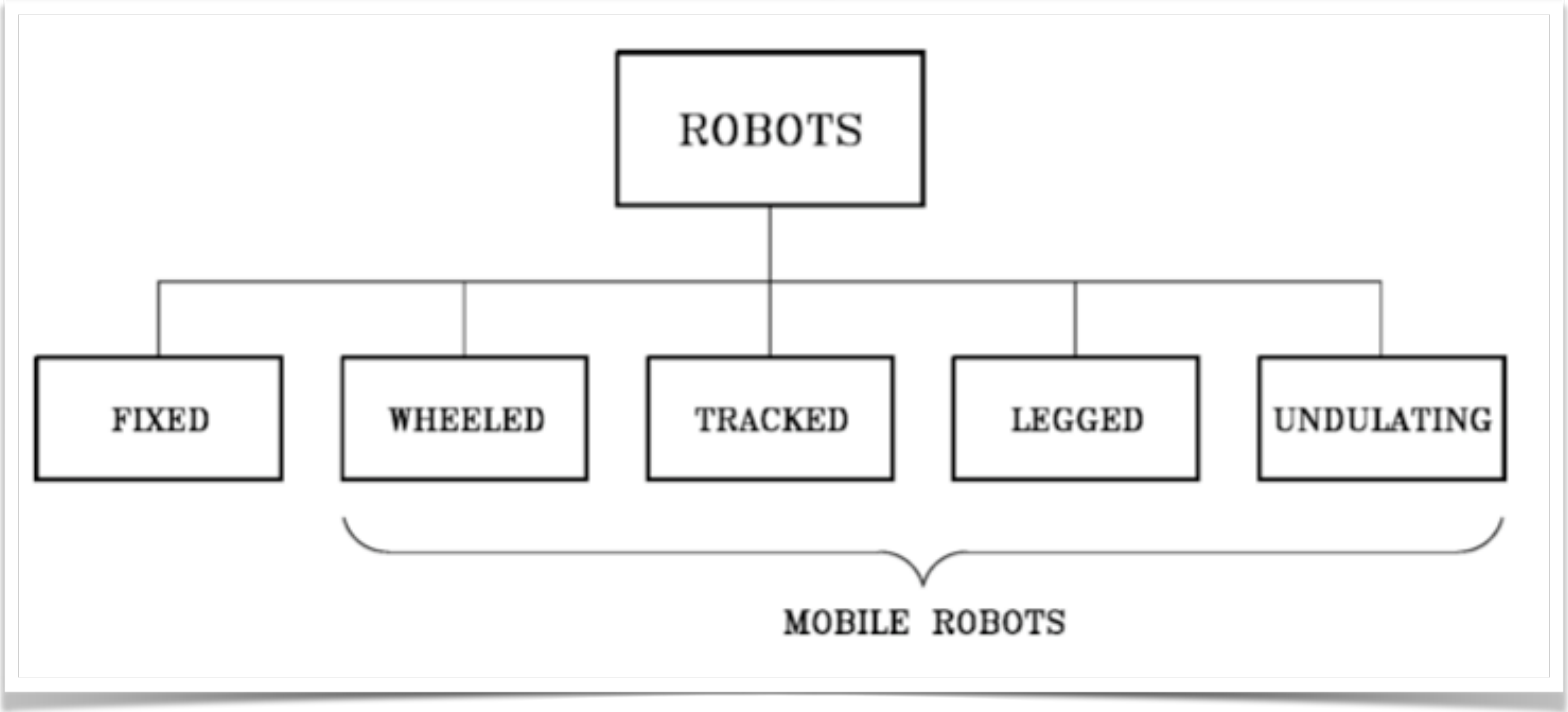
Dinâmica

- Segunda lei de Newton
- Newton-Euler
- Corpos articulados

Conclusão

- Bibliografia

Classes de robôs

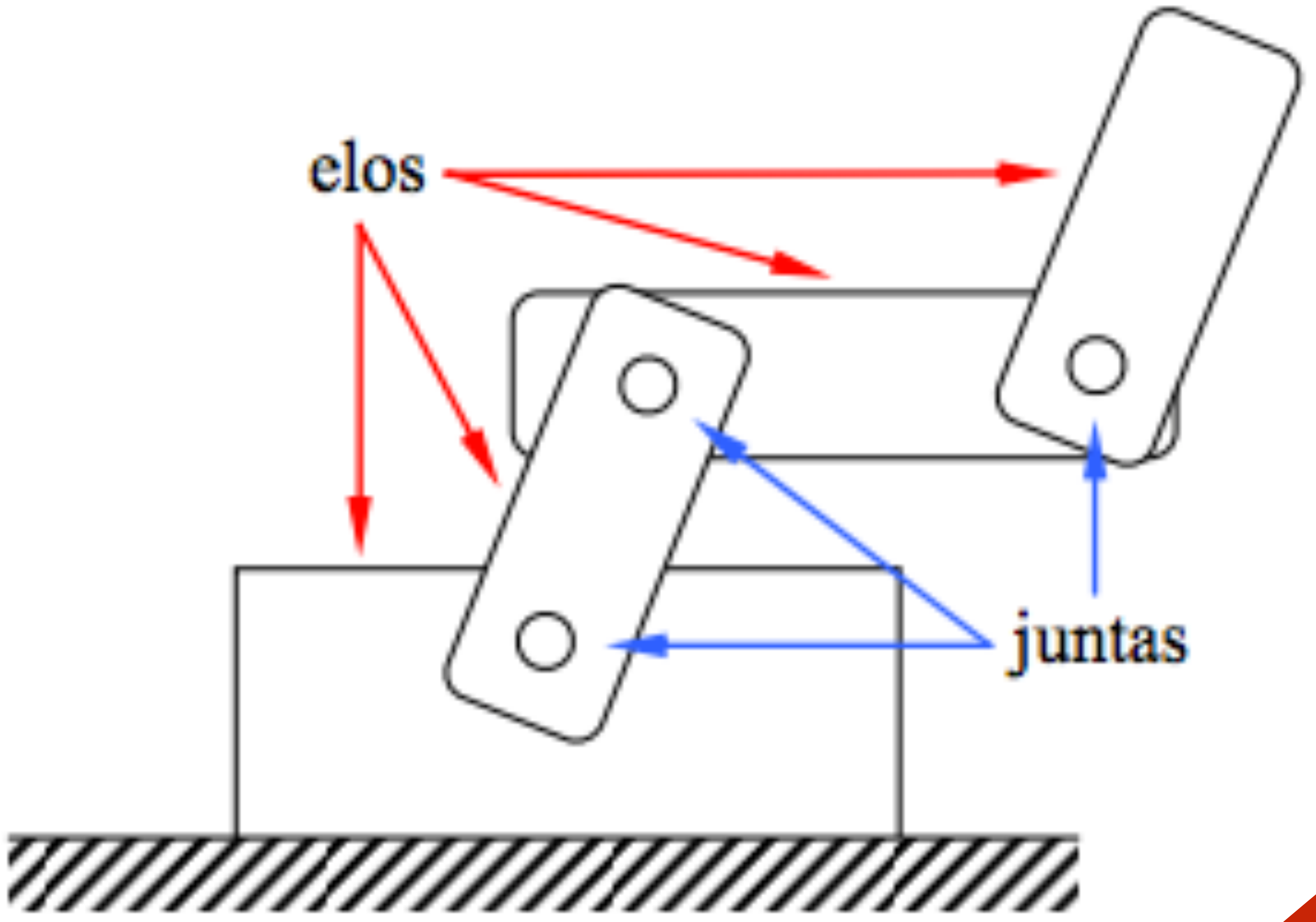


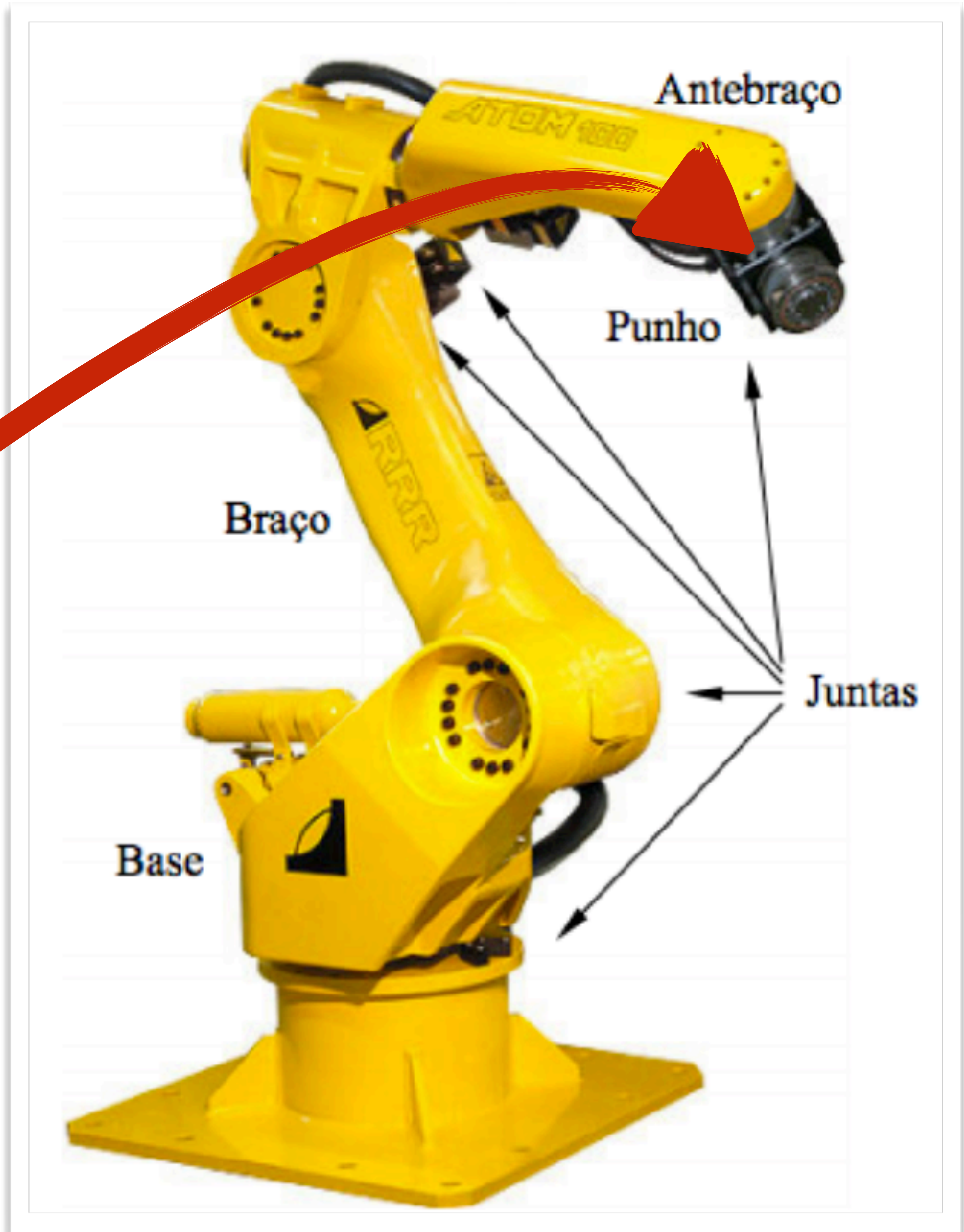
O que é um robô?

são corpos rígidos* conectados por juntas

*A menos que se diga o contrário

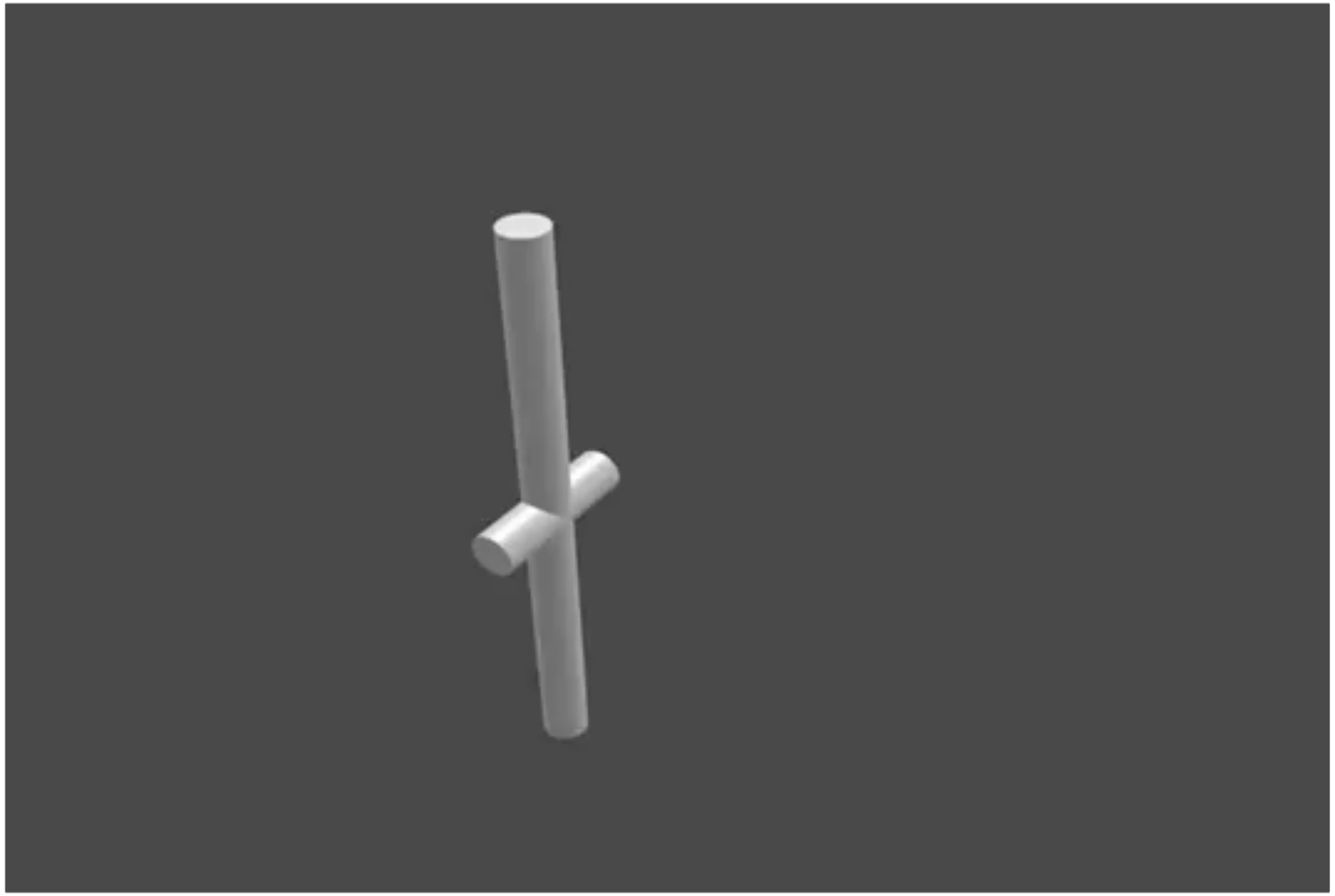
Anatomia mecânica





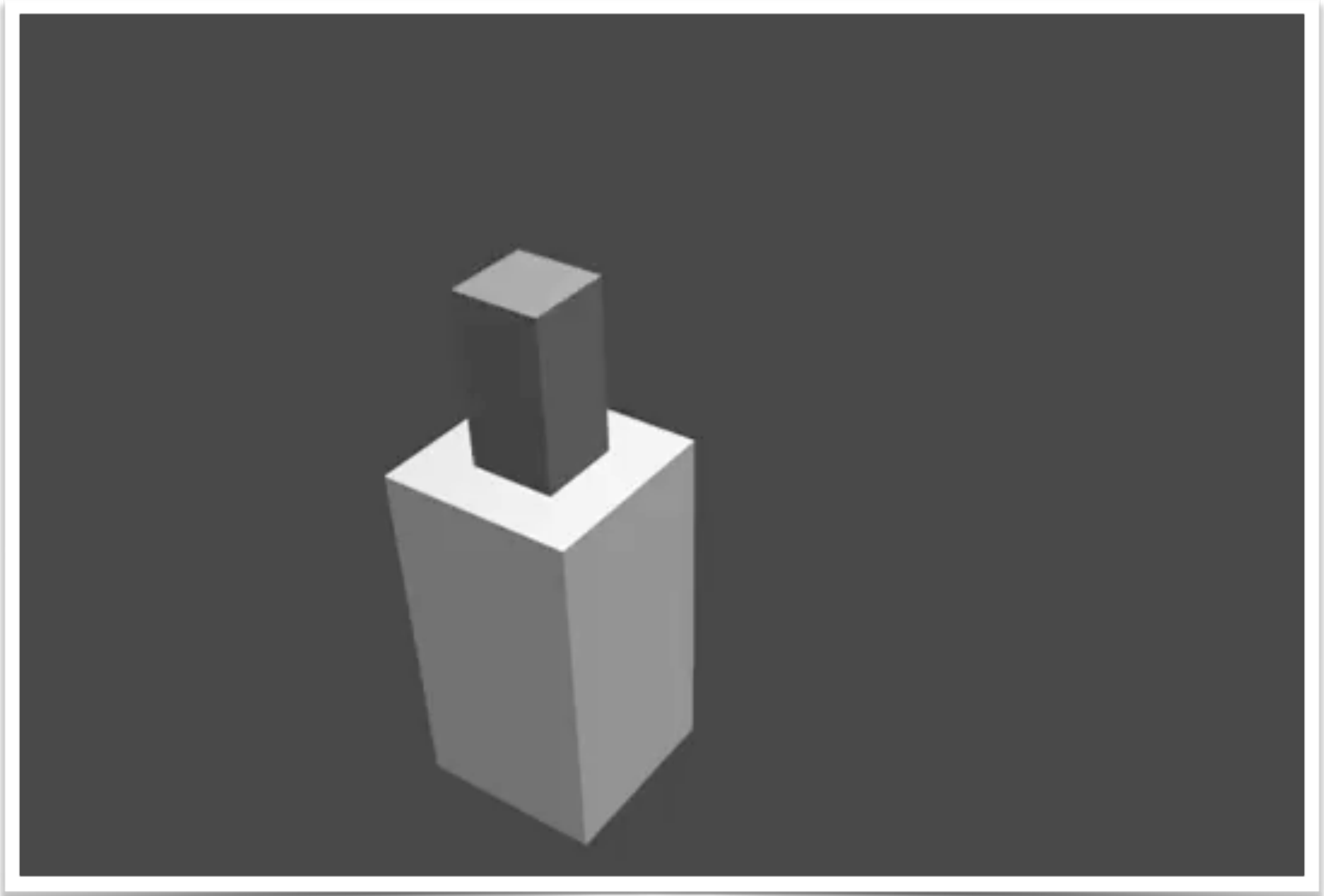
Órgão terminal

Tipos de juntas



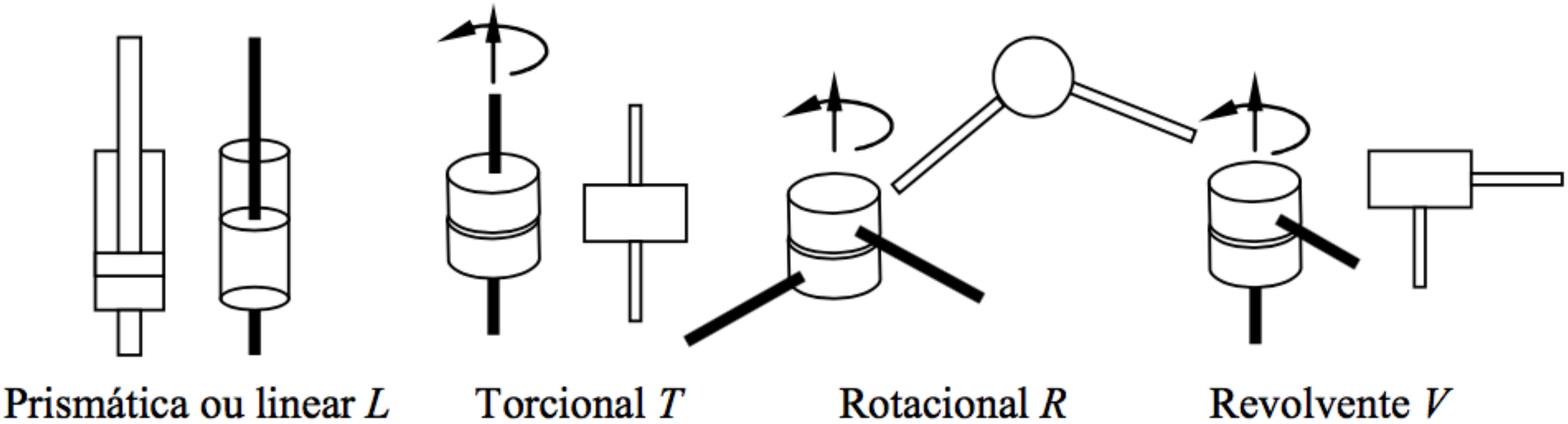
Rotacional

Tipos de juntas



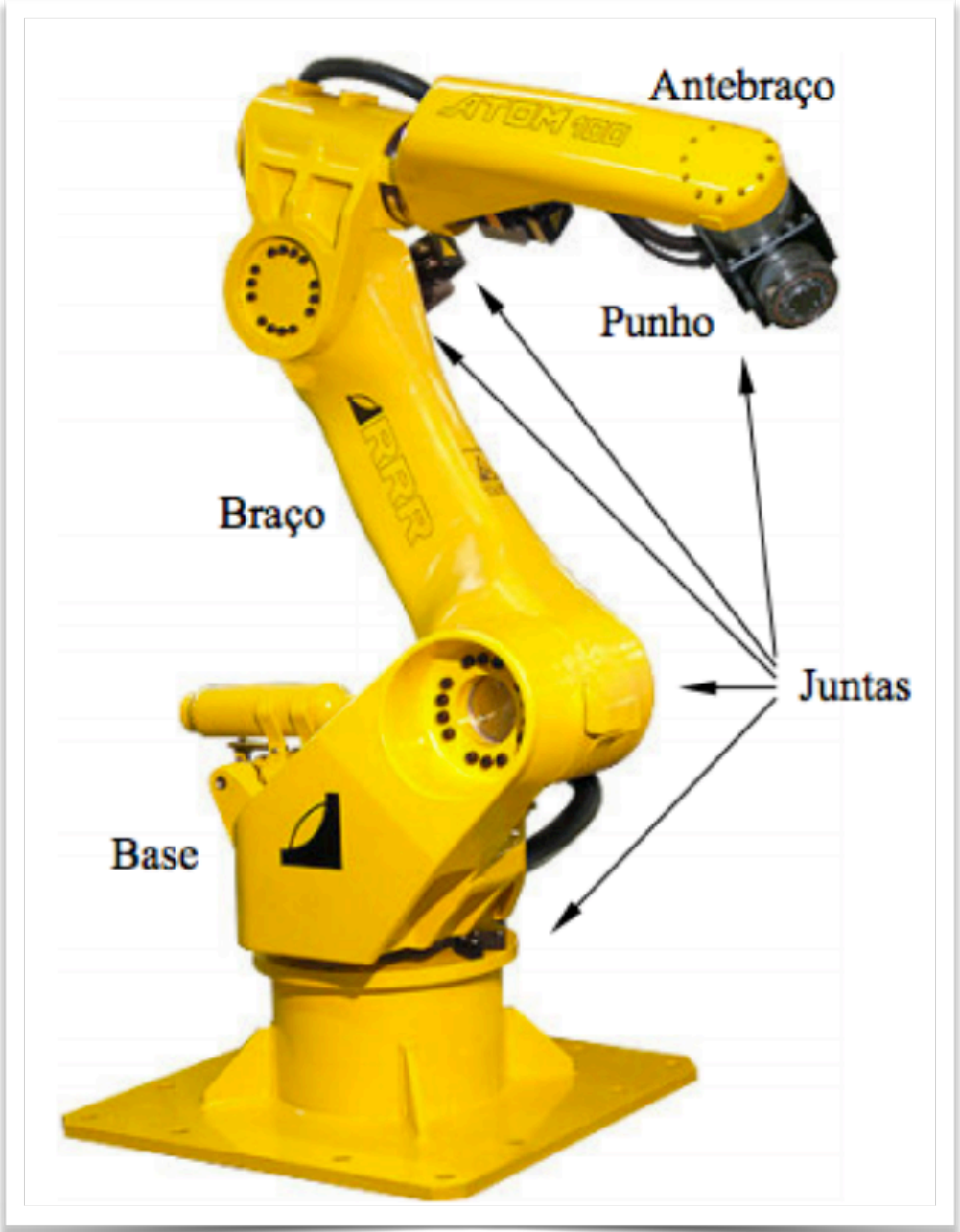
Prismática ou linear

Tipos de juntas

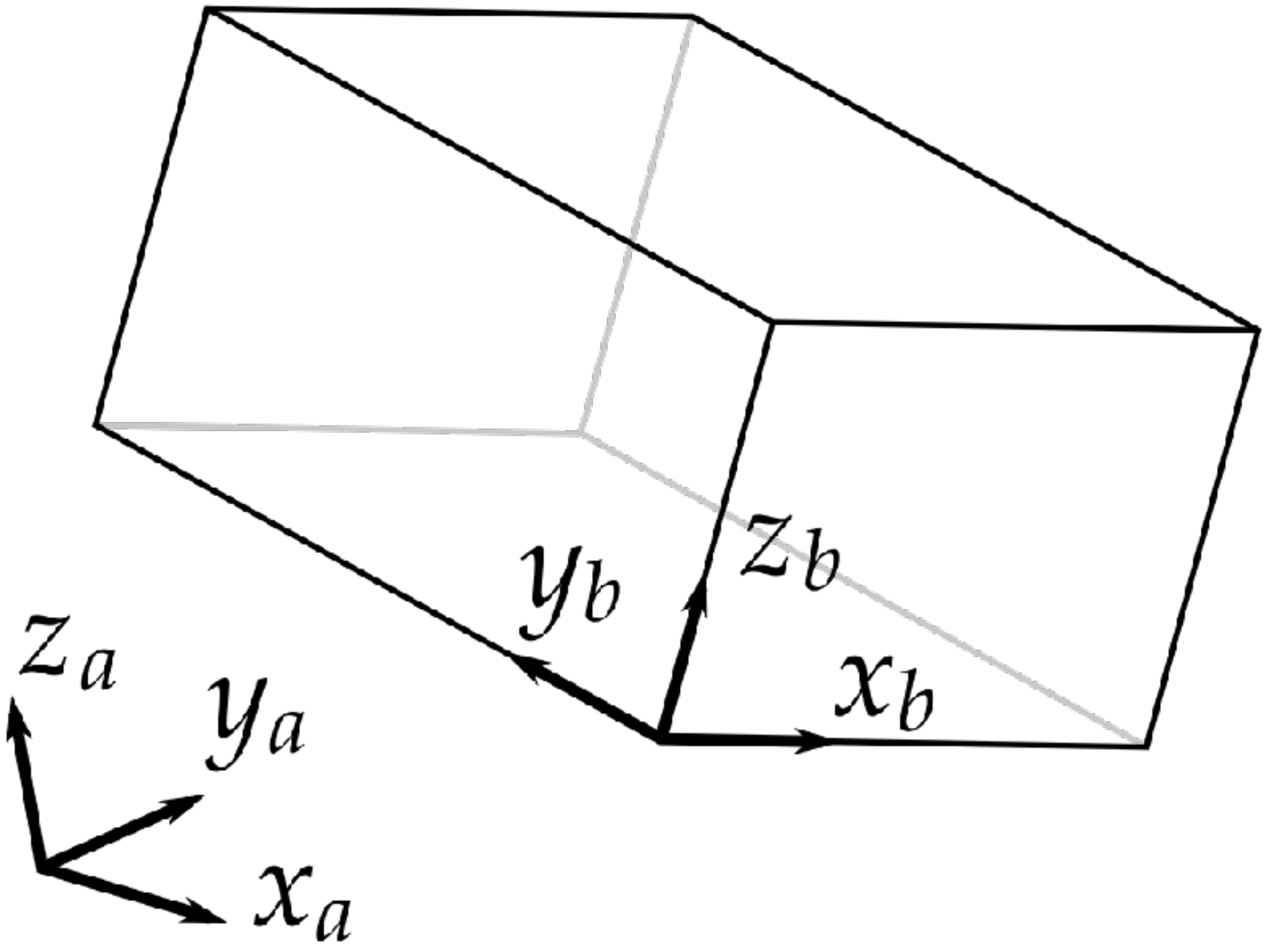


Graus de liberdade

Quantidade de movimentos relativos possíveis



Graus de liberdade

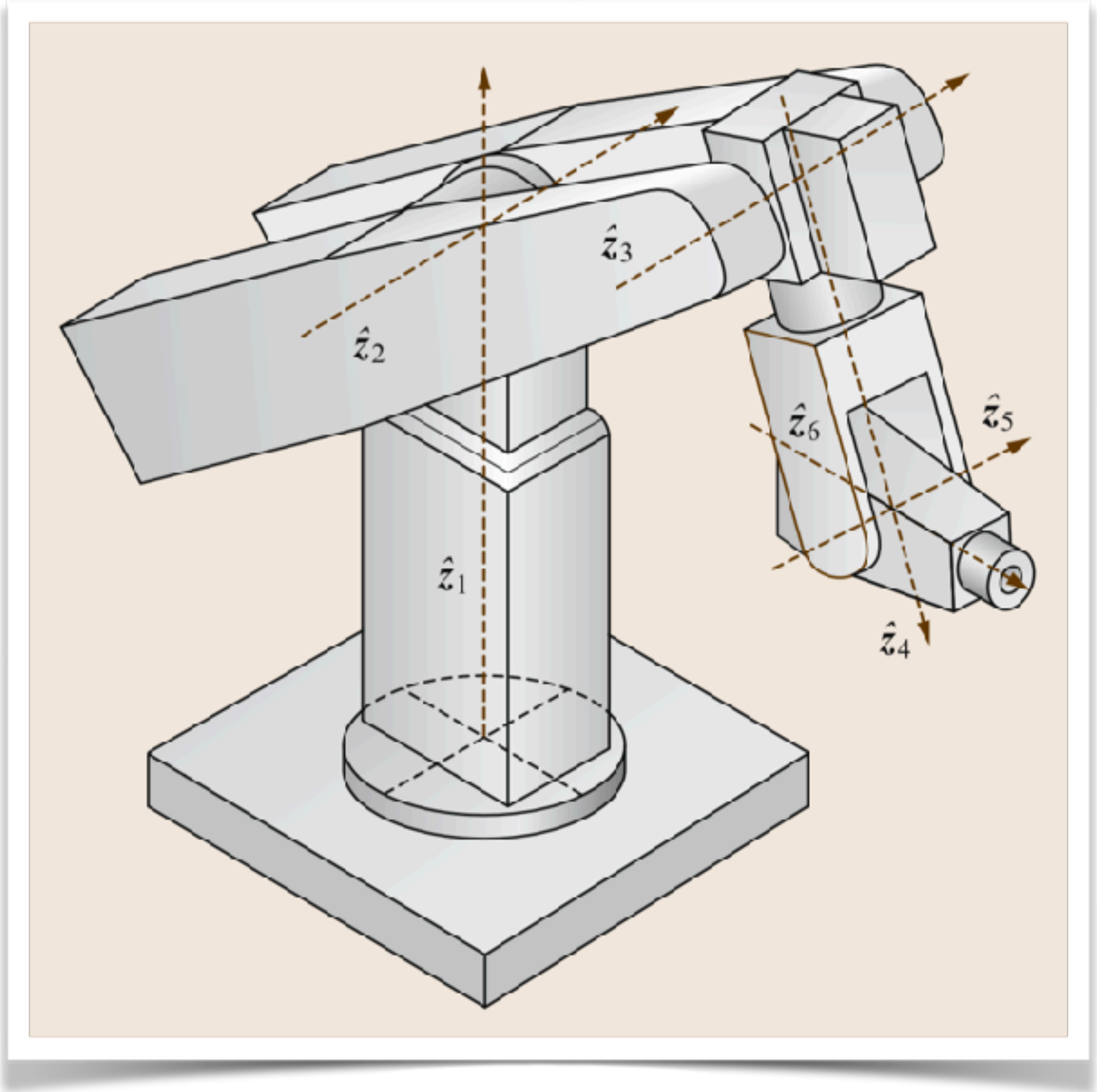


$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\phi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

6 DOF

Graus de liberdade



$$n = (n_b \times 6) - c_j$$

Sistema de coordenadas com n DOFs:

Coordenadas mínimas

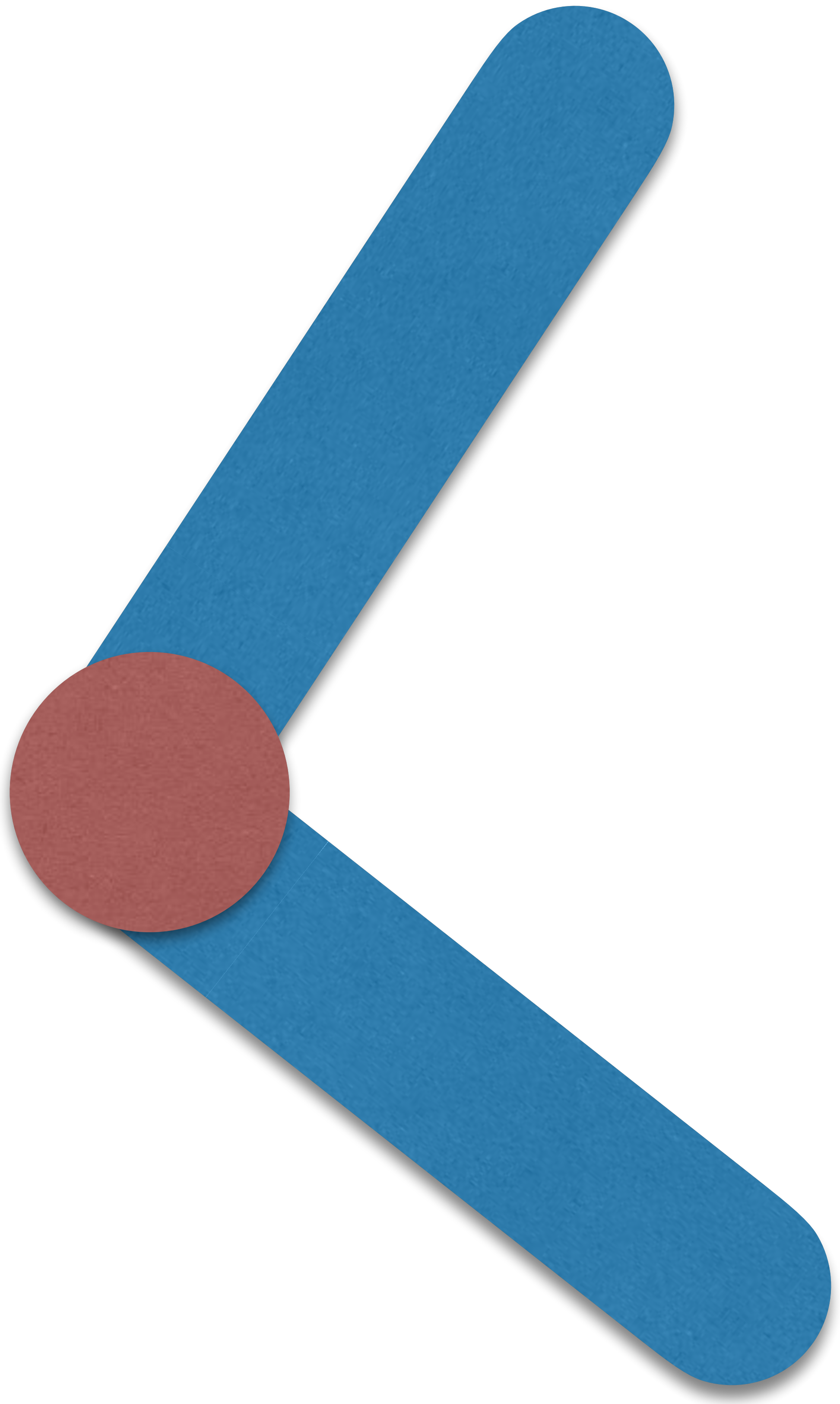
Cada junta prismática ou rotacional adiciona:

$$c_j = 5$$

$$n_j = (n_b - 1)$$

$$n = ((n_j + 1) \times 6) - (5 \times n_j) = n_j + 6$$

Graus de liberdade

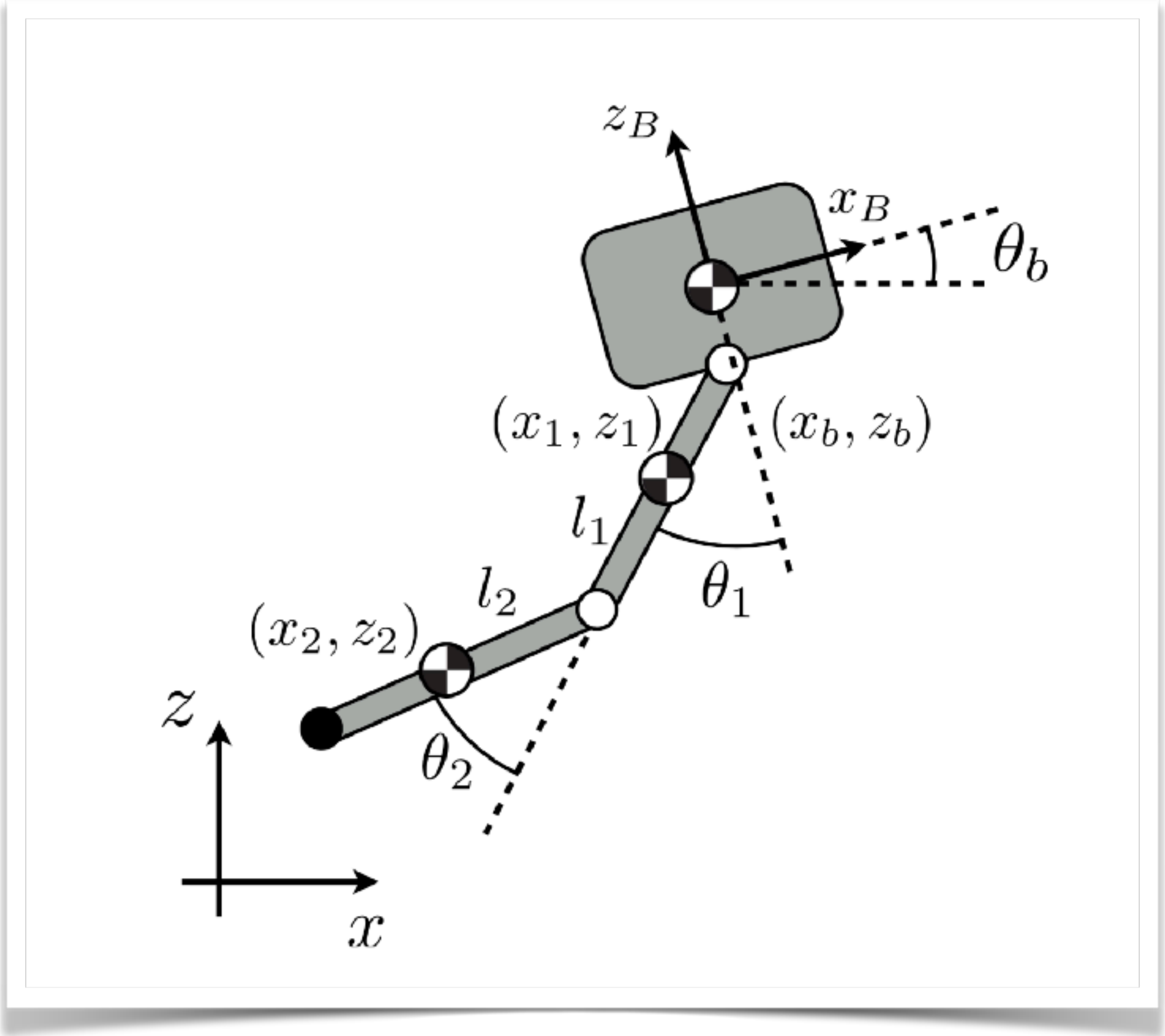


Um sistema de corpos rígidos articulados **pode ser** totalmente **descrito com**

$$n_j + 6$$ variáveis

Descrever um sistema de *coordenadas mínimas* **pro "robô" de 2 elos ao lado**

Sistemas de coordenada

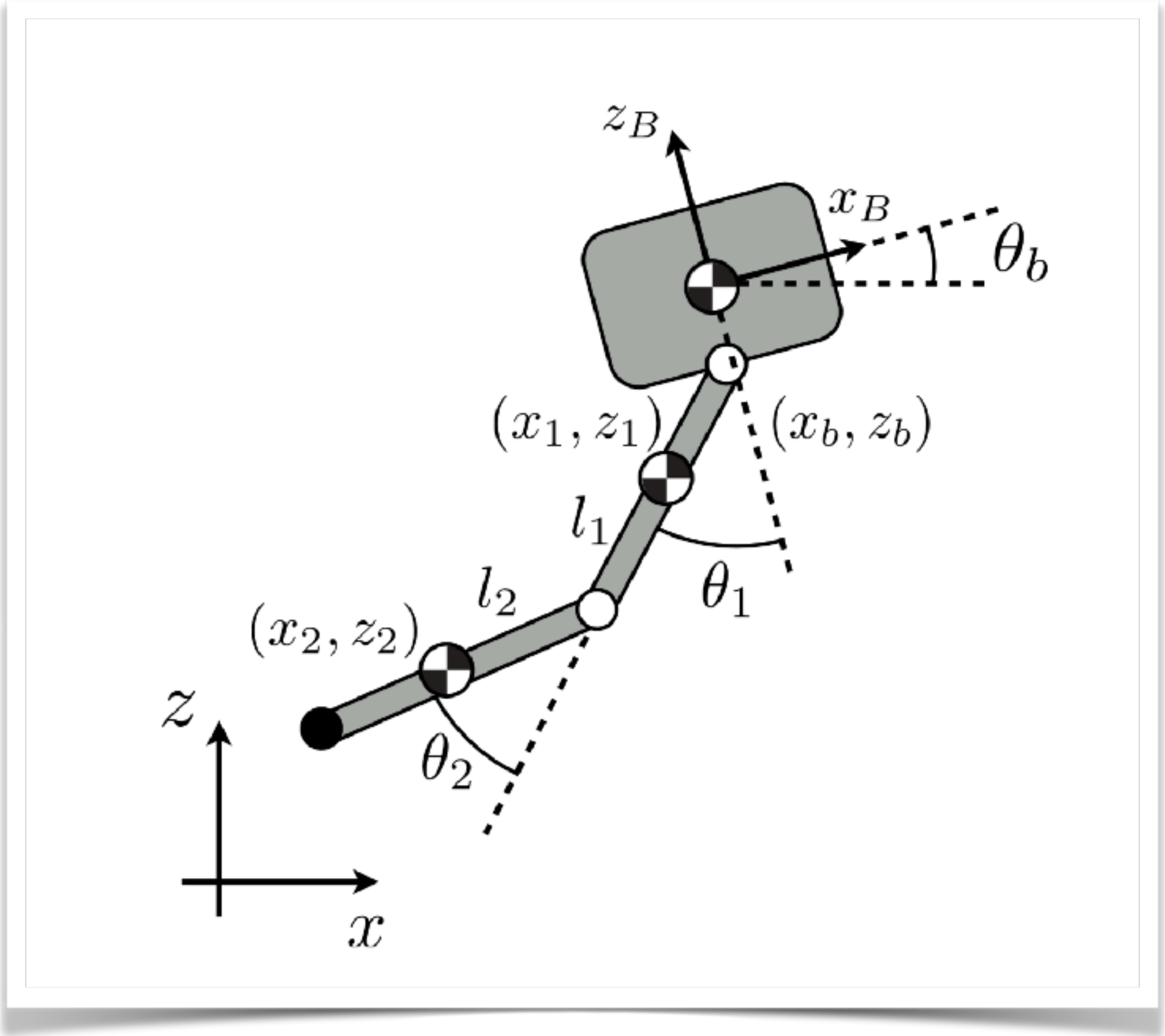


Inercial: representa o ambiente, não se move.

Base: geralmente fixo no maior ou mais pesado link

Juntas: fixo no link anterior da cadeia cinemática

Sistemas de coordenada



Posição do robô utilizando somente **sistema de coordenada inercial:**

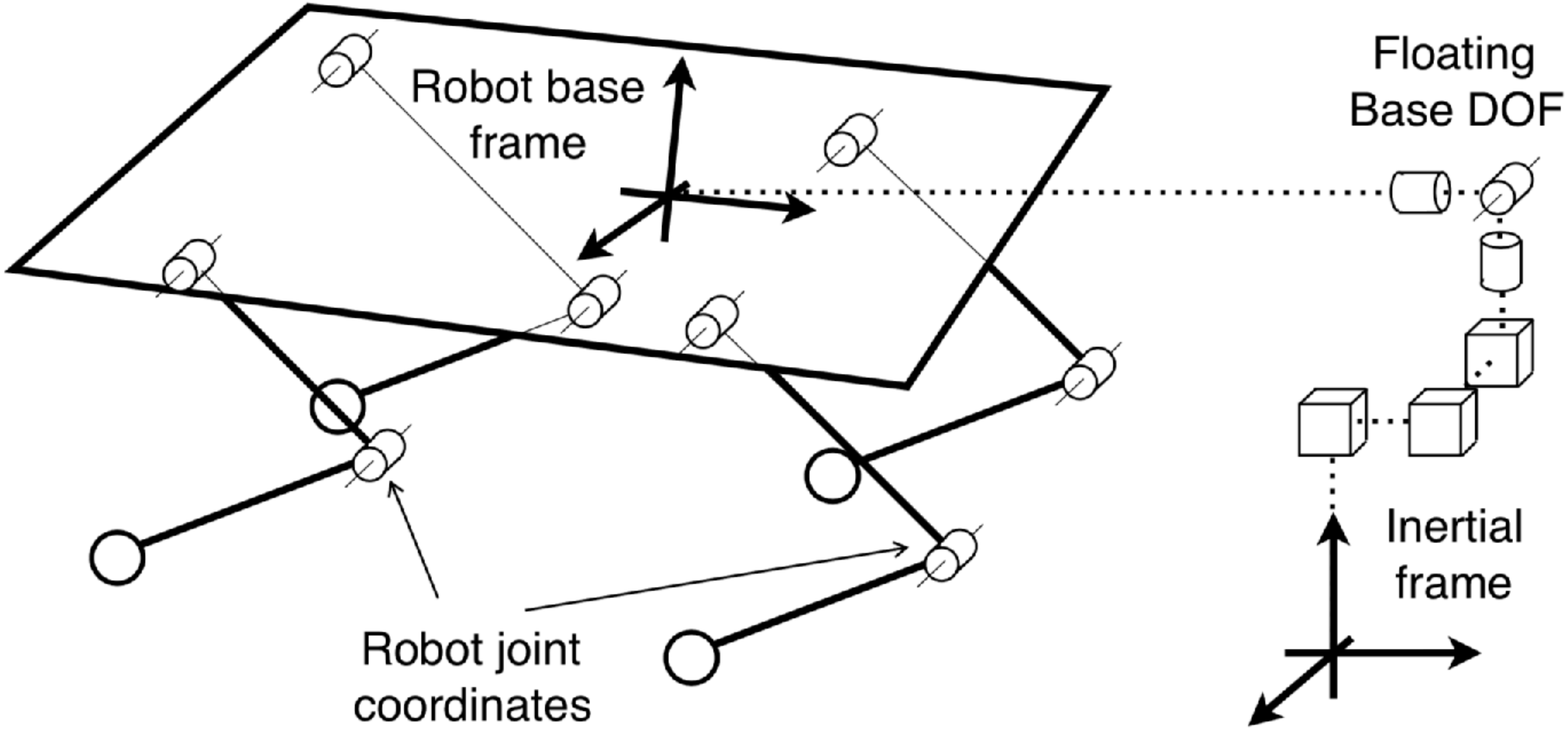
$$x_b, z_b, \theta_b, x_1, z_1, x_2, z_2$$

Usando o **sistema de coordenadas das juntas** para os elos:

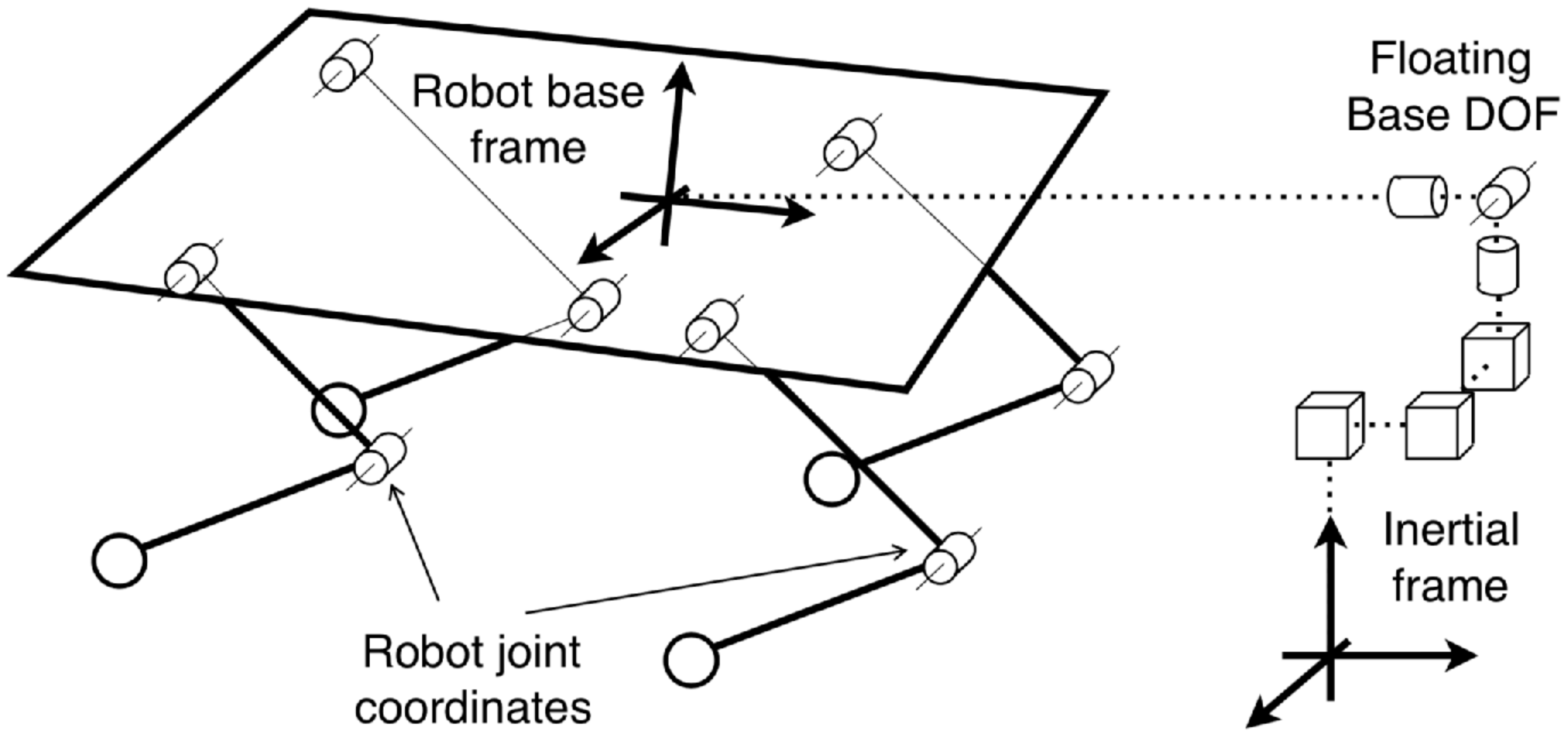
$$x_b, z_b, \theta_b, \theta_1, \theta_2$$

Coordenadas mínimas!

Sistemas de coordenada



Sistemas de coordenada



$$\mathbf{q} = [\mathbf{x_b} \quad \mathbf{q_j}]^T$$

Onde:

$$\mathbf{x_b} = [x, y, z, \alpha, \beta, \gamma]^T,$$

$$\mathbf{q_j} = [\theta_1, \ldots, \theta_{n_j}]^T$$

Conteúdo

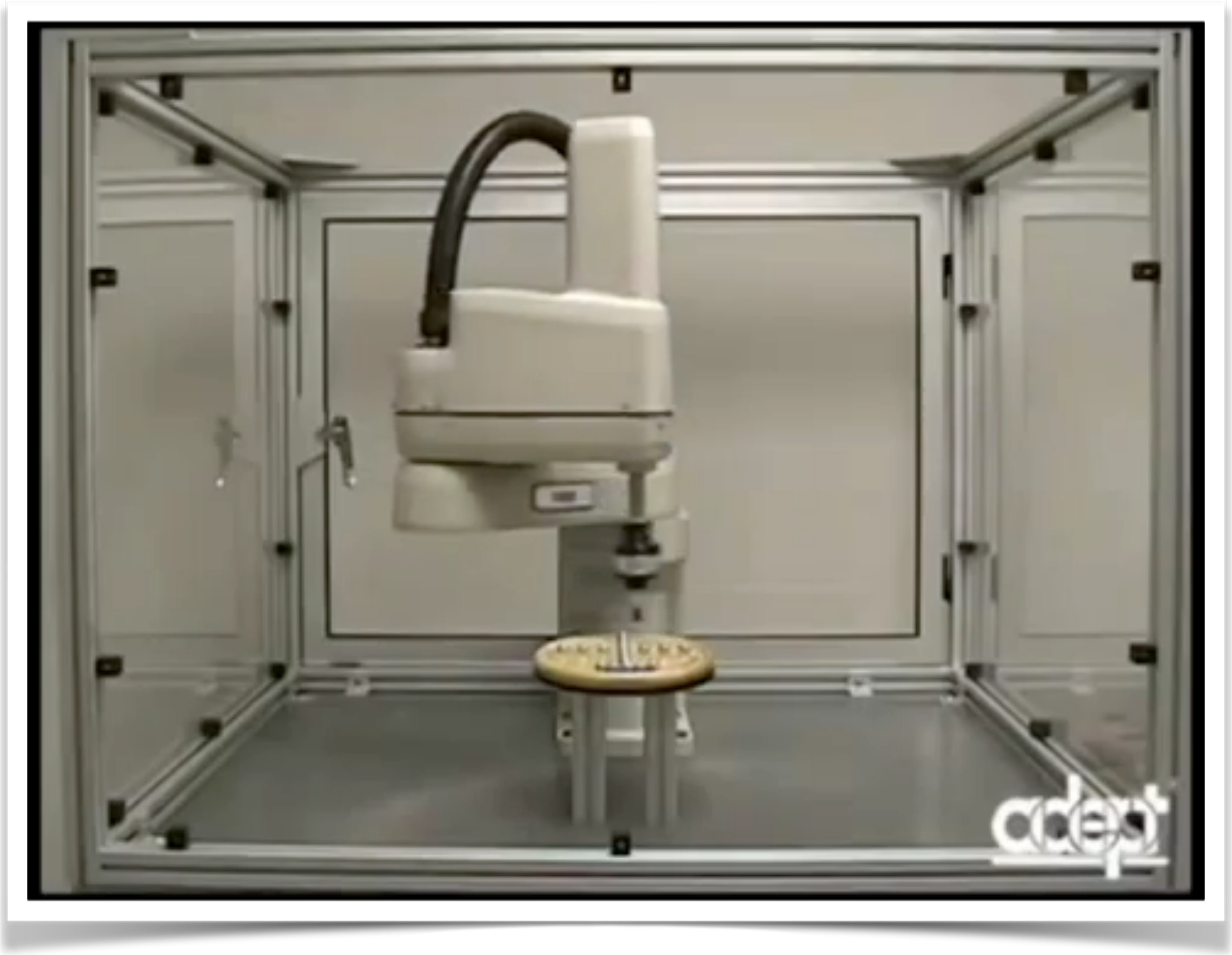
Cinemática

- Introdução e sistemas de coordenadas
- Cinemática e Jacobiano

Dinâmica

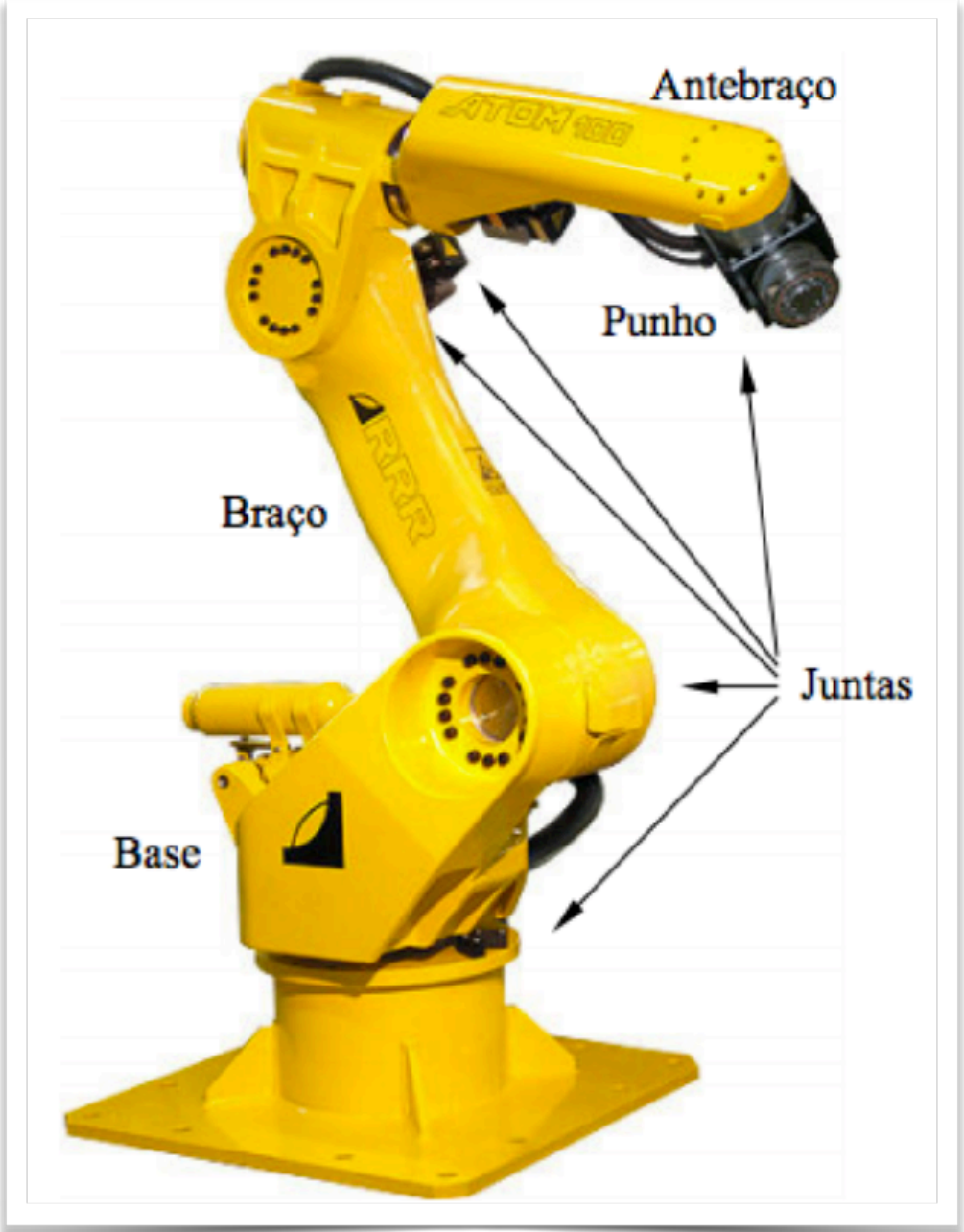
Conclusão

O que é cinemática?



Descreve **como** as coisas se movem, mas não o **porquê**!

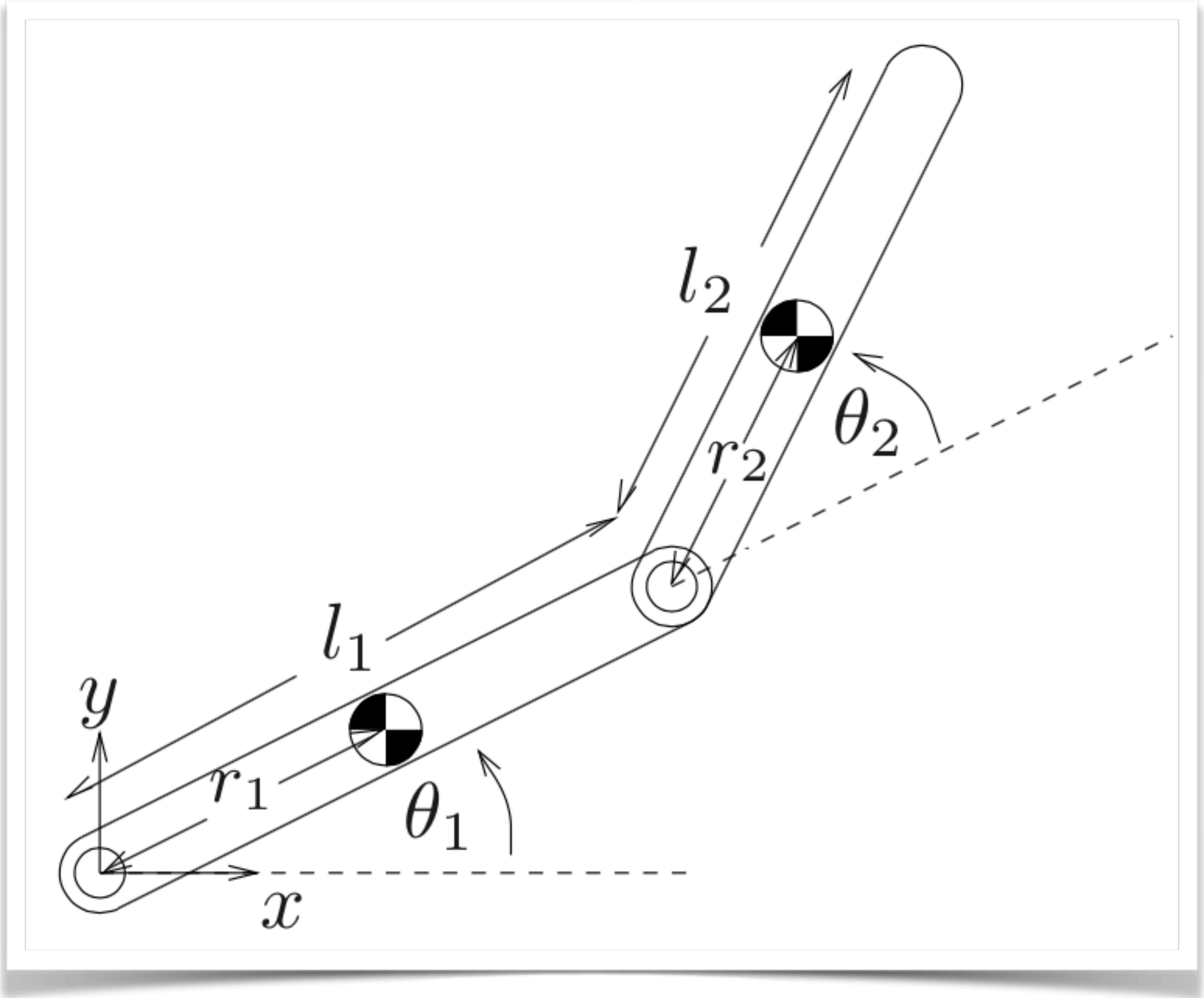
Espaços de representação



Espaço das juntas

Espaço de tarefas/operacional

Cinemática direta



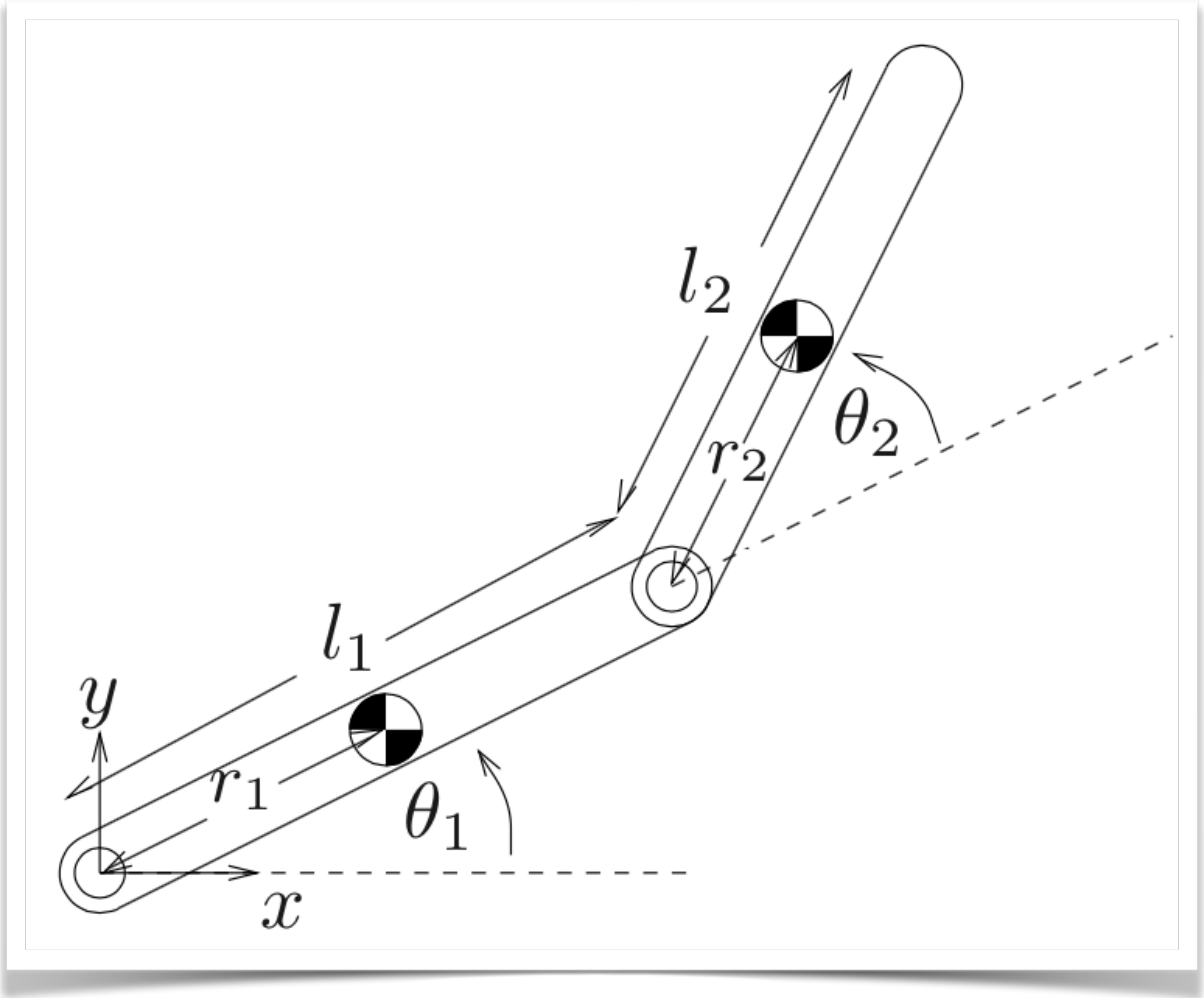
Dada a posição das **juntas**:

$$\mathbf{q_j} = [\theta_1, \ldots, \theta_{n_j}]^T$$

Determinar a posição do **efetuador**:

$$\mathbf{x} = [x, y, z]^T$$

Cinemática Inversa



Dada a posição do **efetuador**:

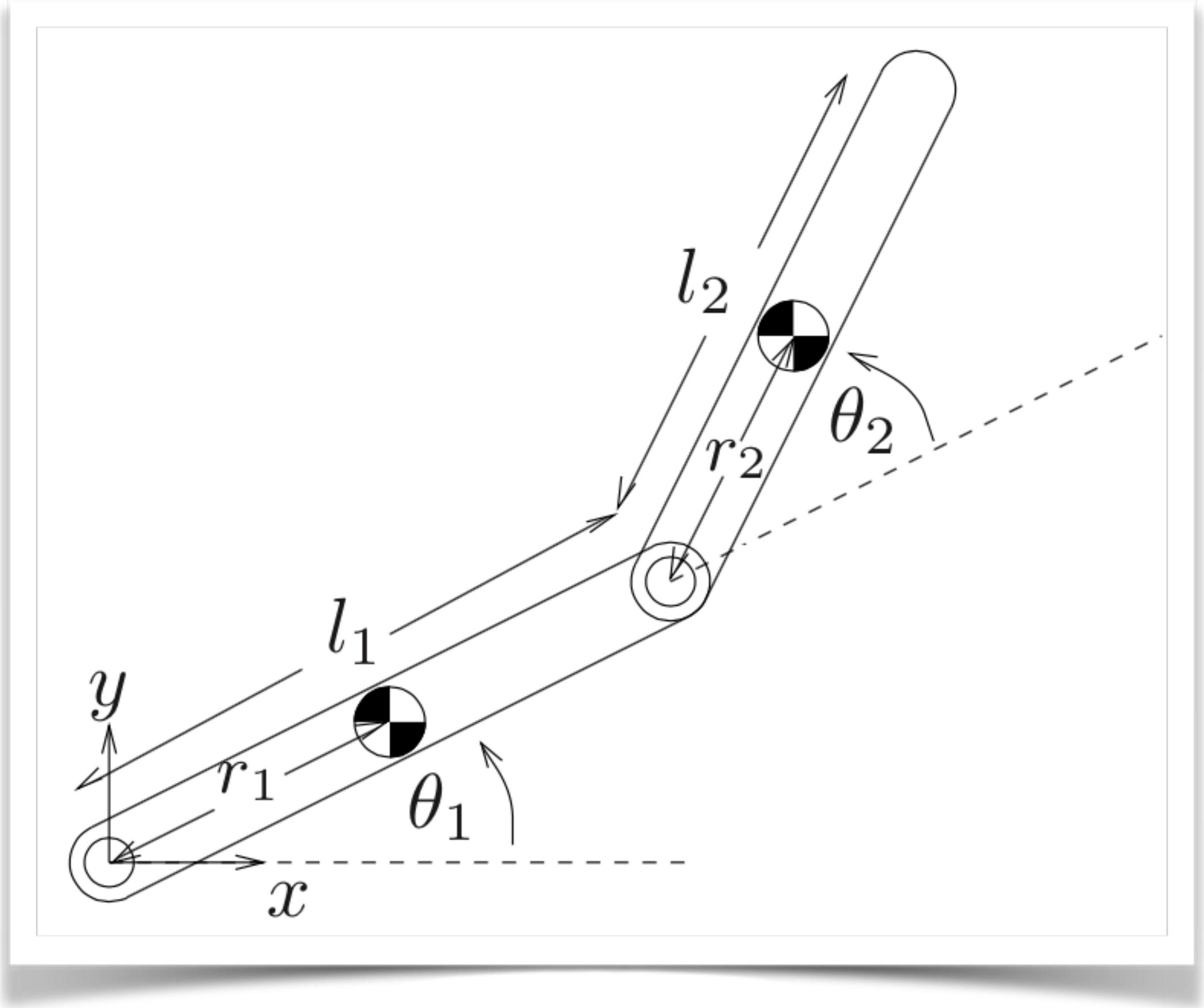
$$\mathbf{x} = [x, y, z]^T$$

Determinar a posição das **juntas**:

$$\mathbf{q_j} = [\theta_1, \ldots, \theta_{n_j}]^T$$

Jacobiano

Relaciona velocidades e forças dos espaços de **juntas** e **tarefas**



Relação geométrica:

$$\mathbf{x} = T(\mathbf{q})$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{dT(\mathbf{q})}{dt} = \frac{\partial T(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{q}}\,\dot{\mathbf{q}}$$

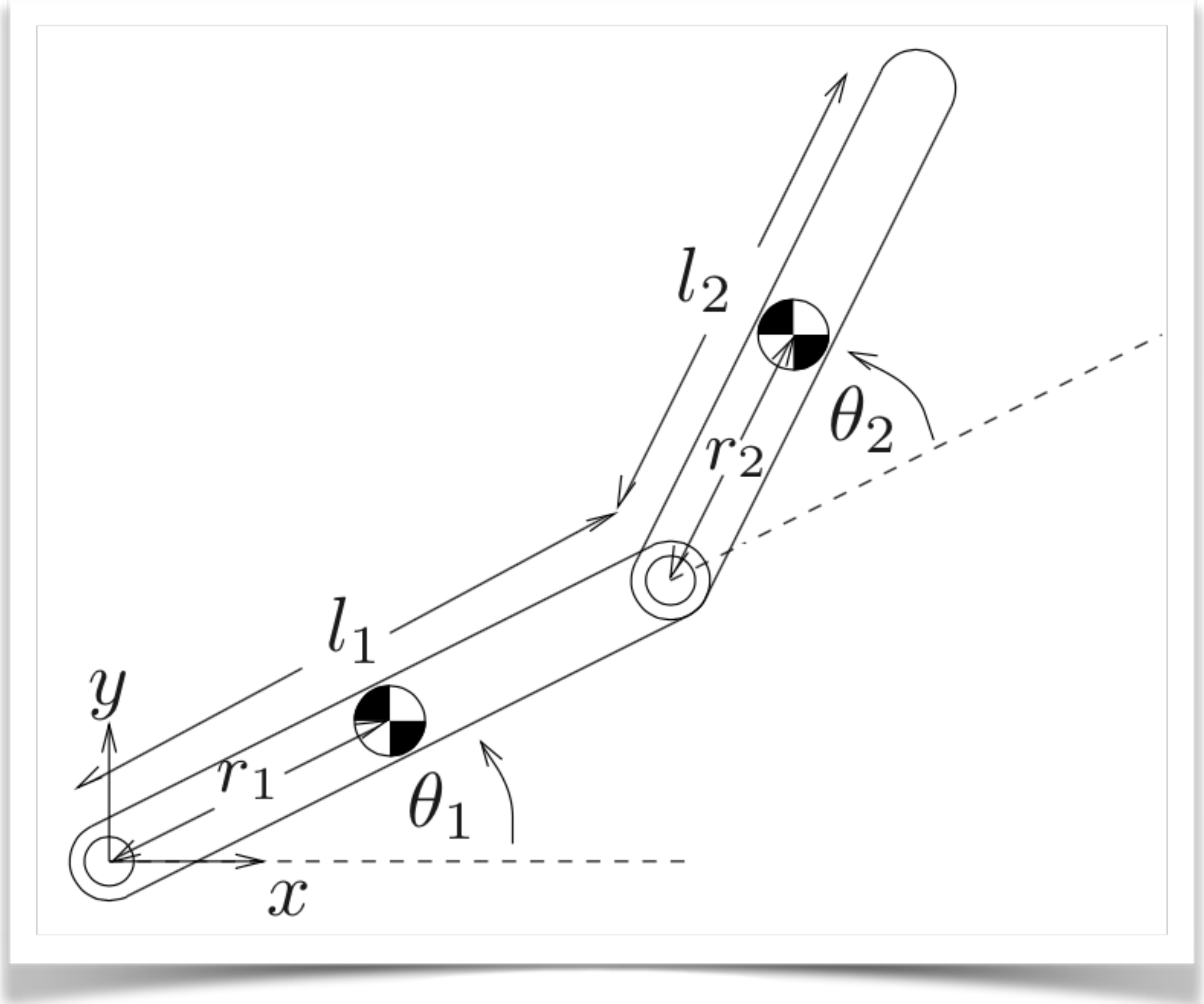
Exemplo Jacobiano

Cinemática

Dinâmica

Conclusão

$$\mathbf{J} = \frac{\delta \mathbf{x}}{\delta \mathbf{q}}$$



Jacobiano

Principio do trabalho virtual:

$$\mathbf{f}^T \delta \mathbf{x} = \boldsymbol{\tau}^T \delta \mathbf{q}$$

$$\mathbf{J} = \frac{\delta \mathbf{x}}{\delta \mathbf{q}}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{f}$$

Conteúdo

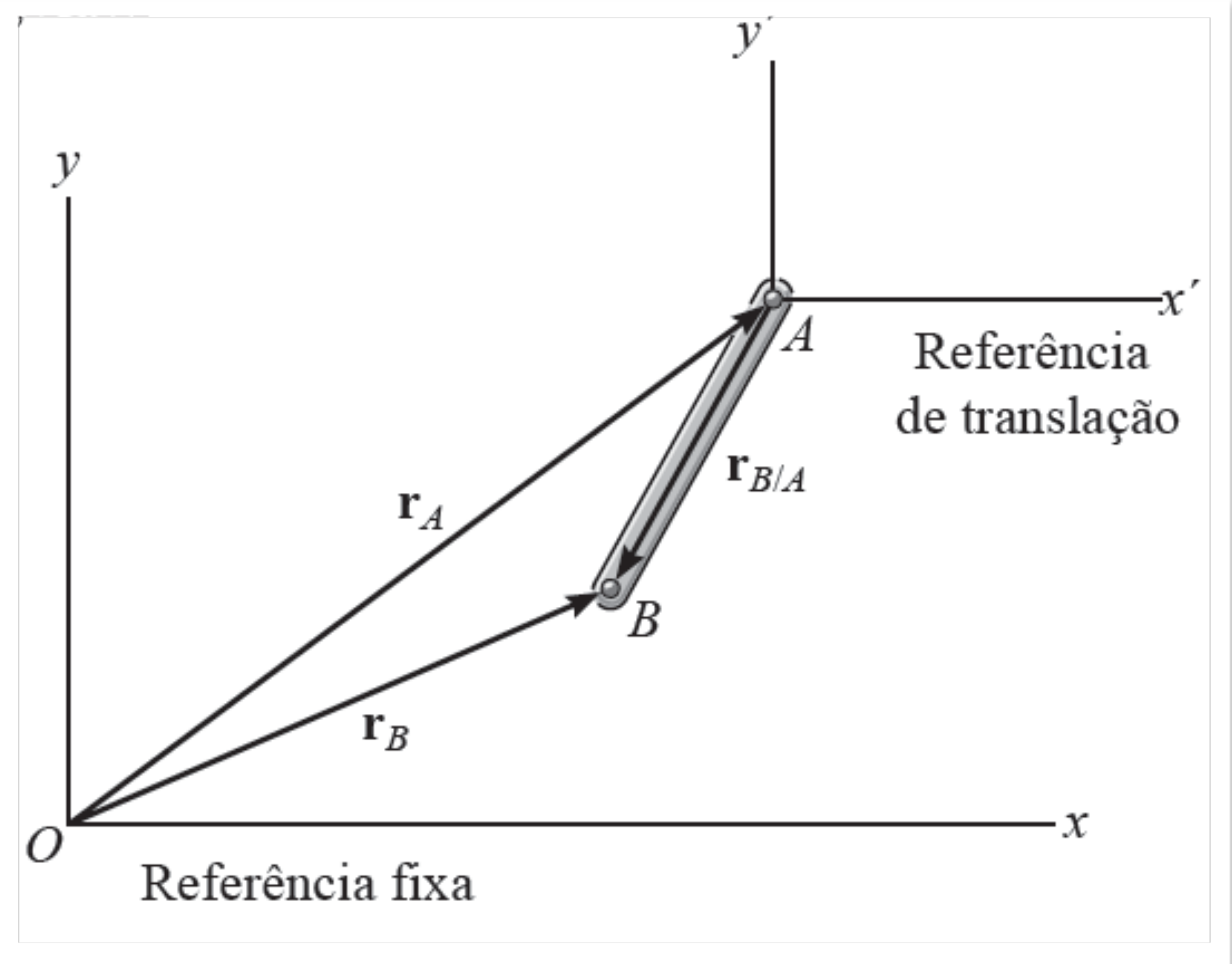
- Introdução e sistemas de coordenadas
- Cinemática e Jacobiano

Cinemática

Dinâmica

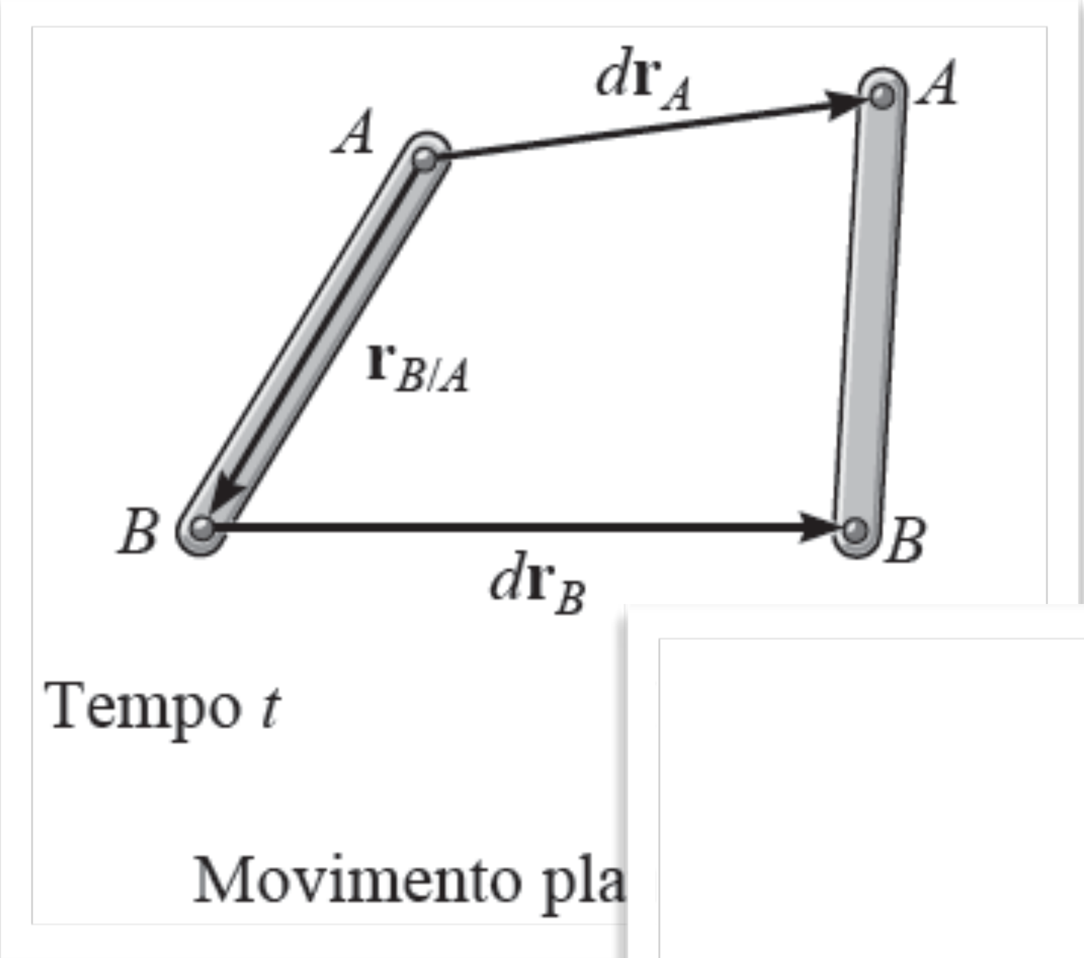
Conclusão

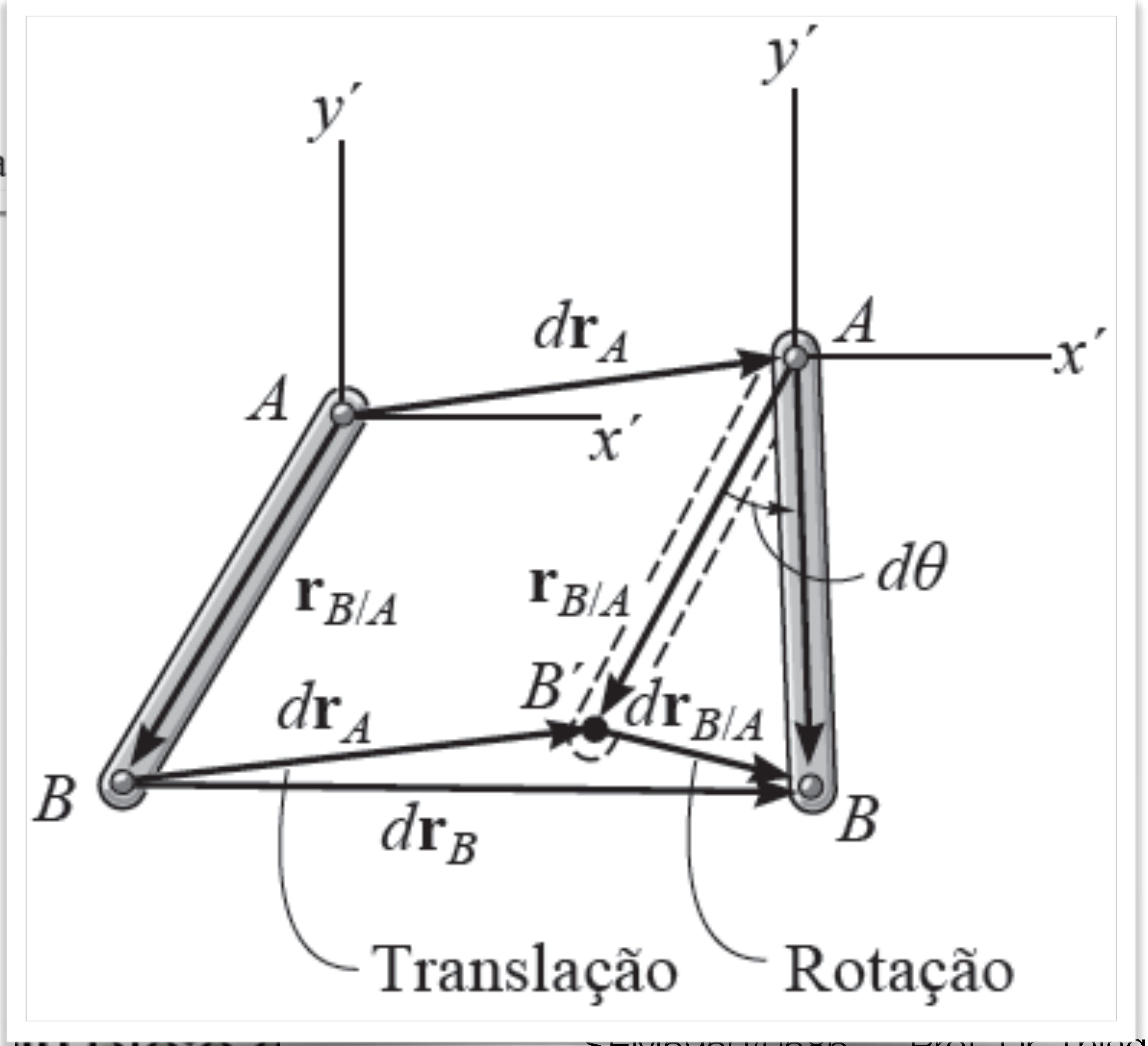
Posição relativa



$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

Velocidade relativa





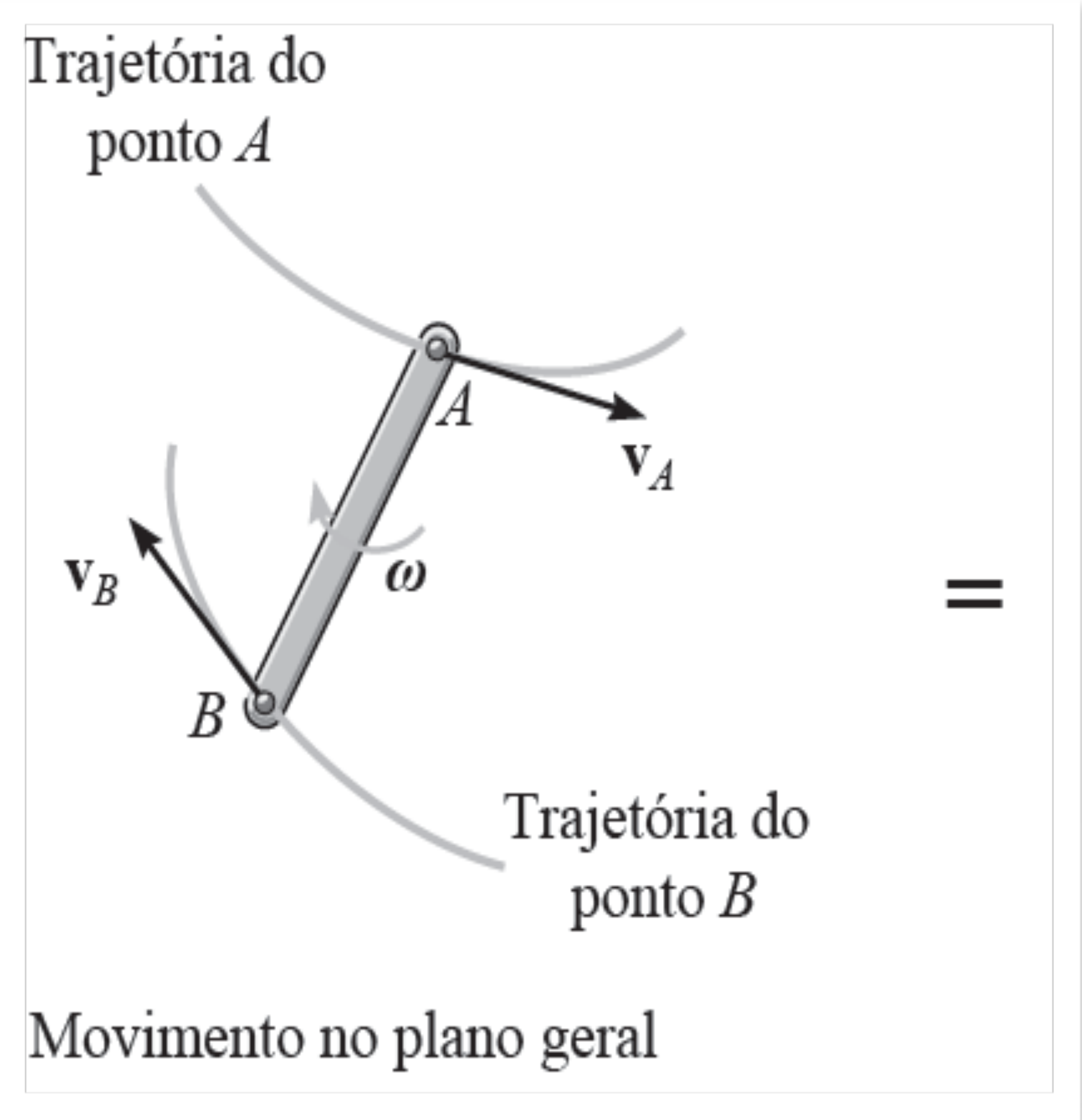
$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\Big\downarrow \frac{d}{dt}$$

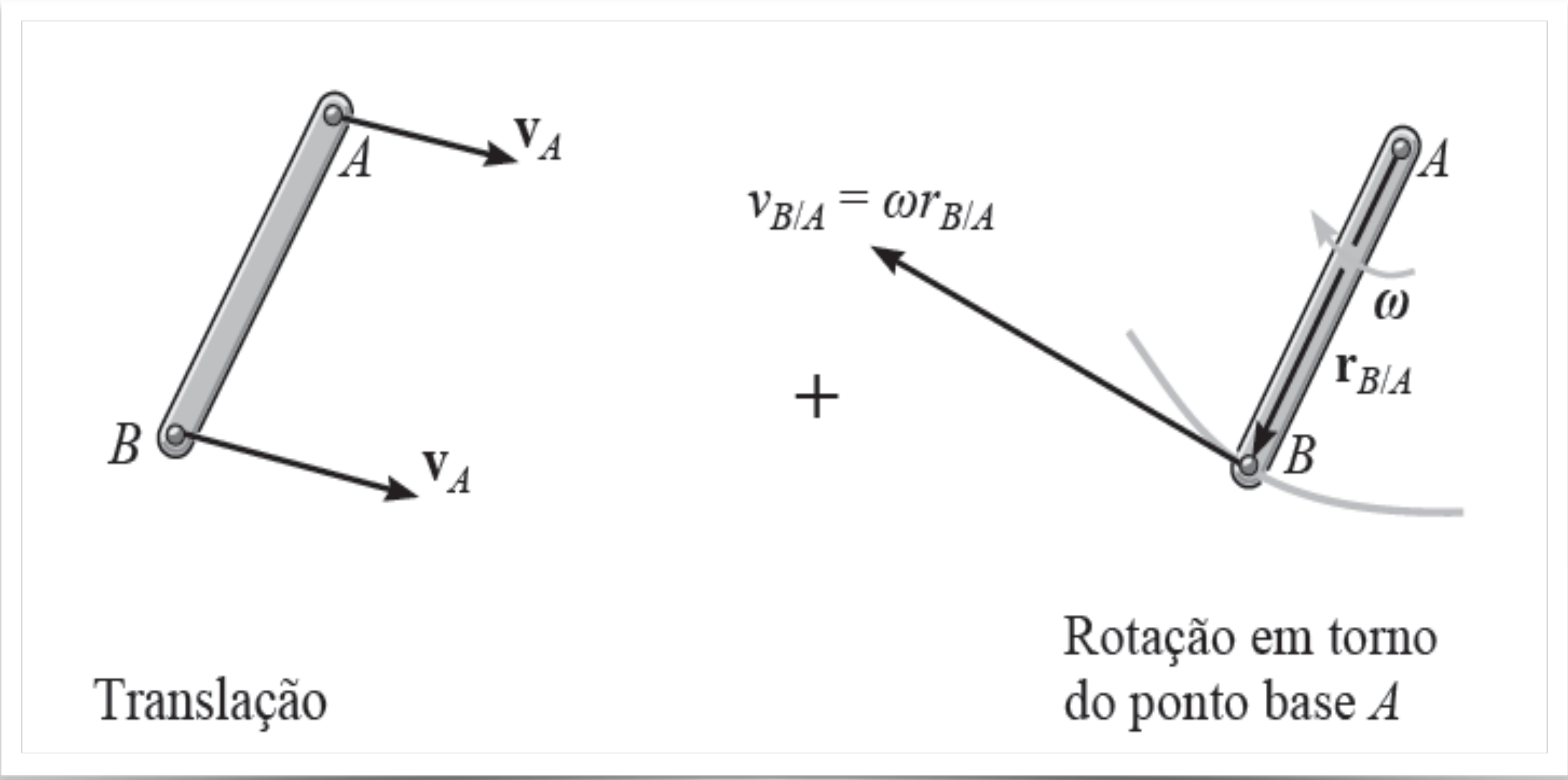
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

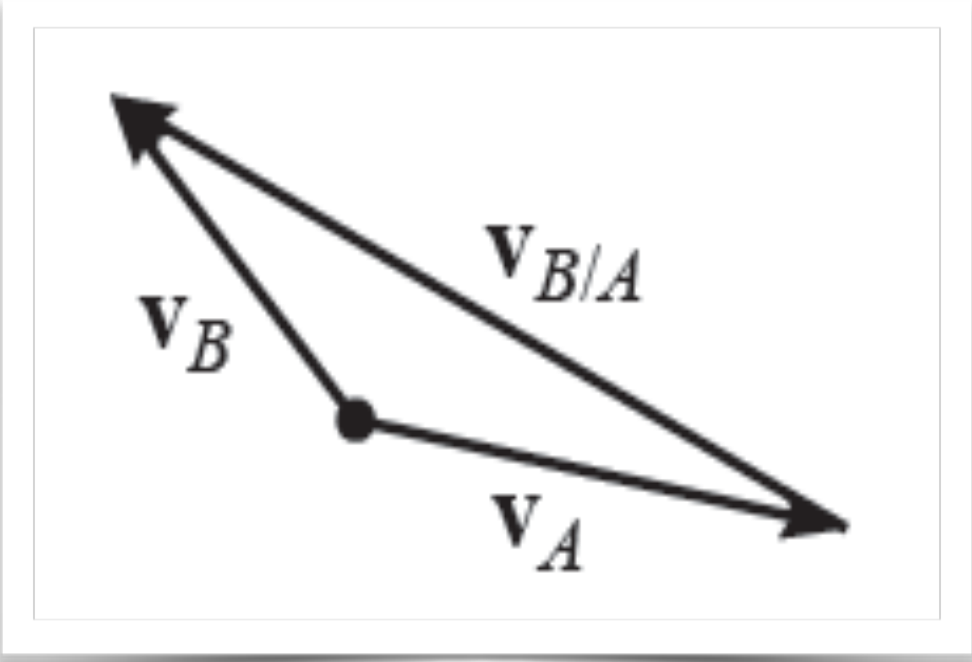
Velocidade relativa

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$



=





Velocidade relativa

Cinemática

Dinâmica

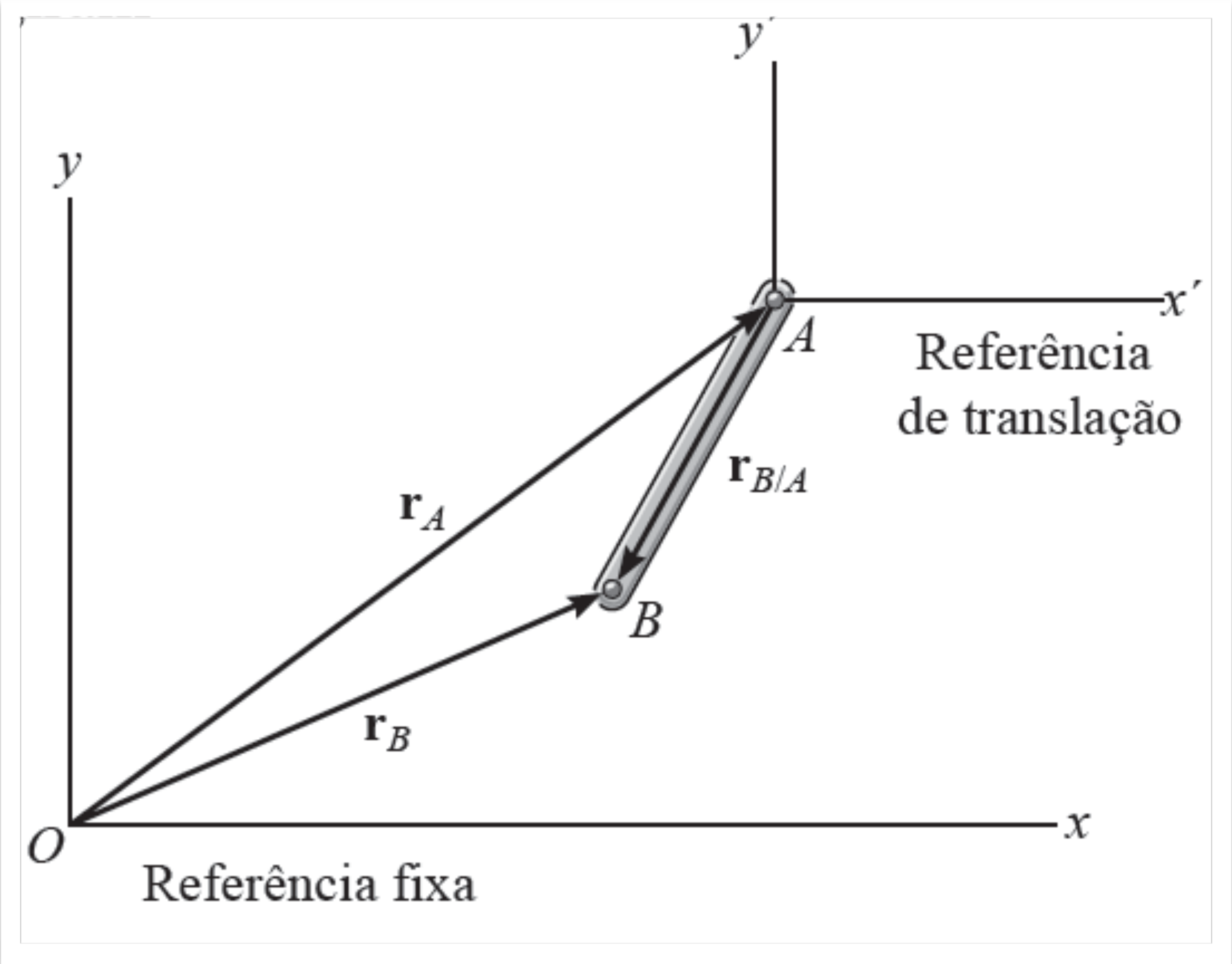
Conclusão

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r_P}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + (\omega \times \mathbf{r}_{B/A})$$

Aceleração



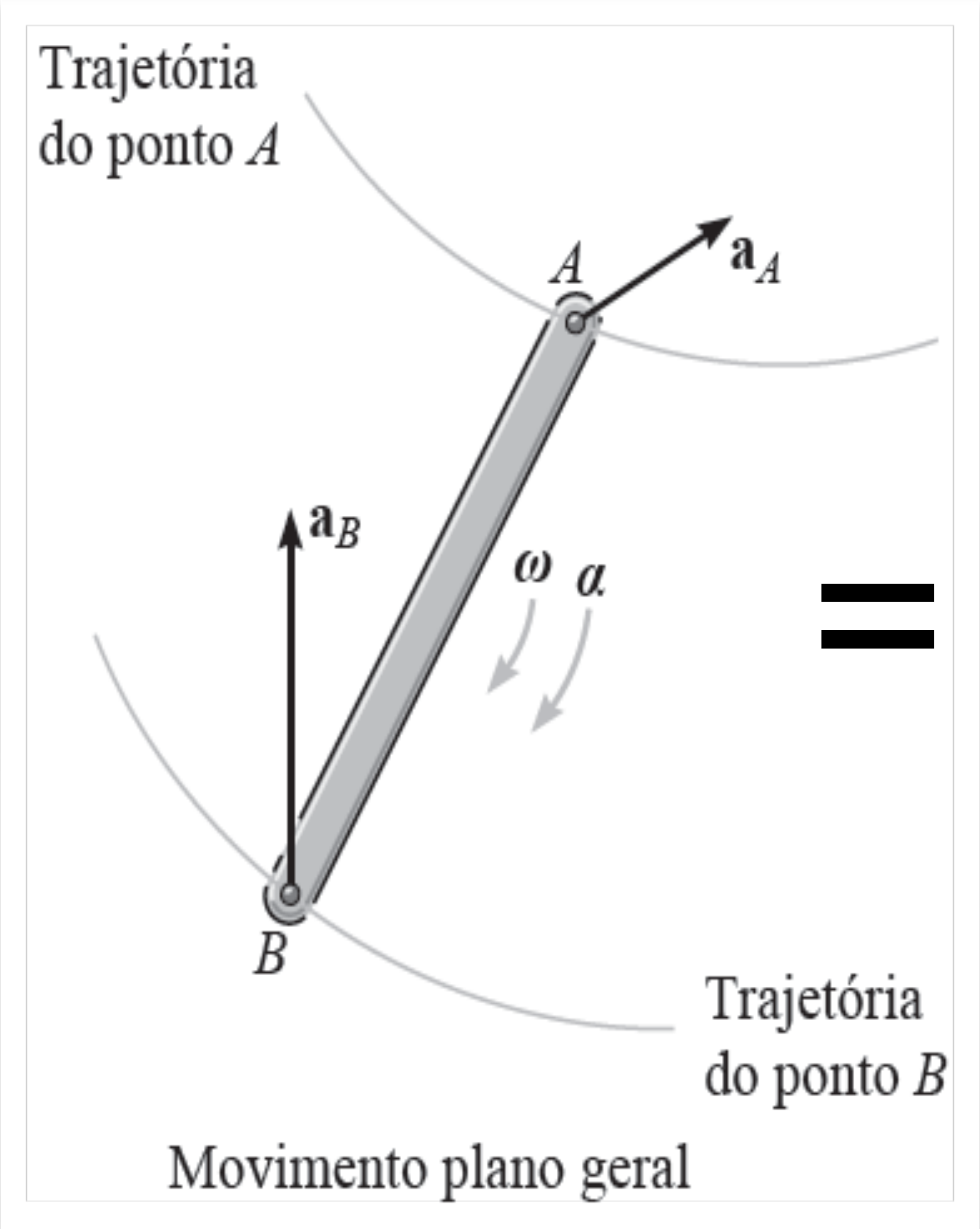
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

$$\Big\downarrow \frac{d}{dt}$$

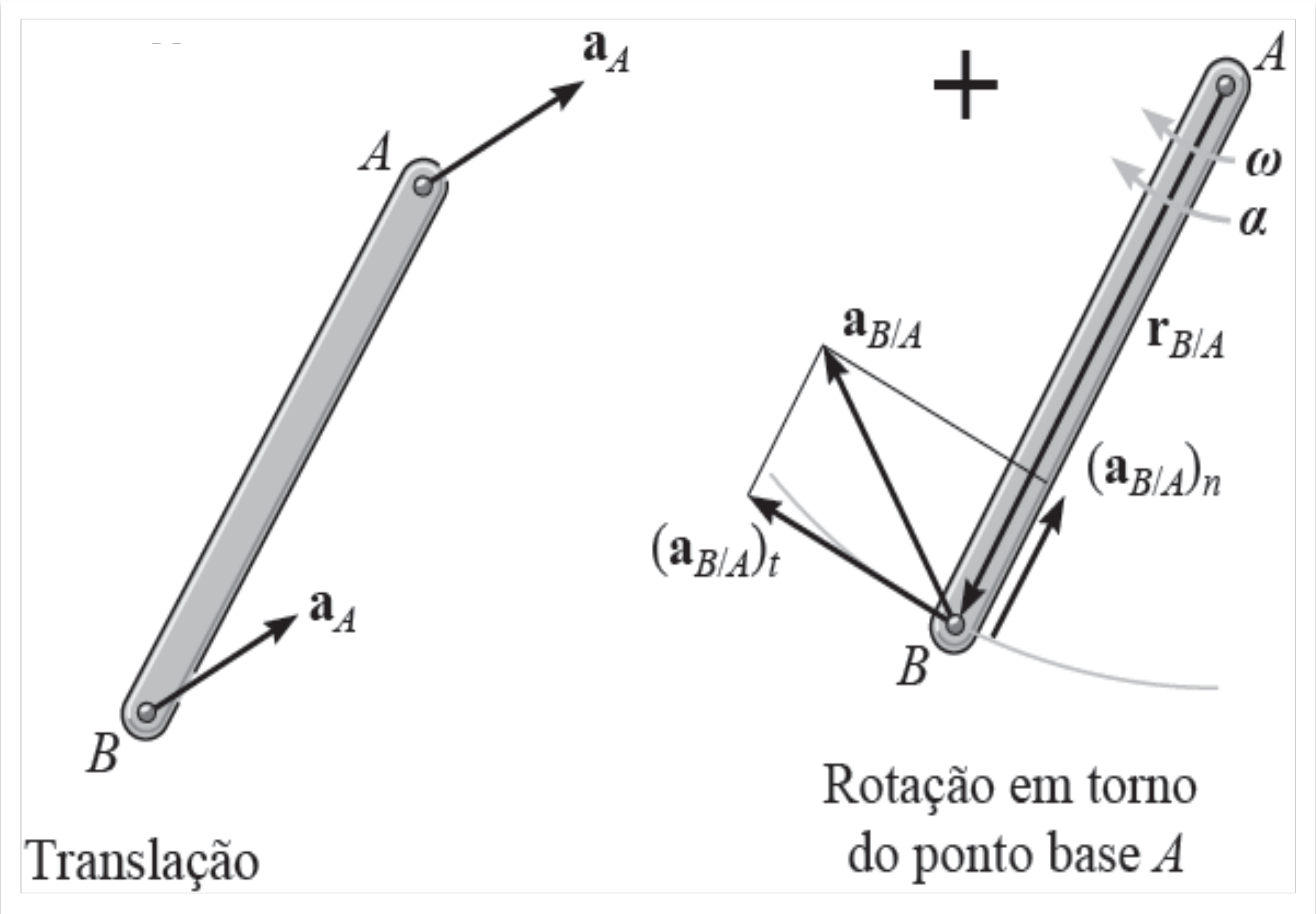
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

Aceleração

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$



=



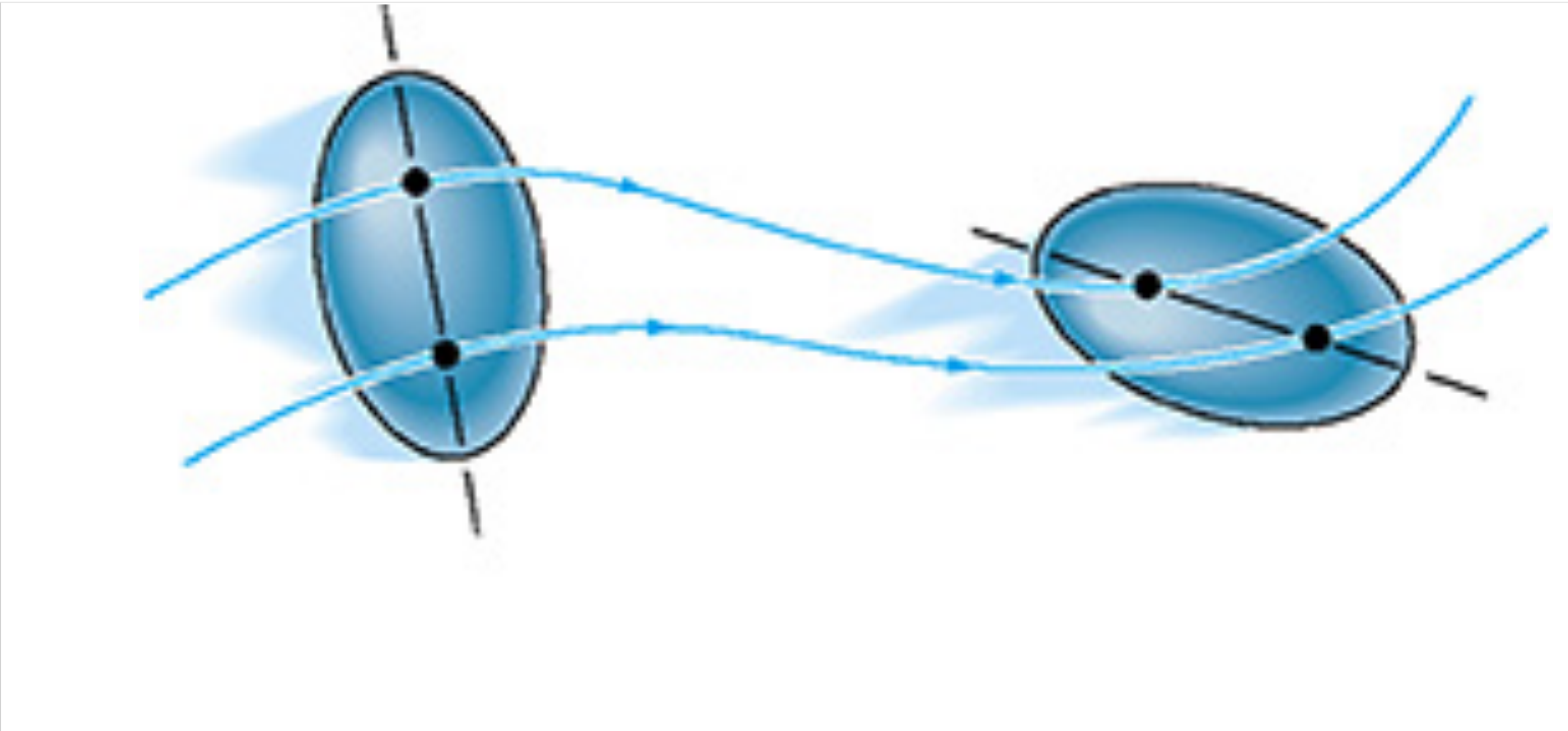
Aceleração

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

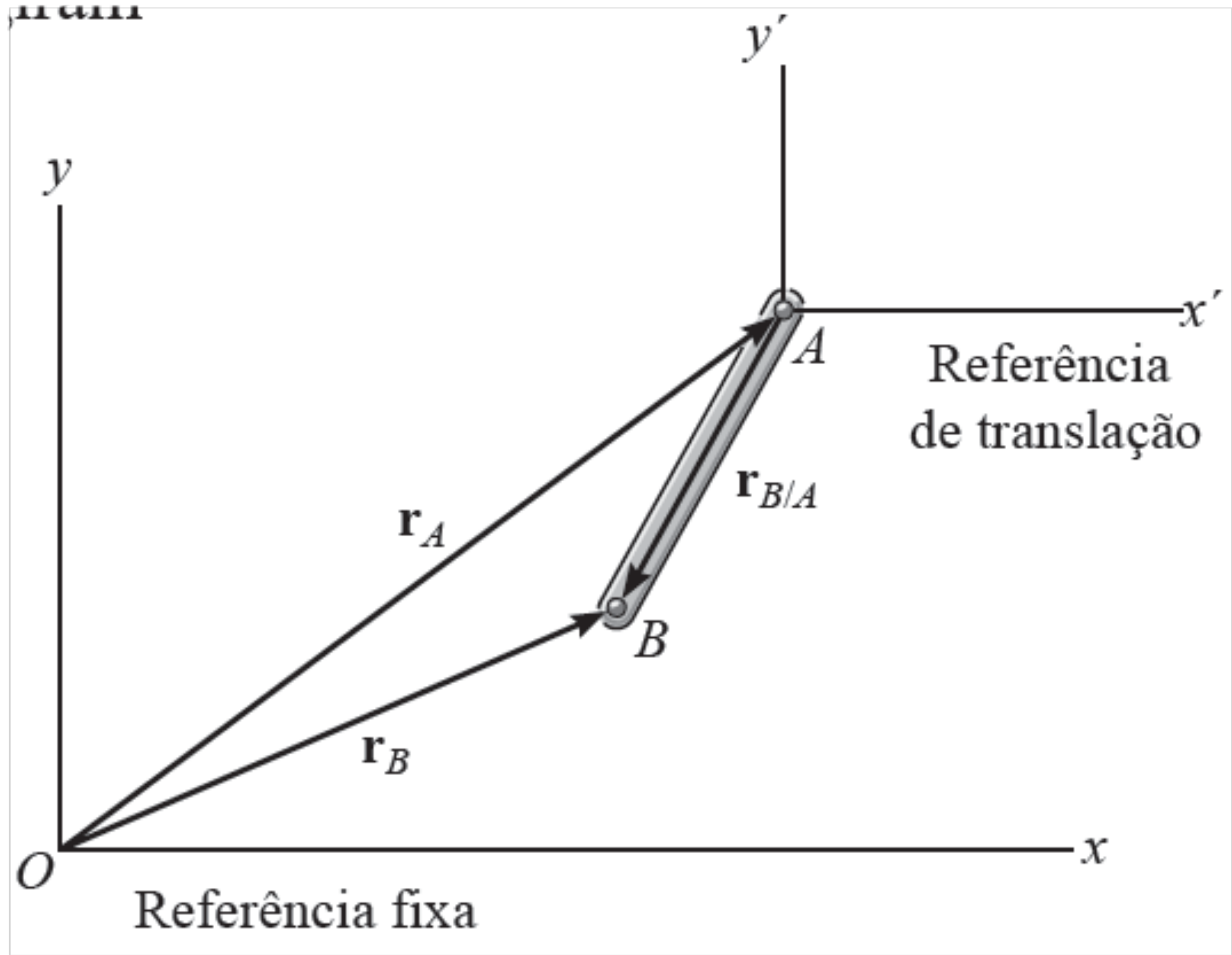
$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$$

Até então…



Movimento plano geral



$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

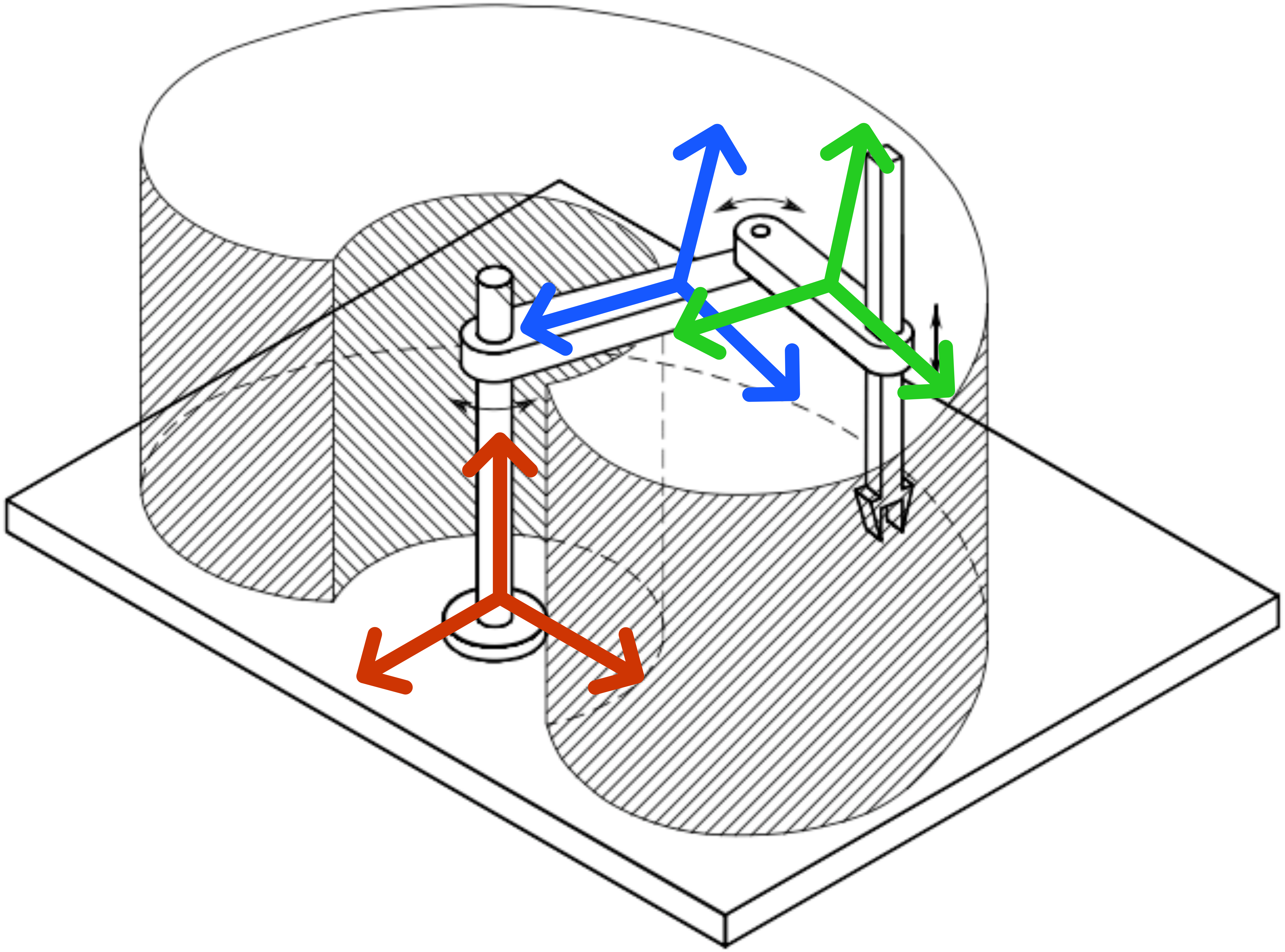
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$$

e se o

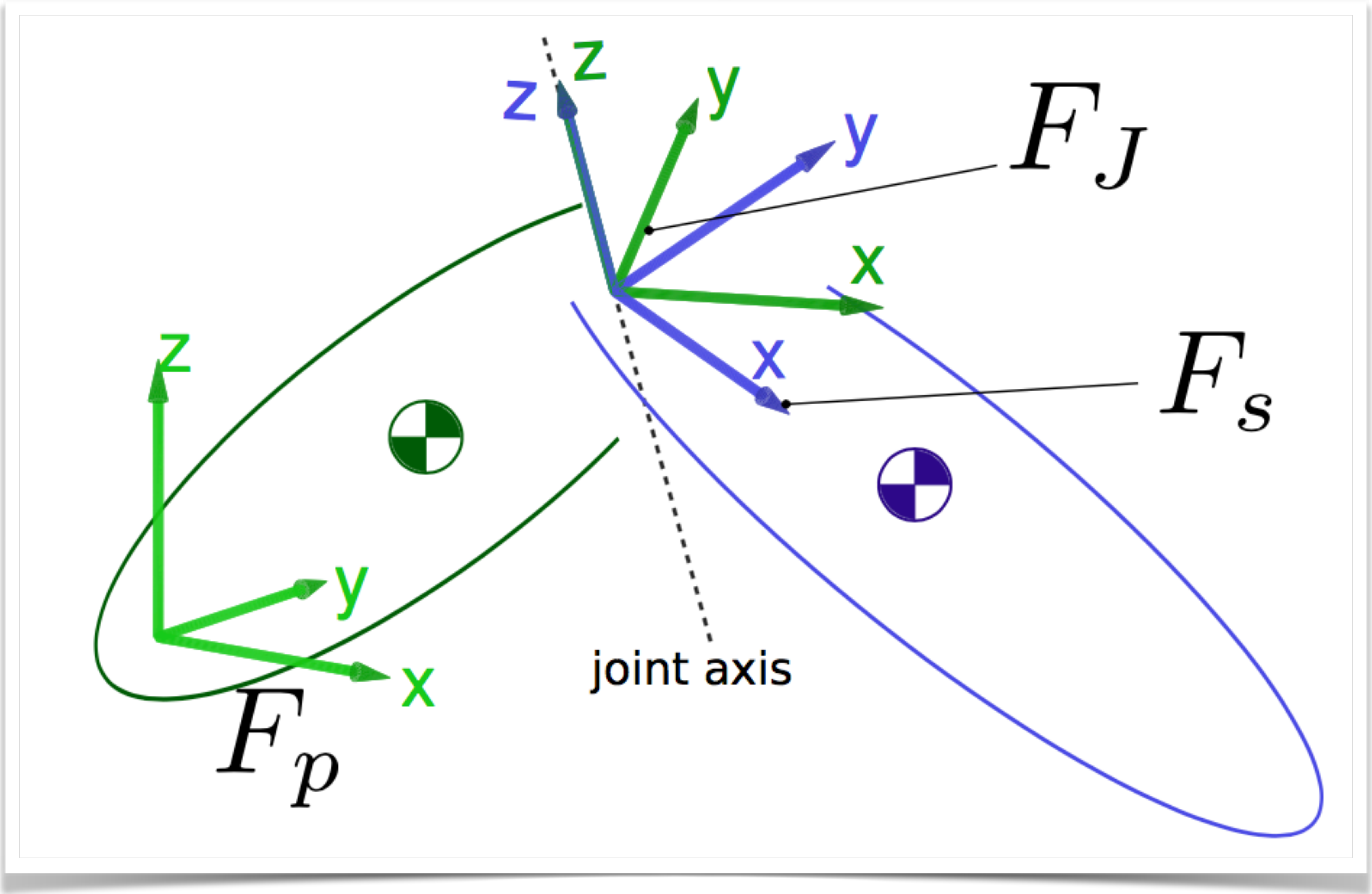
eixo de referência

também **girar?**

Movimentos em robótica

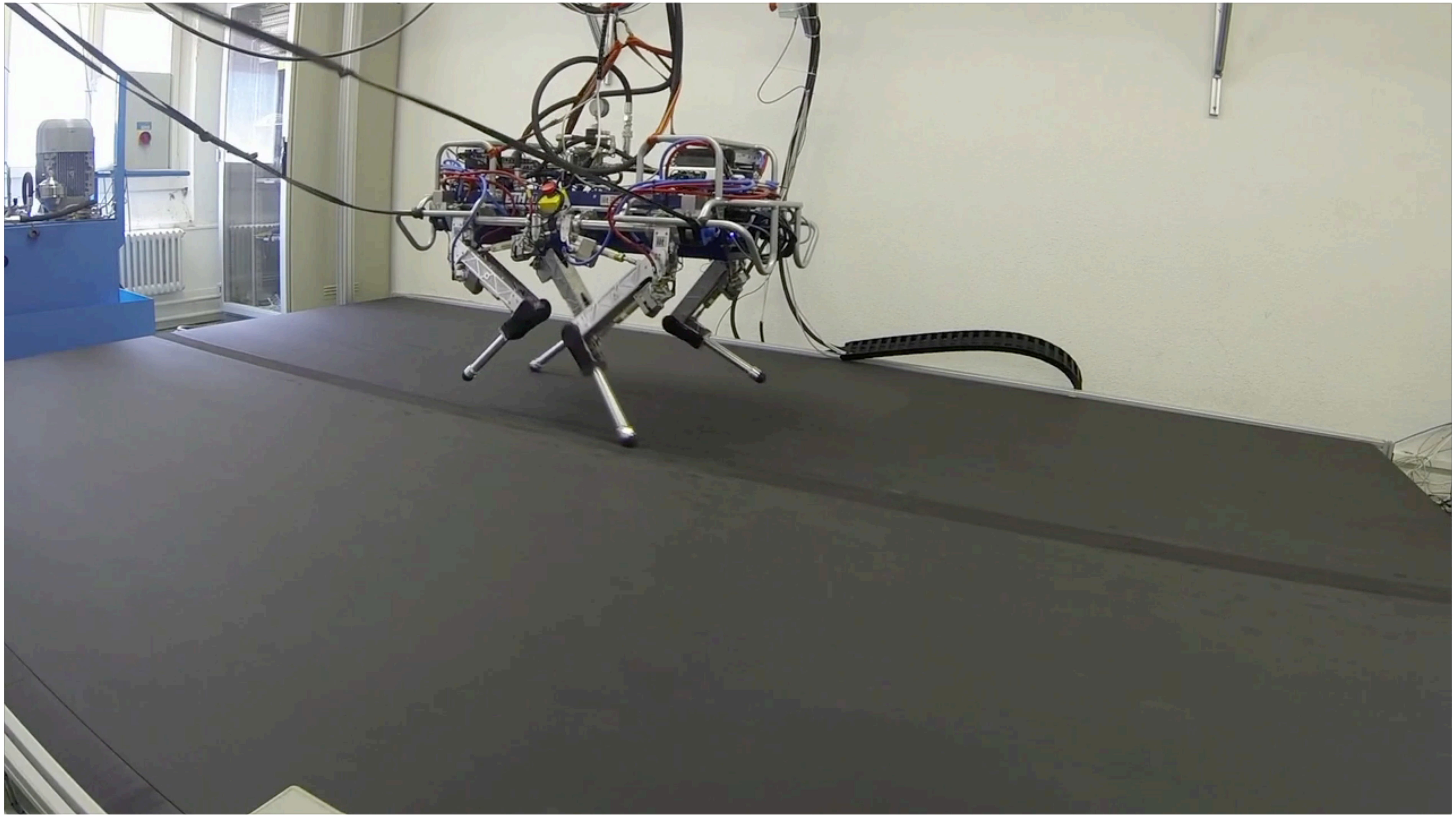


Eixos em rotação!

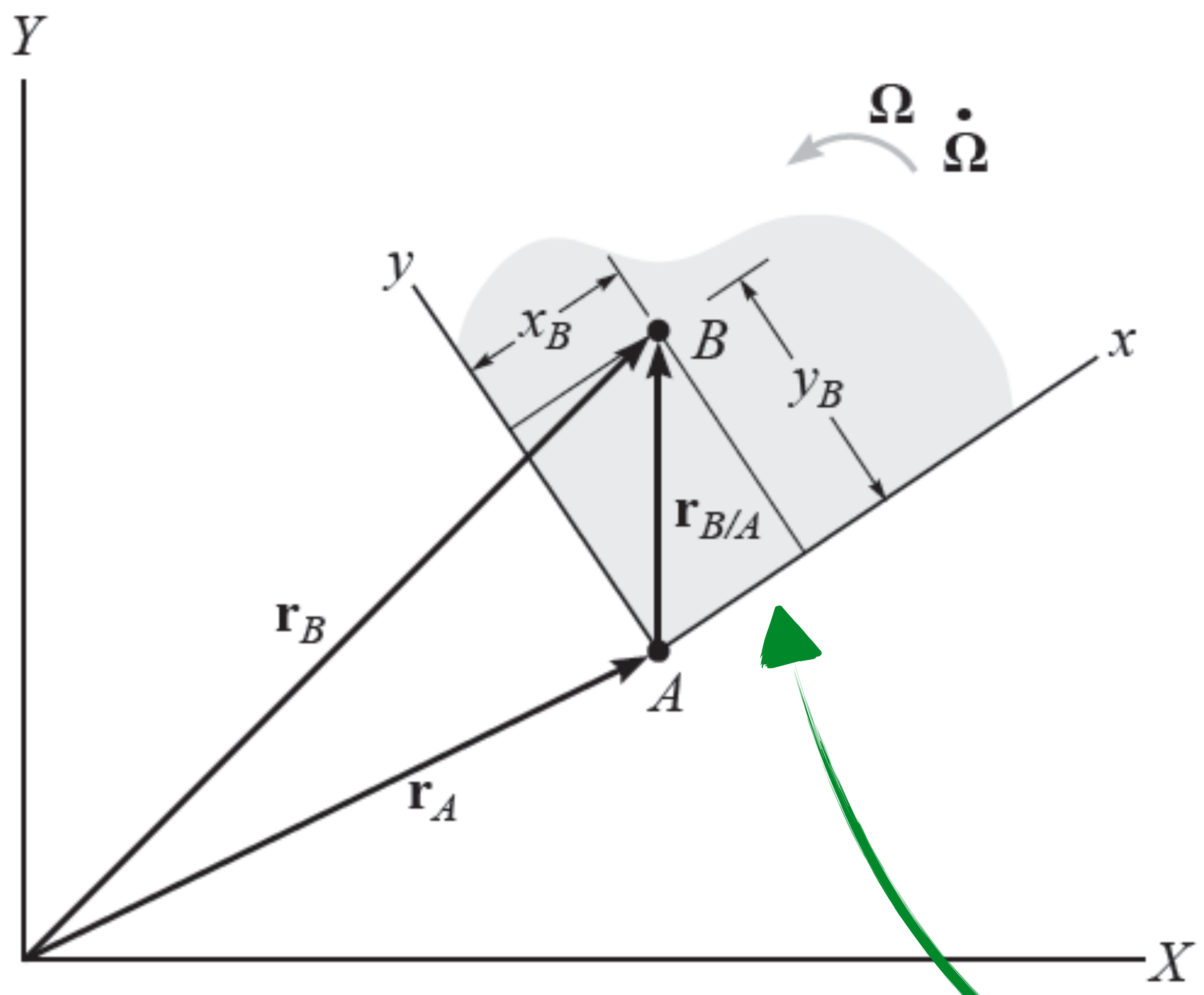


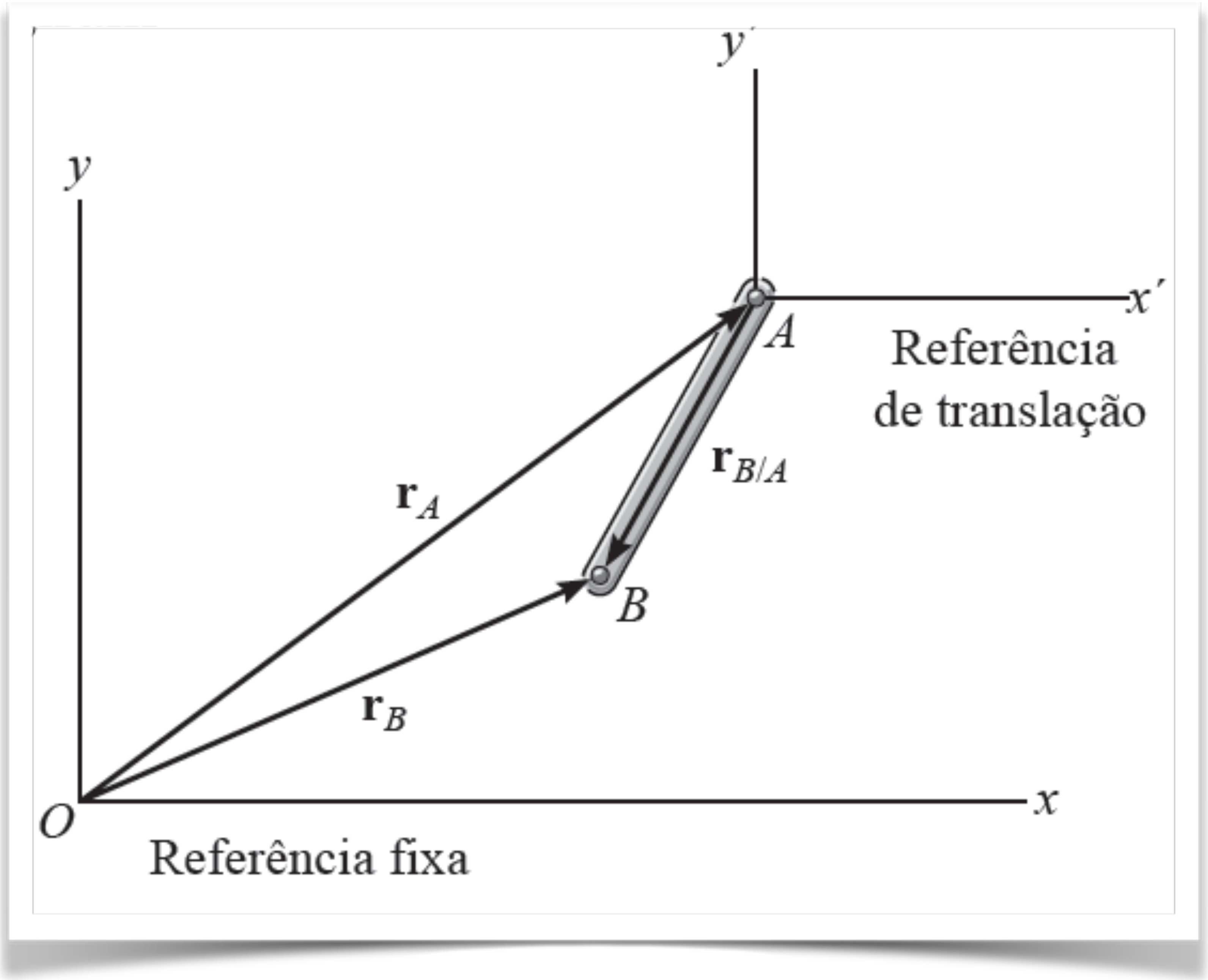
Movimentos em robótica

Eixos em rotação!



Posição



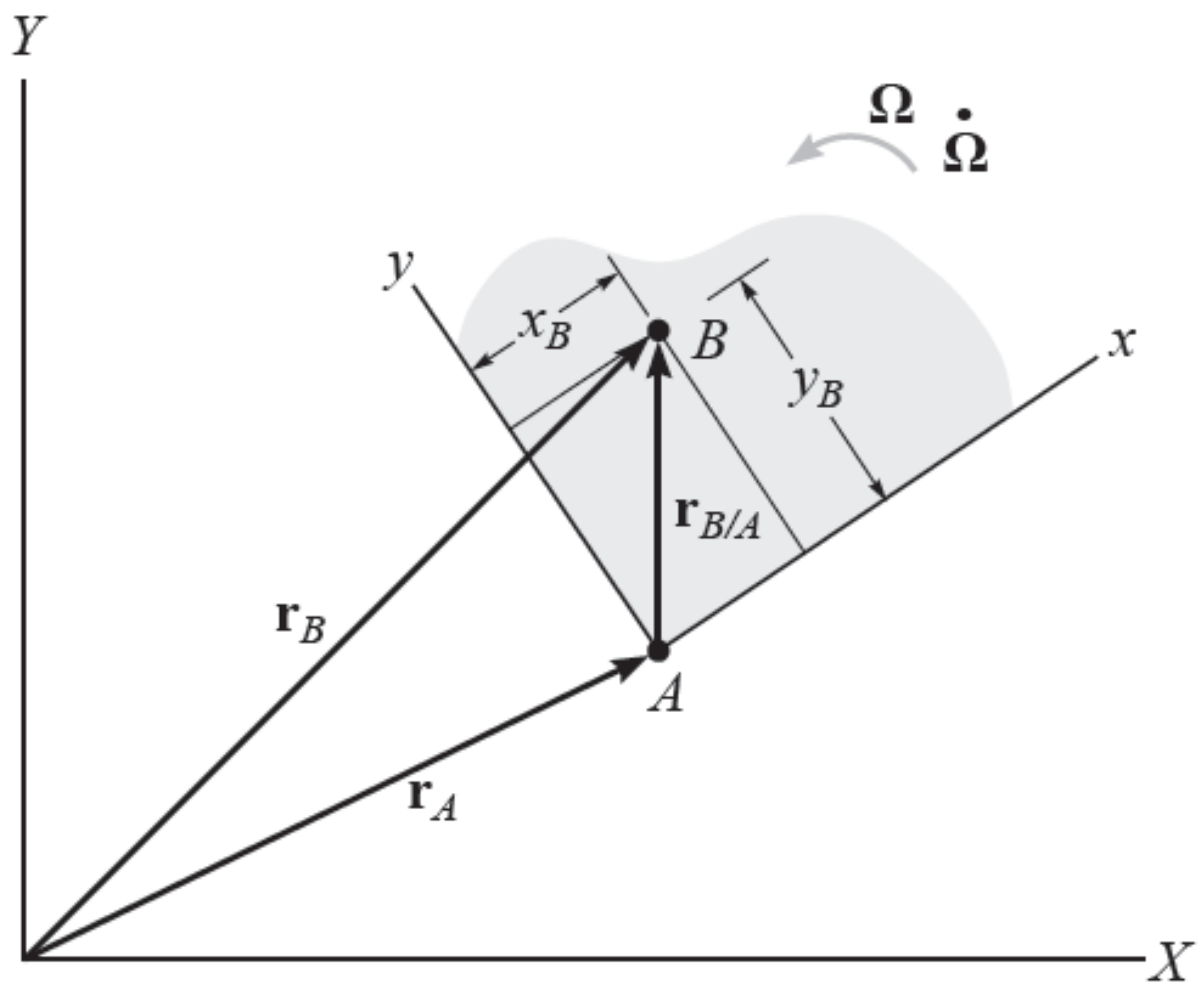


$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\mathbf{r}_{B/A} = x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j}$$

Cinemática
Dinâmica
Conclusão

Velocidade



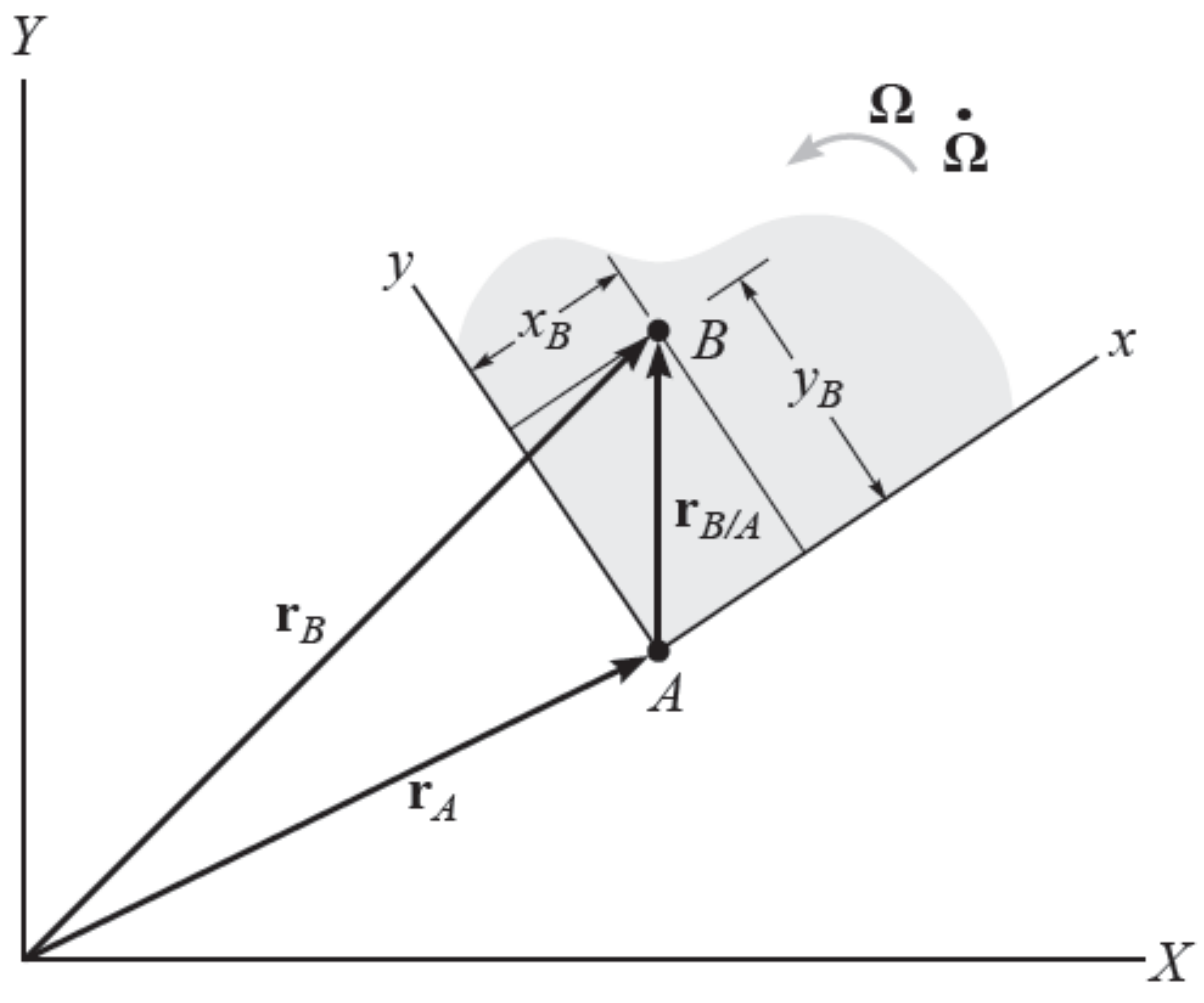
$$\mathbf{r}_{B/A} = x_B \mathbf{i} + y_B \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\Big\downarrow \frac{d}{dt}$$

$$\mathbf{v_B} = \mathbf{v_A} + \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt}$$

Velocidade

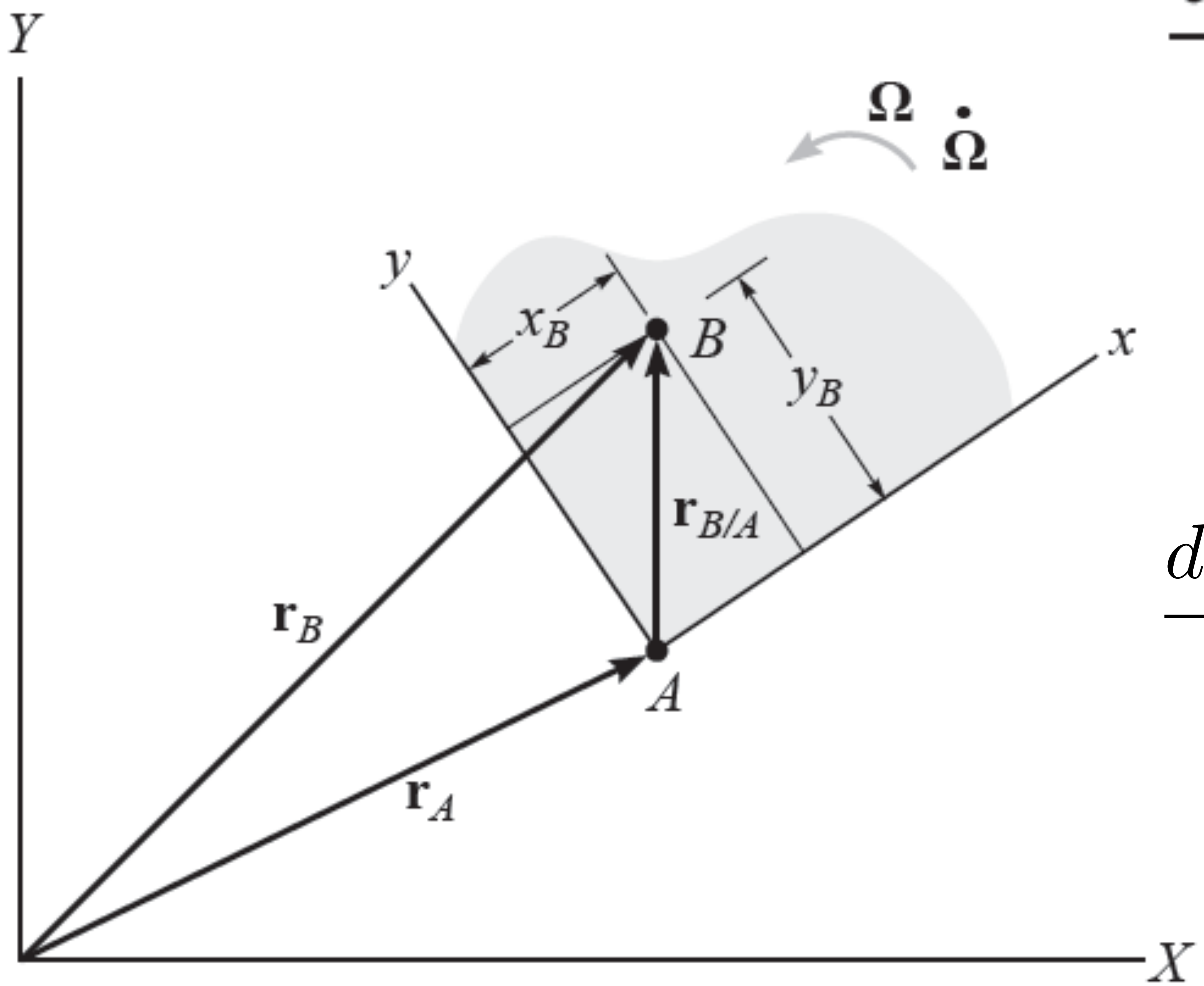


$$\mathbf{r}_{B/A} = x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v_B} = \mathbf{v_A} + \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \frac{d}{dt}(x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j})$$

Velocidade

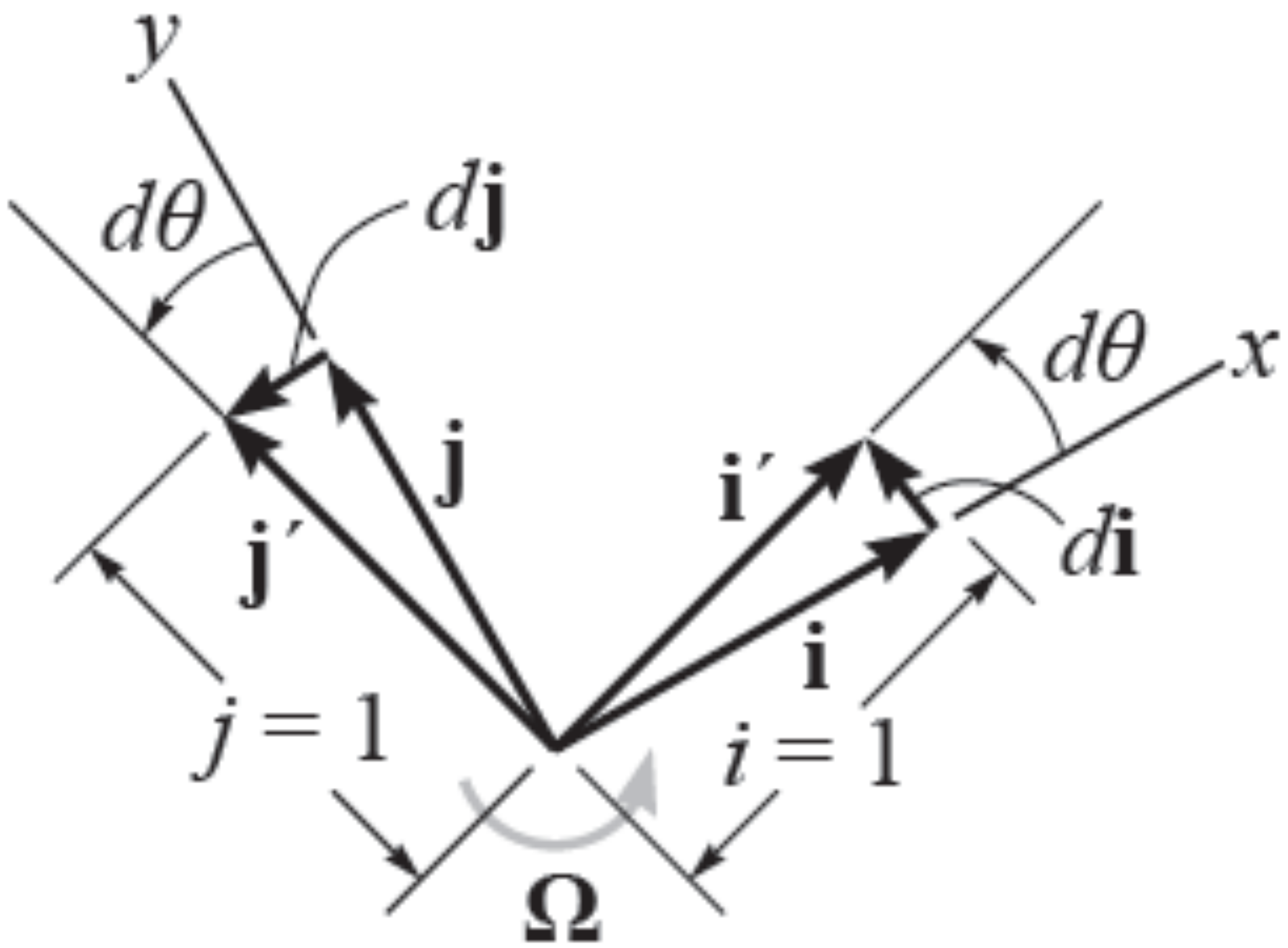


$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \frac{d}{dt}(x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j})$$

$$= \frac{dx_B}{dt}\mathbf{i} + x_B\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dy_B}{dt}\mathbf{j} + y_B\frac{d\mathbf{j}}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \underbrace{\left(\frac{dx_B}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy_B}{dt}\mathbf{j}\right)}_{(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}} + \left(x_B\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y_B\frac{d\mathbf{j}}{dt}\right)$$

Velocidade



$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \Omega\mathbf{j}$$

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = -\Omega\mathbf{i}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i}$$

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{j}$$

Velocidade

Cinemática
Dinâmica
Conclusão

$$\mathbf{r}_{B/A} = x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j}$$

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \left(x_B\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y_B\frac{d\mathbf{j}}{dt}\right)$$

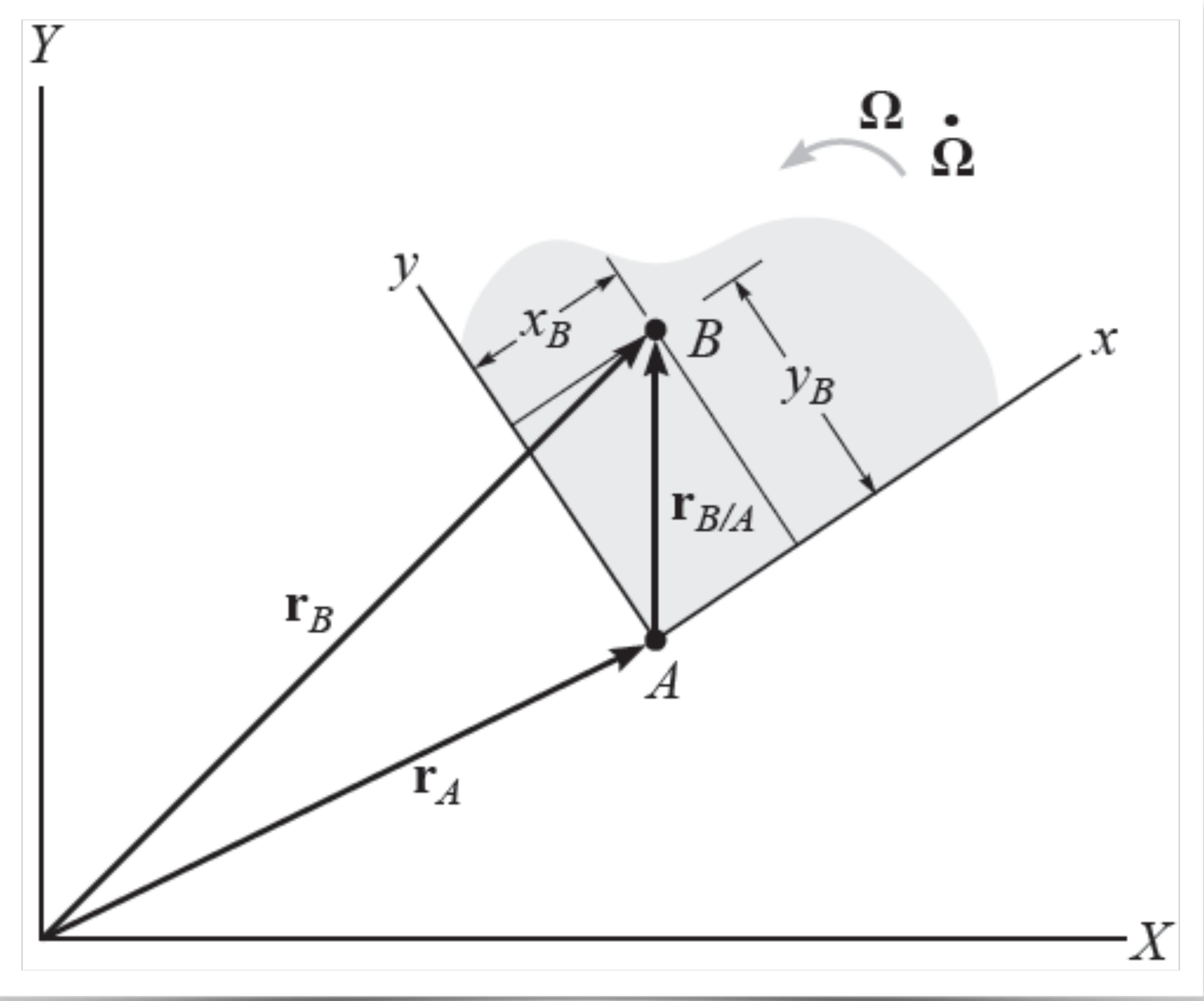
$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{i}$$

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{j}$$

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times (x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j})$$

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

Velocidade



$$\mathbf{v_B} = \mathbf{v_A} + \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

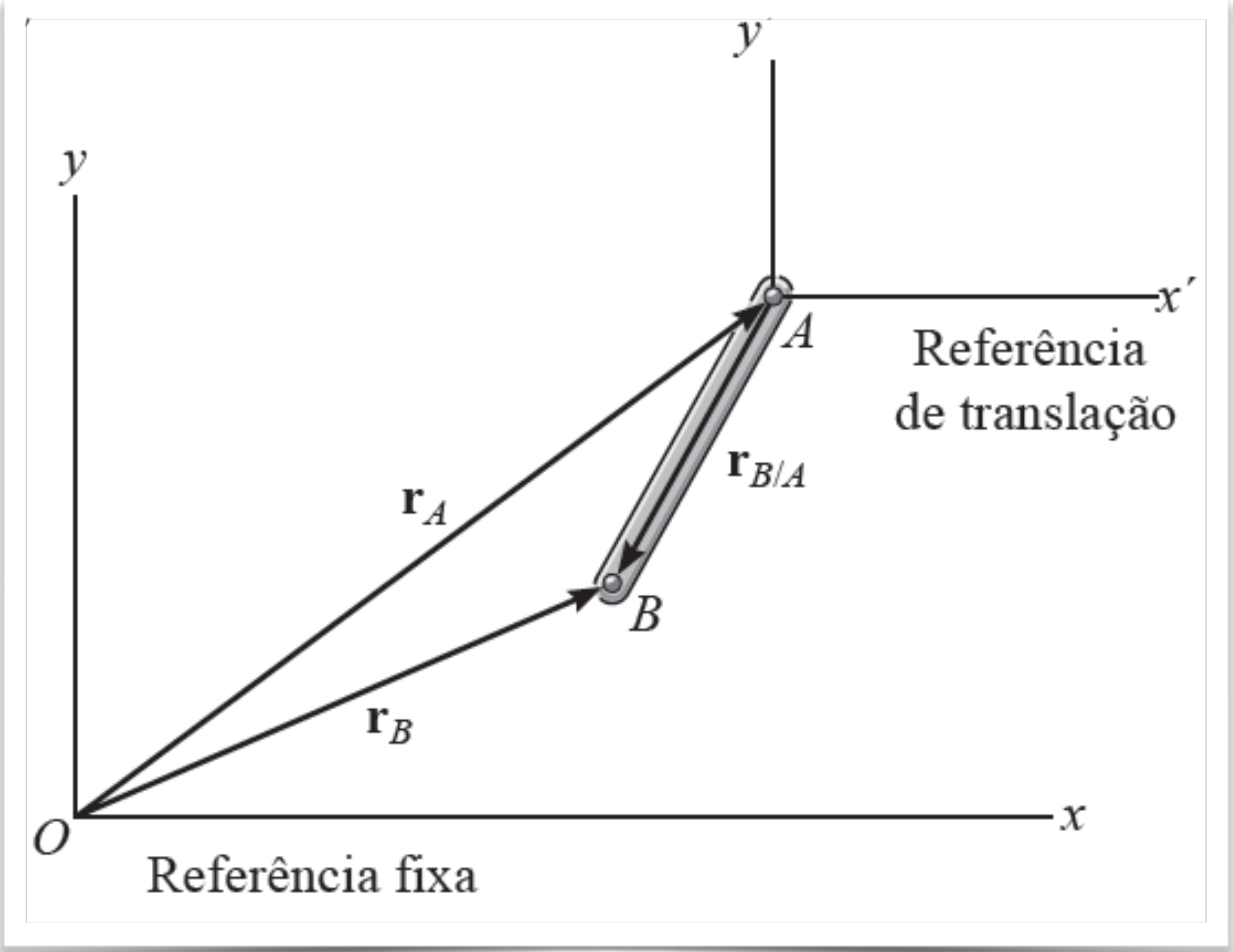
Velocidade

Cinemática

Dinâmica

Conclusão

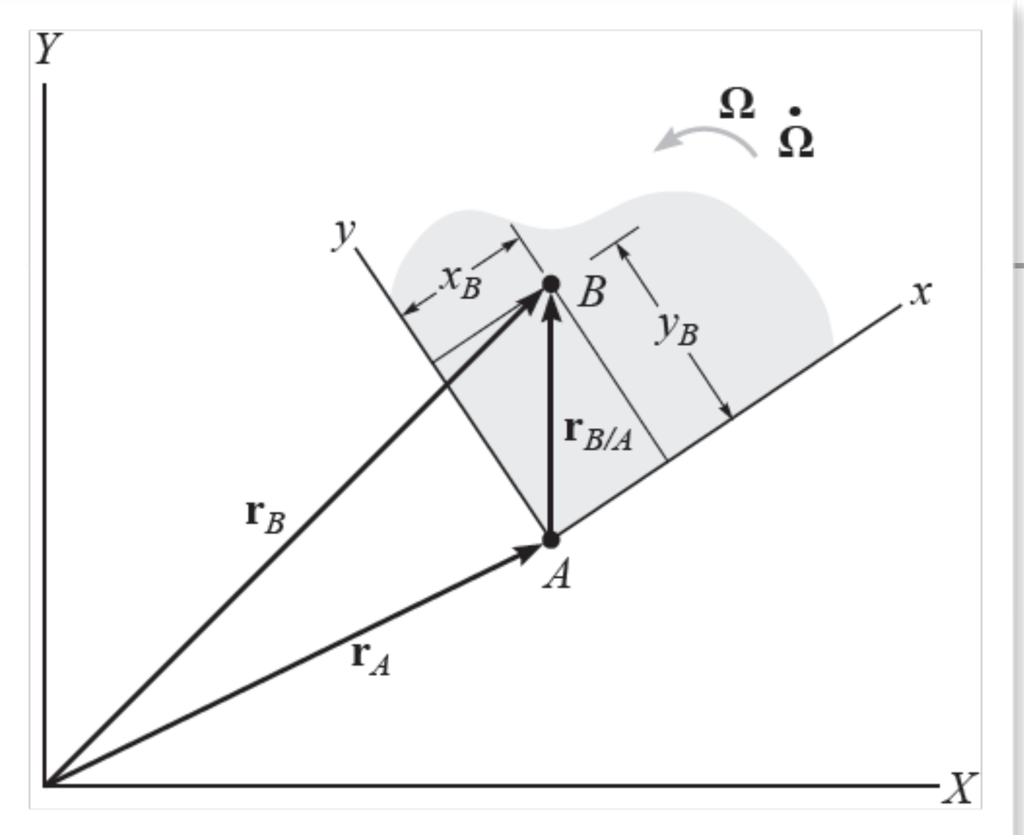
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$



comparação com eixos de **translação**

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

Velocidade



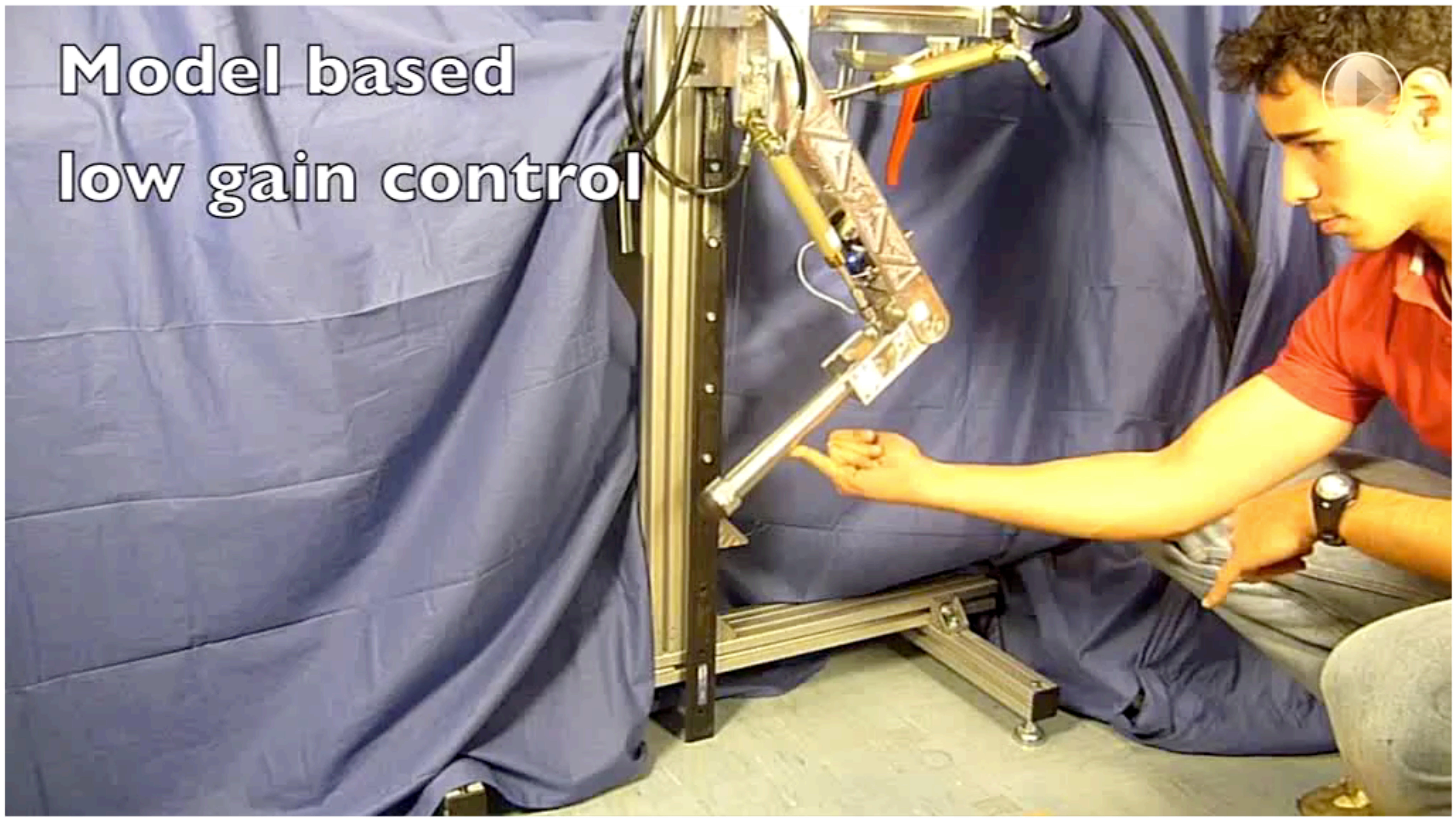
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$\mathbf{v}_B$	velocidade absoluta de B (iguais)	movimento de B observado a partir do sistema X, Y, Z

Velocidade

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

Velocidade



Aceleração

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\Big\downarrow \frac{d}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} + \frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt}$$

Aceleração

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt}$$

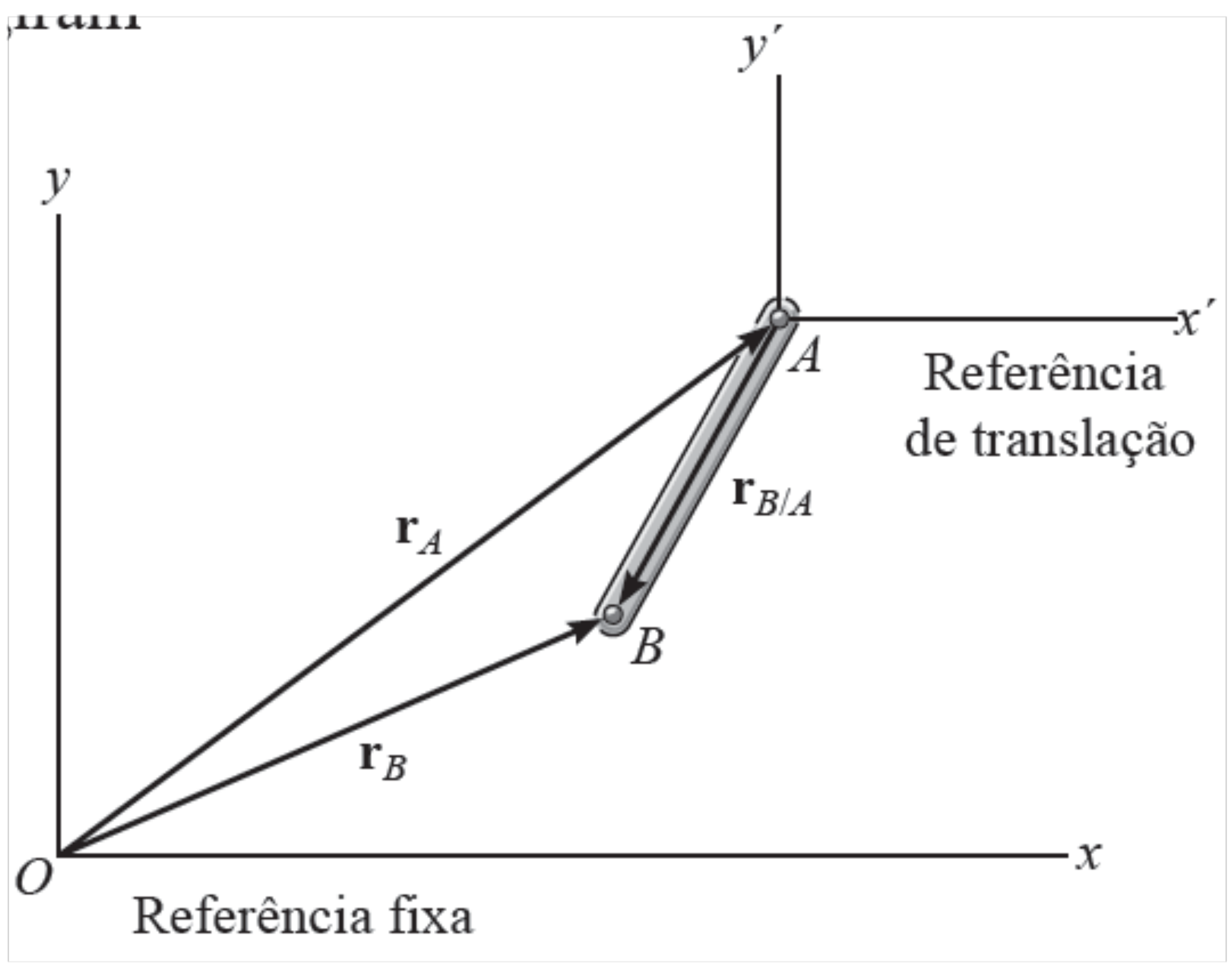
$$\mathbf{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

$$\frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} = (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

Aceleração

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$



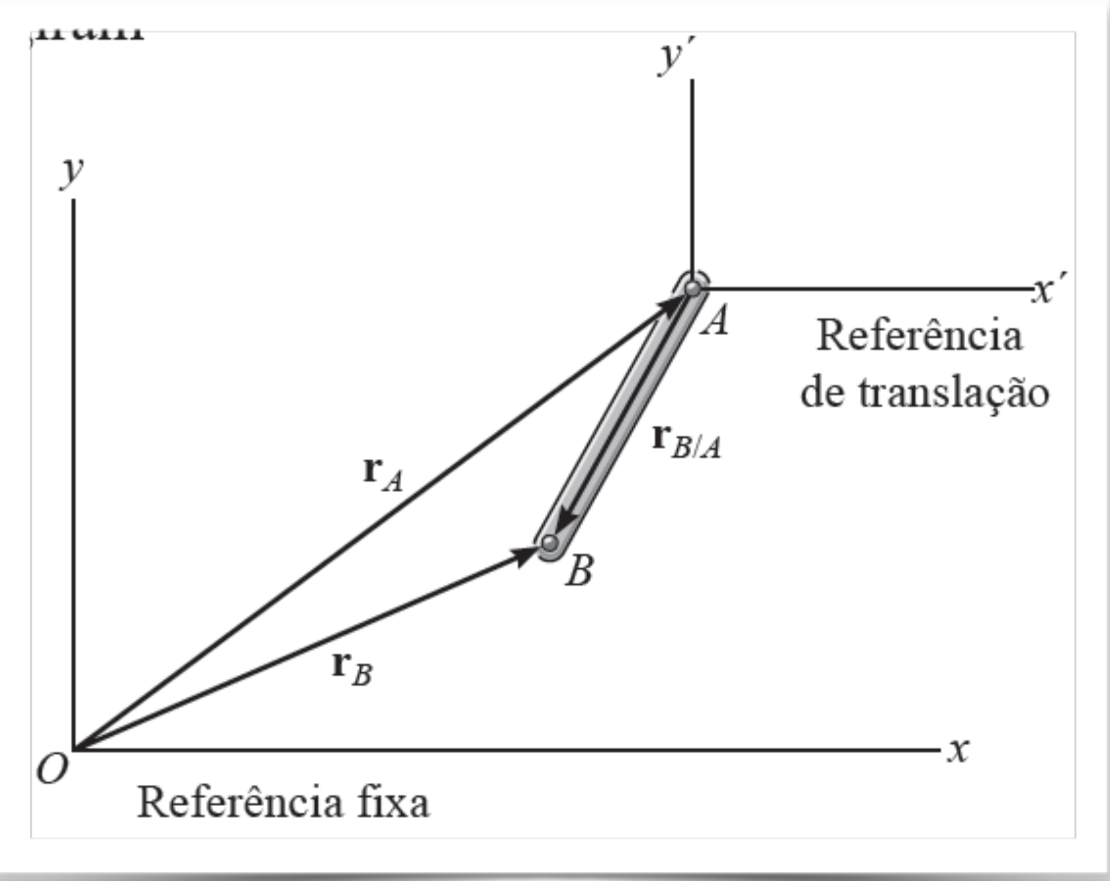
comparação com
eixos de **translação**

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$$

Cinemática
Dinâmica
Conclusão

Aceleração

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

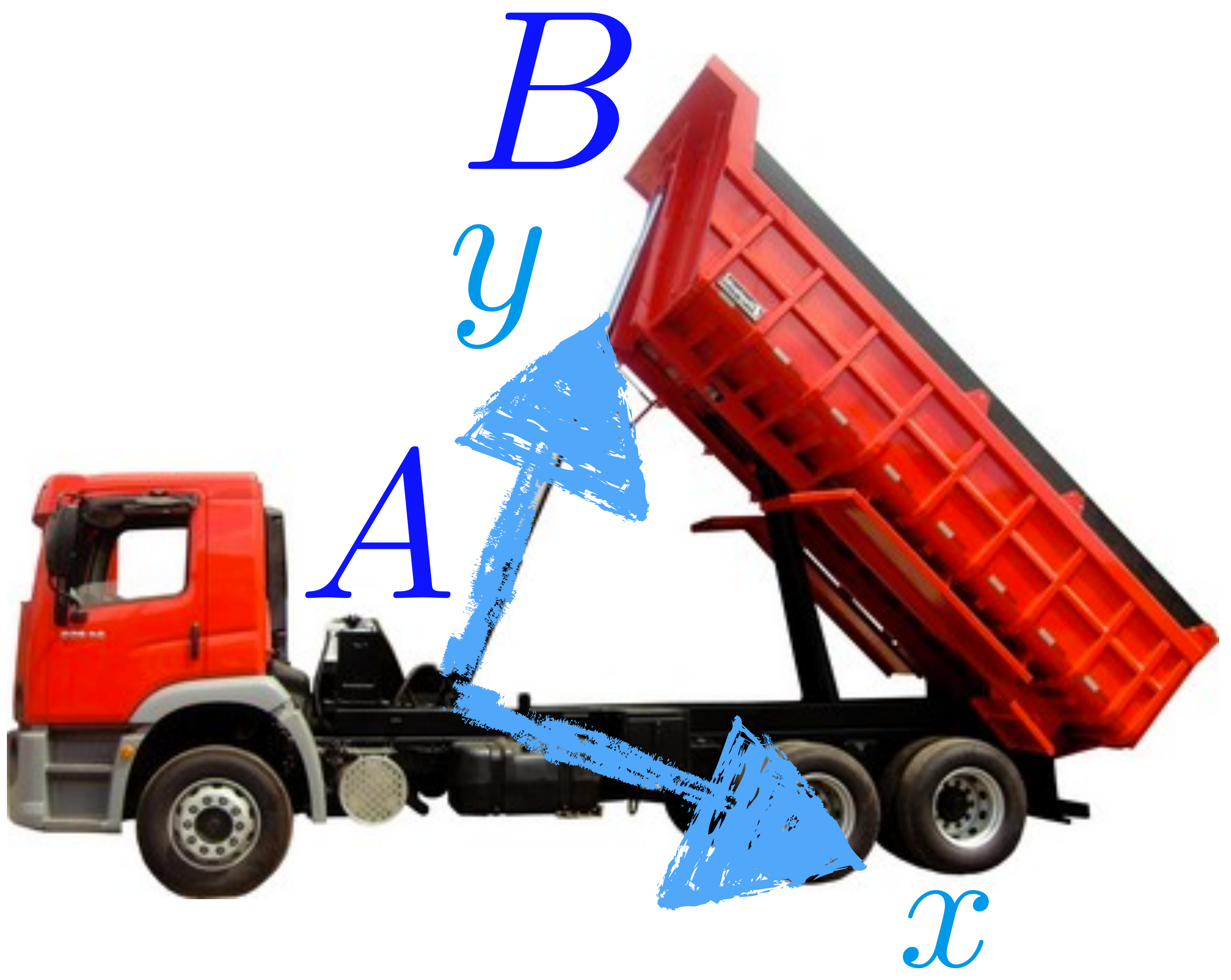


$\mathbf{a}_B$	aceleração absoluta de B	movimento de B observado a partir do sistema X, Y, Z
	(iguais)	
$\mathbf{a}_A$	aceleração absoluta da origem do sistema x, y, z	movimento do sistema x, y, z observado a partir do sistema X, Y, Z
	(mais)	
$\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A}$	efeito de aceleração angular causado pela rotação do sistema x, y, z	
	(mais)	
$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$	efeito de velocidade angular causado pela rotação do sistema x, y, z	
	(mais)	
$2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$	efeito combinado de B deslocando-se em relação às coordenadas x, y, z e da rotação do sistema x, y, z	interação dos movimentos
	(mais)	
$(\mathbf{a}_{B/A})xyz$	aceleração de B em relação a A	movimento de B observado a partir do sistema x, y, z

Aceleração

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

$2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$	$\left\{\begin{array}{l}\text{efeito combinado de } B \text{ deslocando-se} \\ \text{em relação às coordenadas } x, y, z \text{ e} \\ \text{da rotação do sistema } x, y, z\end{array}\right\}$	interação dos movimentos



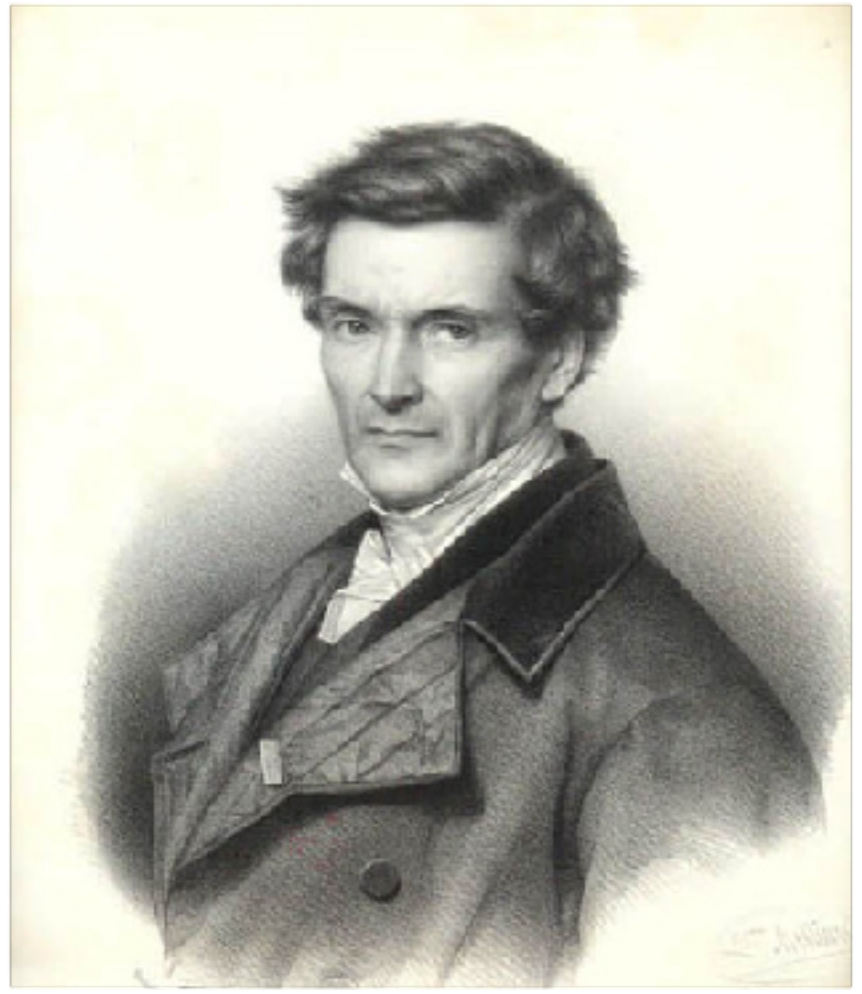
Aceleração

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

$2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$	efeito combinado de B deslocando-se em relação às coordenadas x, y, z e da rotação do sistema x, y, z	interação dos movimentos

aceleração de

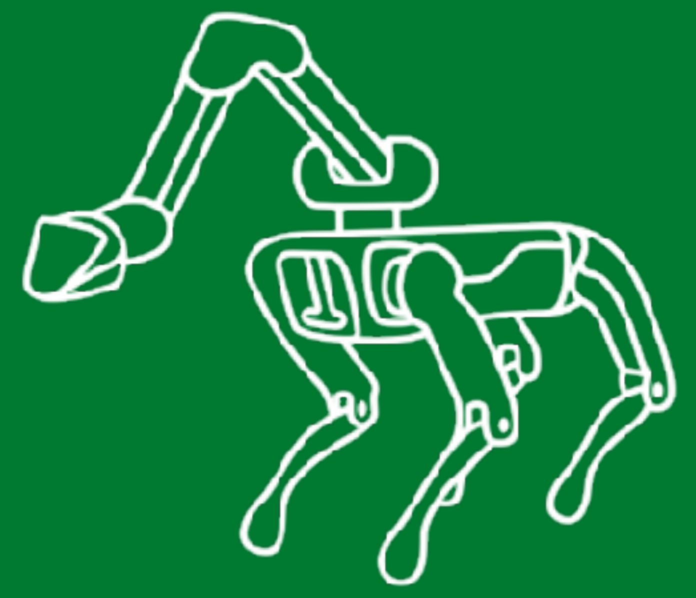
Coriolis



Gaspard-Gustave de Coriolis
(1792 — 1843)

Conteúdo

Cinemática

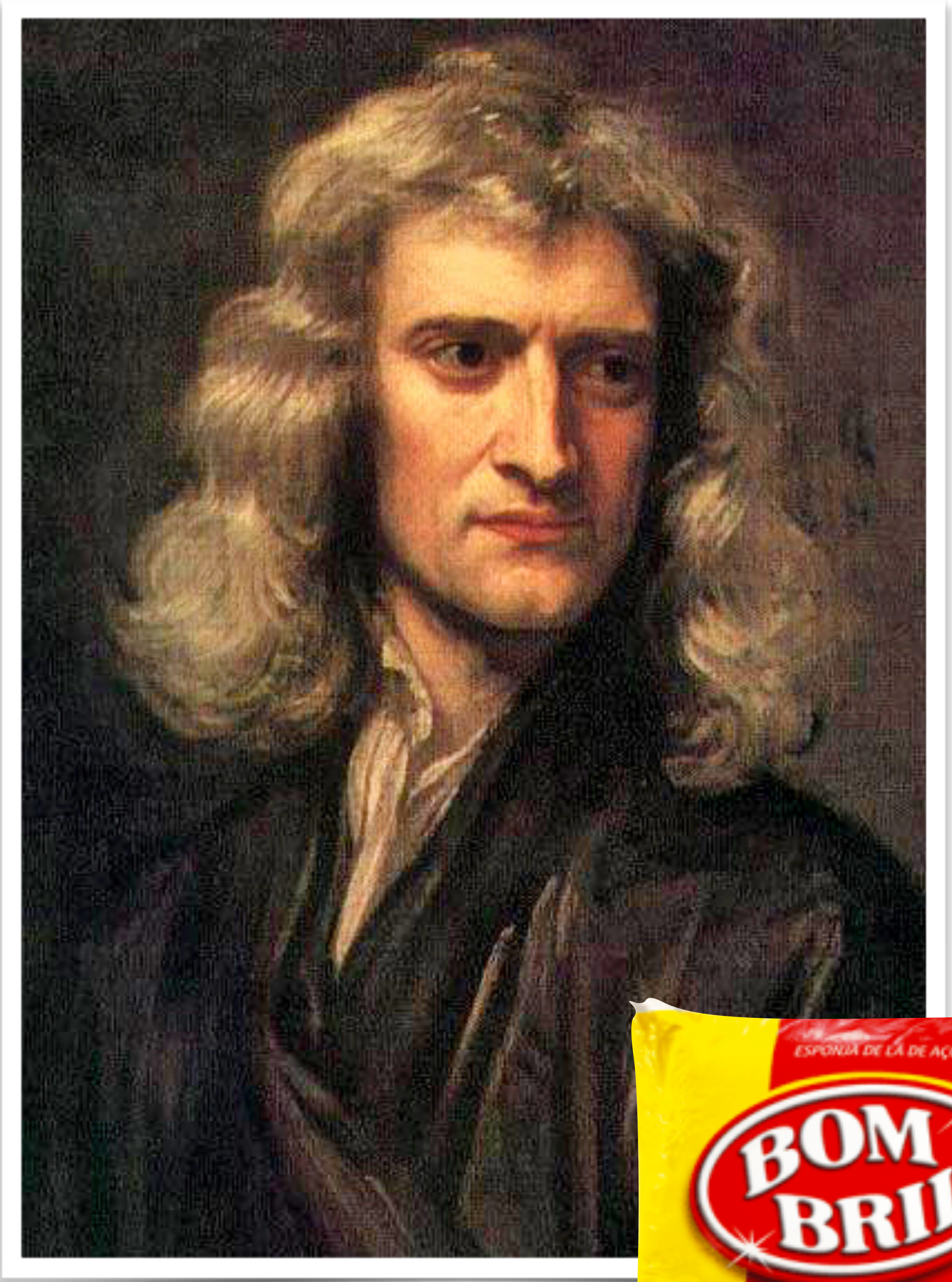


- Segunda lei de Newton
- Newton-Euler
- Corpos articulados

Dinâmica

Conclusão

Newton



1643 - 1727
(84 anos)

Alquimista

Filósofo natural

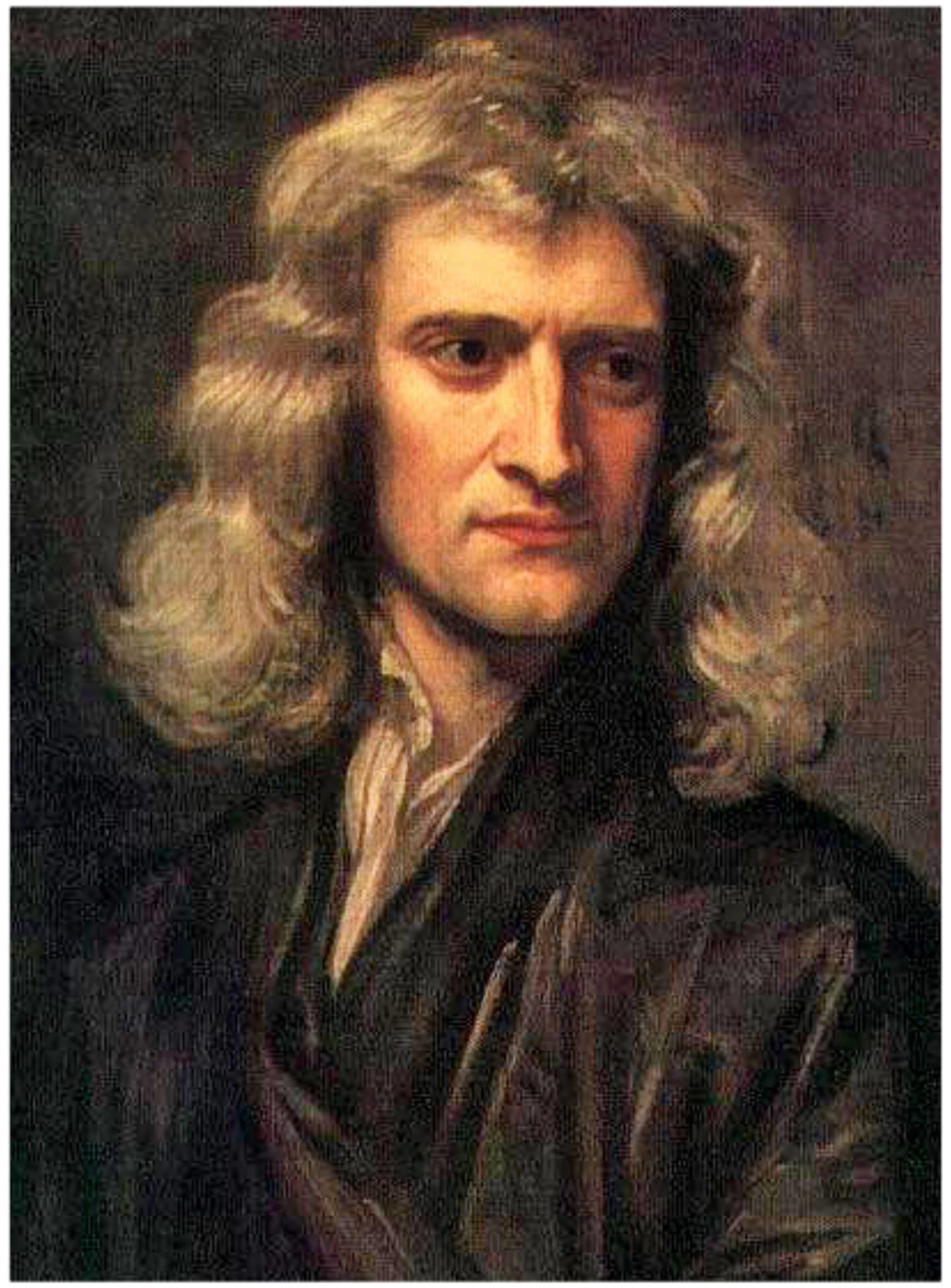
Teólogo

Astrônomo

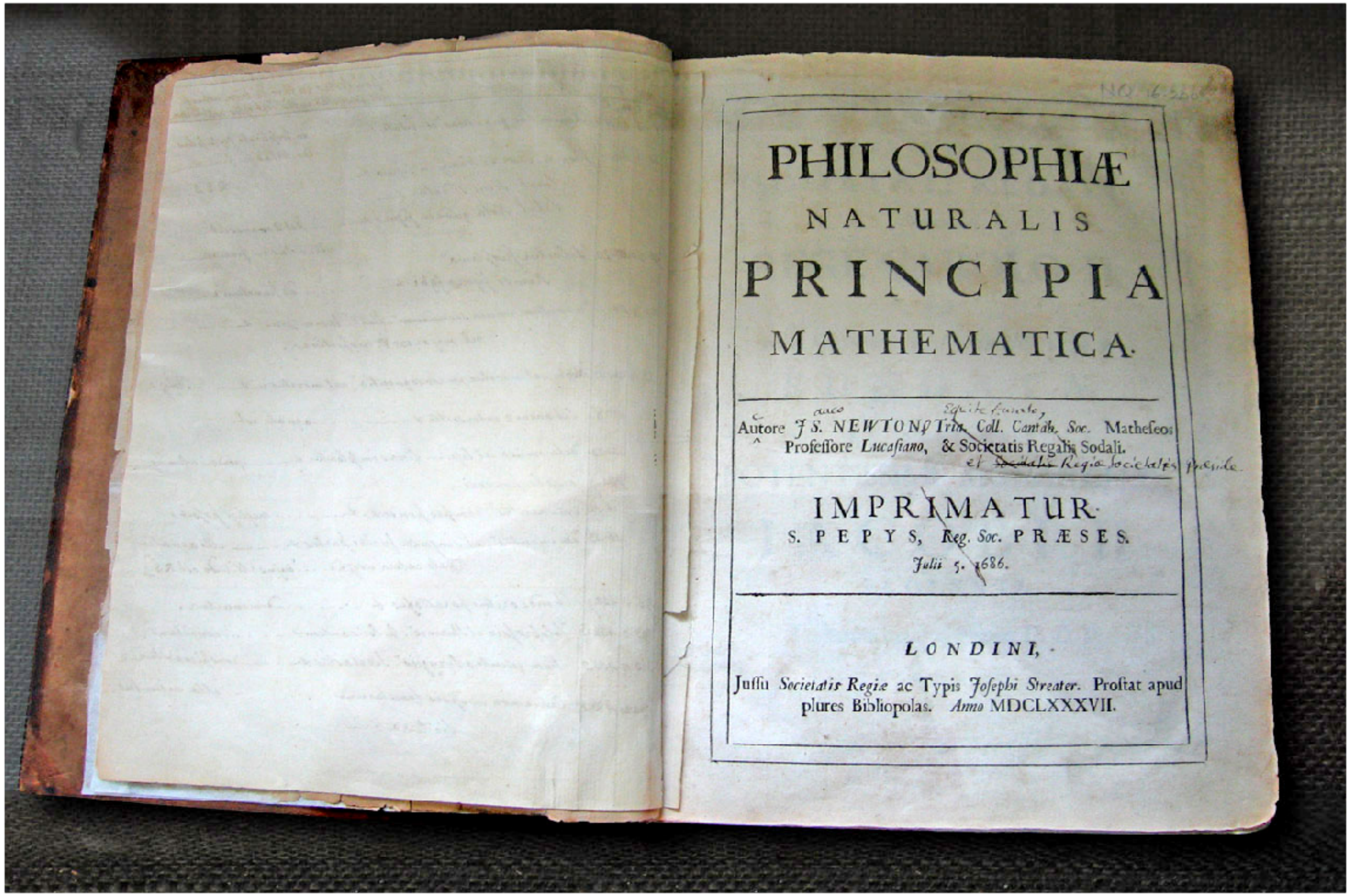
Físico

Matemático

Newton

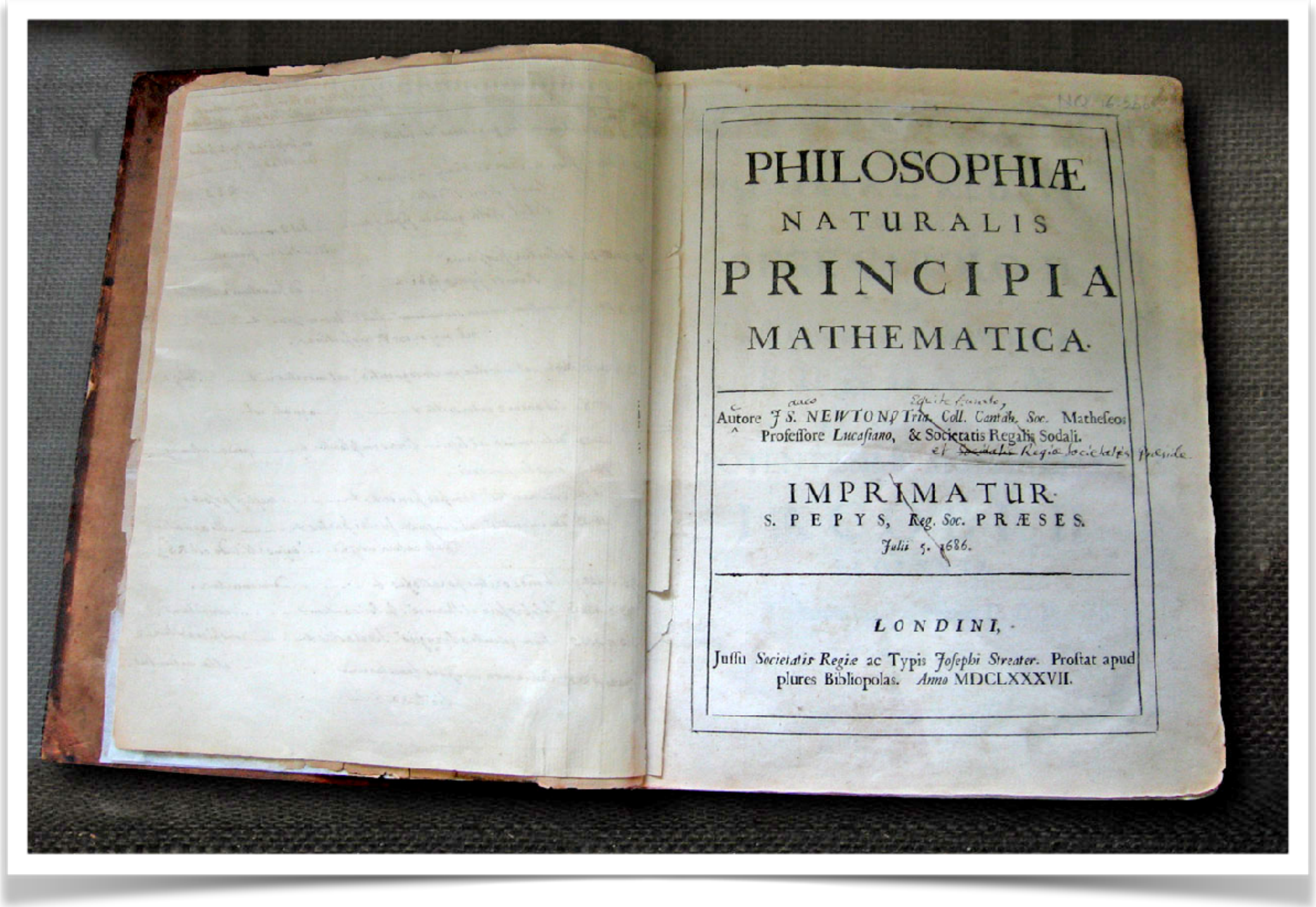


1643 - 1727
(84 anos)



1687

Leis de Newton



1. **Lei da inércia**
2. **Lei da dinâmica**
3. **Lei da ação e reação**

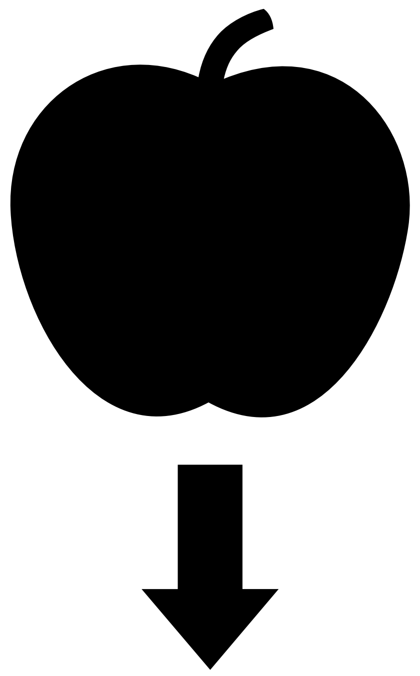
Lei da Dinâmica

Cinemática

Dinâmica

Conclusão

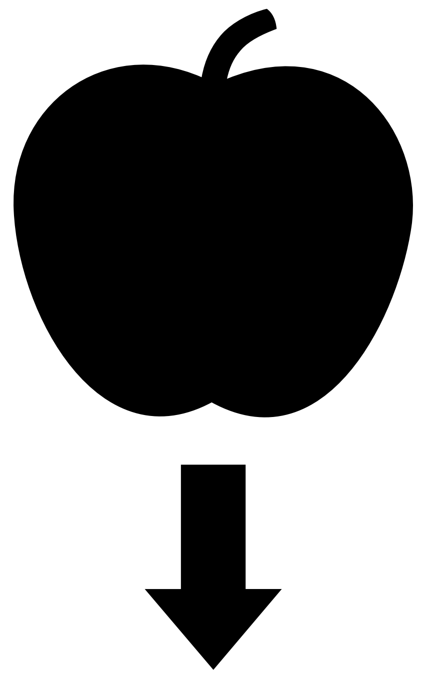
"Mutationem motis proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur"

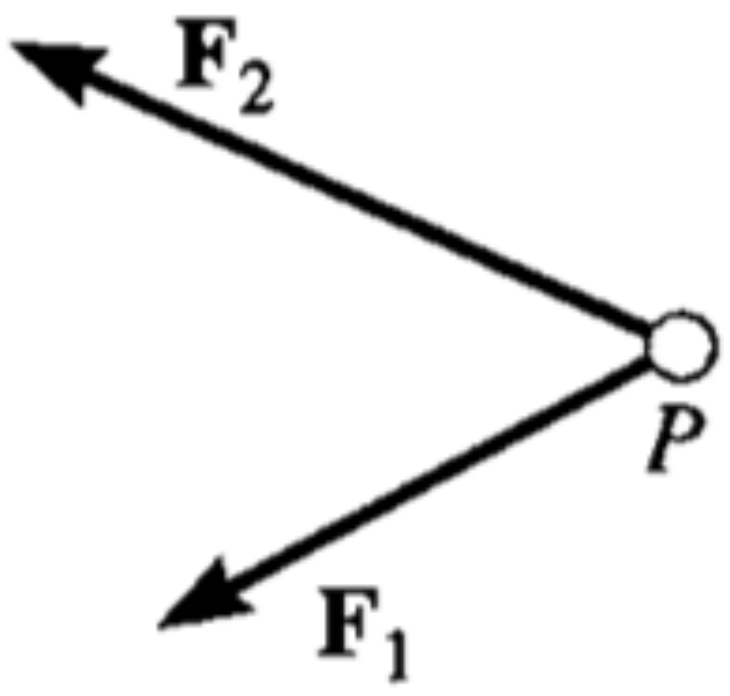


A mudança de movimento é proporcional à força motora imprimida, e é produzida na direção da linha reta na qual aquela força é imprimida

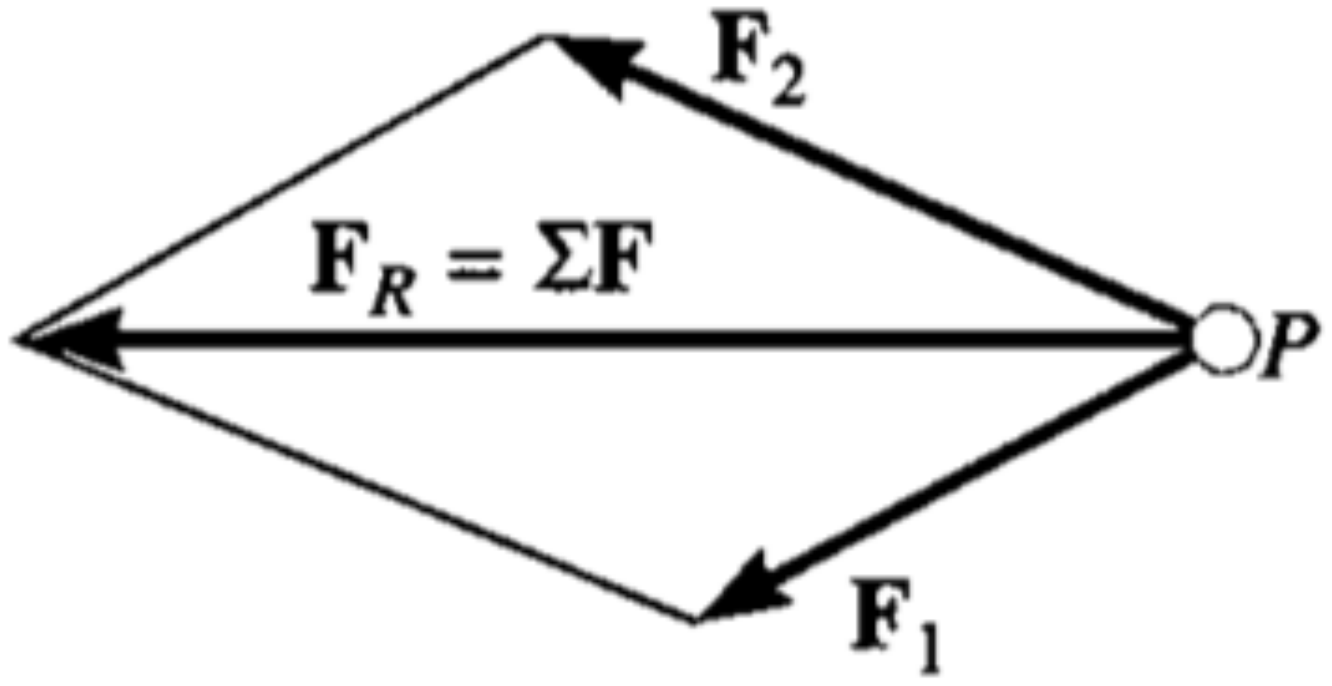
A equação do movimento de uma partícula

segunda lei

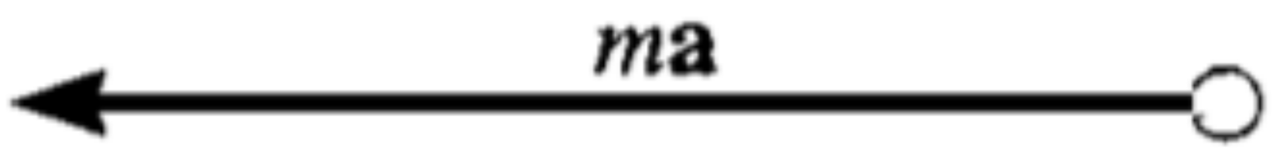




$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F_R}$$



$$\mathbf{F_R} = \frac{d(\mathbf{L})}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$$



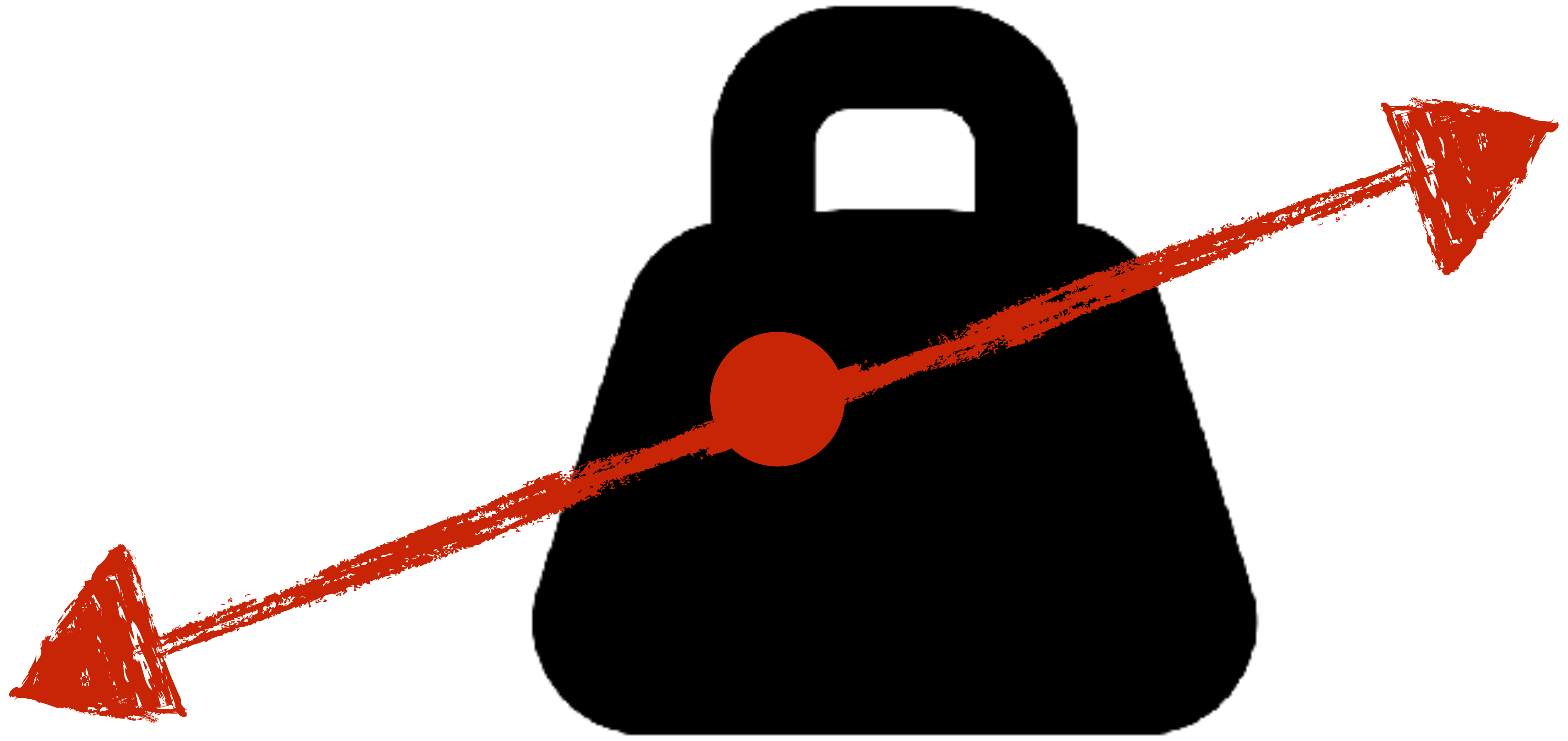
$$\mathbf{F_R} = ma$$

e essa **equação** também vale para um

corpo rígido?

$$\mathbf{F}_R = m\mathbf{a}$$

Corpo rígido

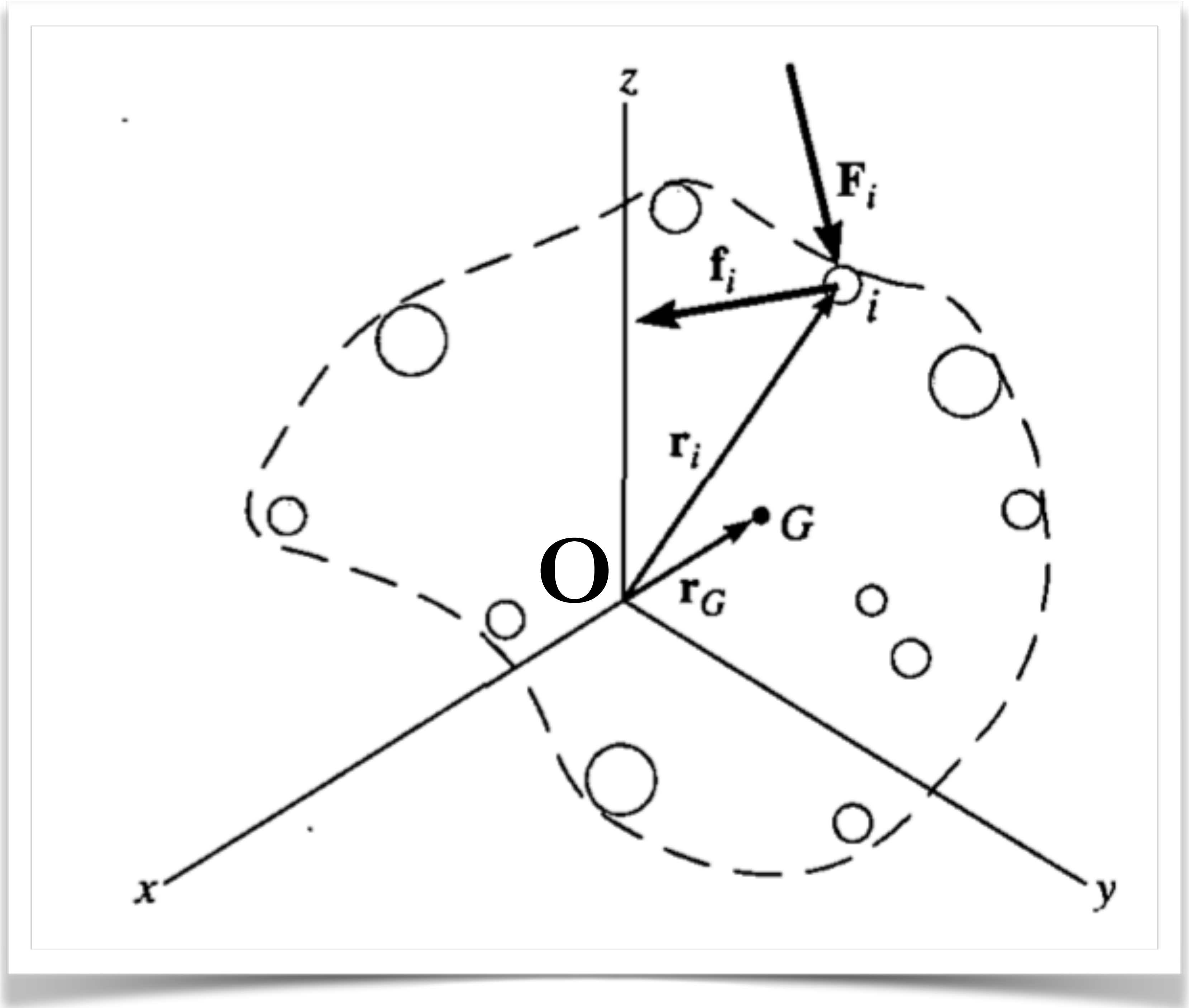


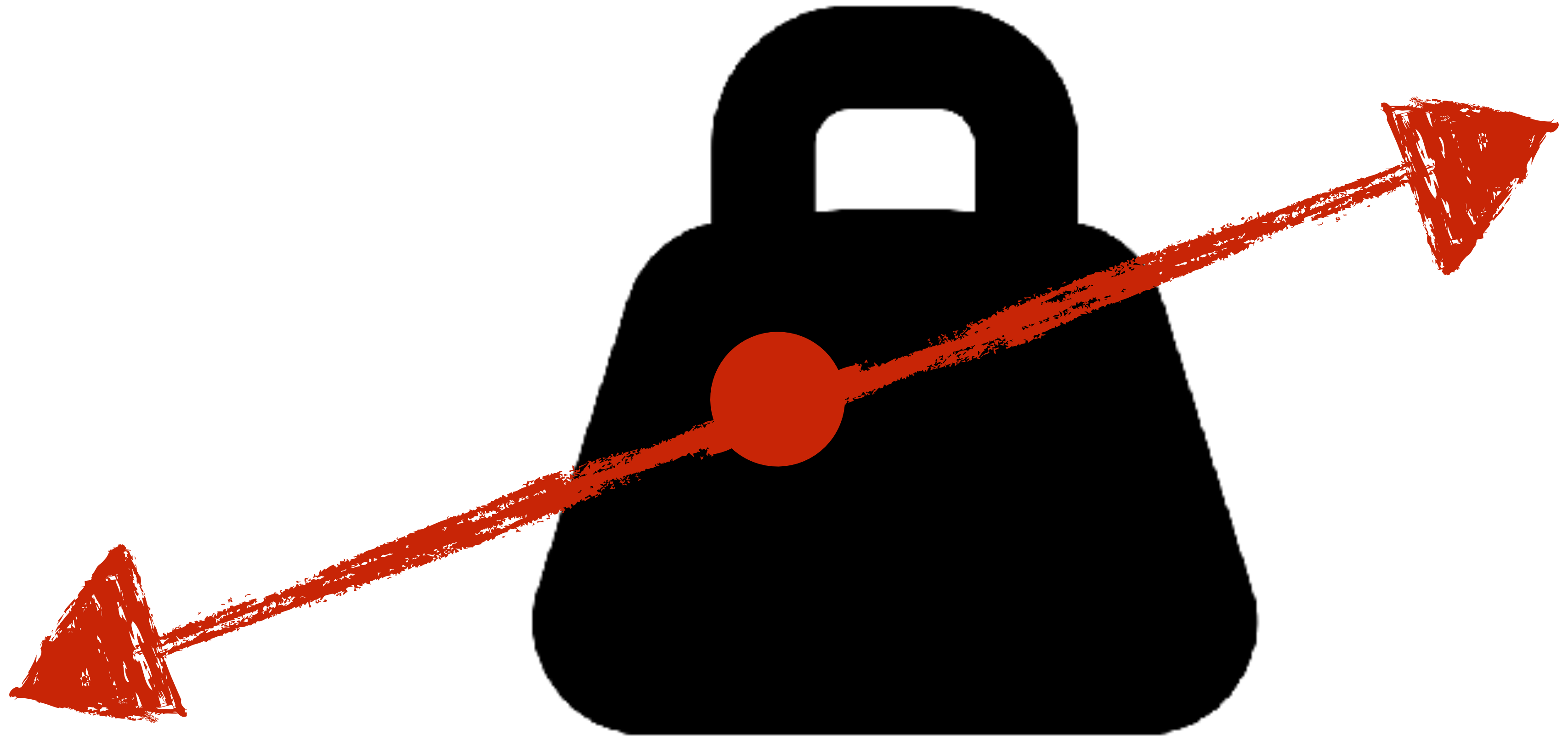
conjunto de partículas

corpo rígido IDEAL

- não se deforma !
- forças internas se cancelam!

A equação do movimento de um corpo rígido

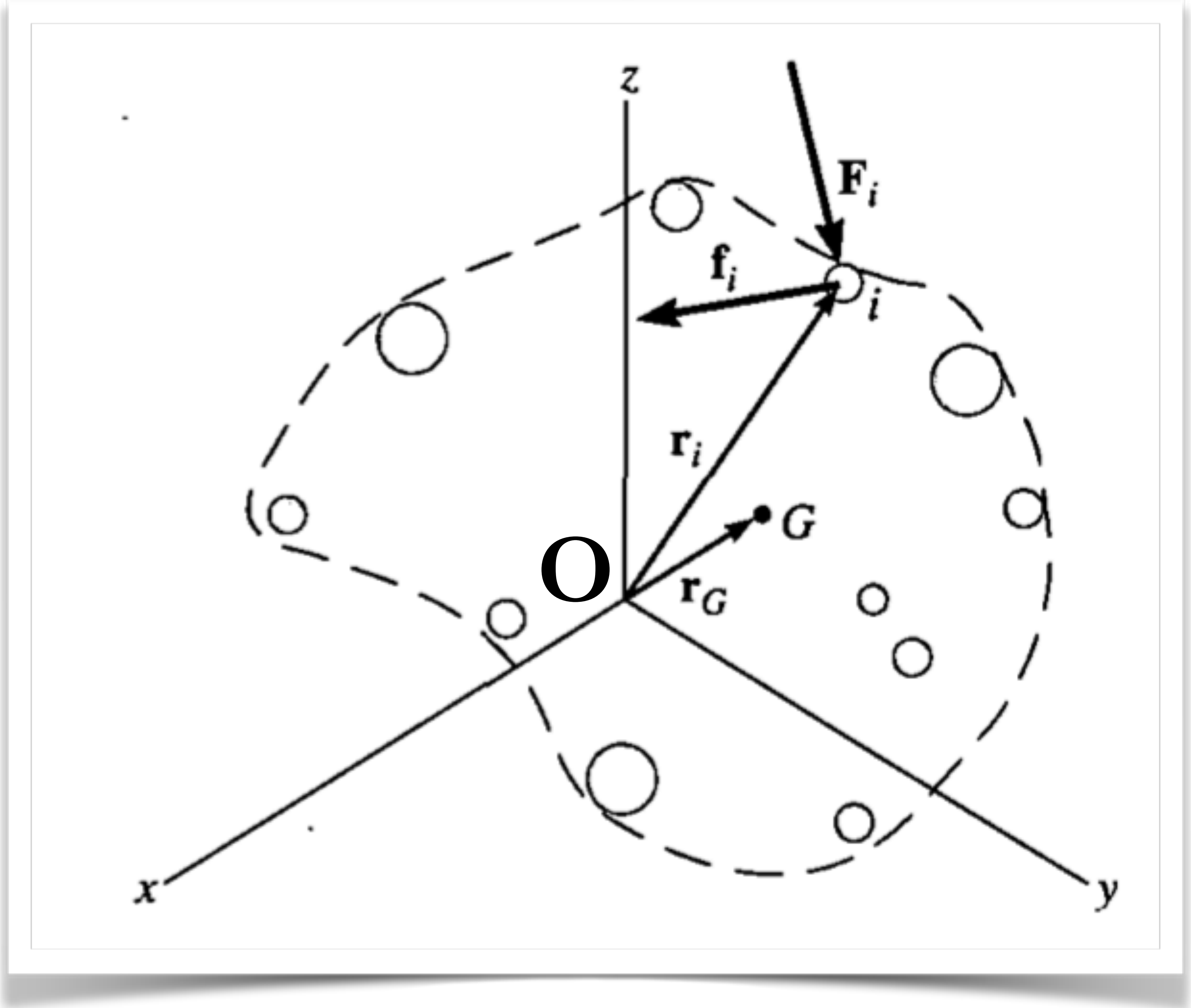




conjunto de partículas

$$\sum \mathbf{F}_i = \sum m_i \mathbf{a}_{i/O}$$

Centro de massa



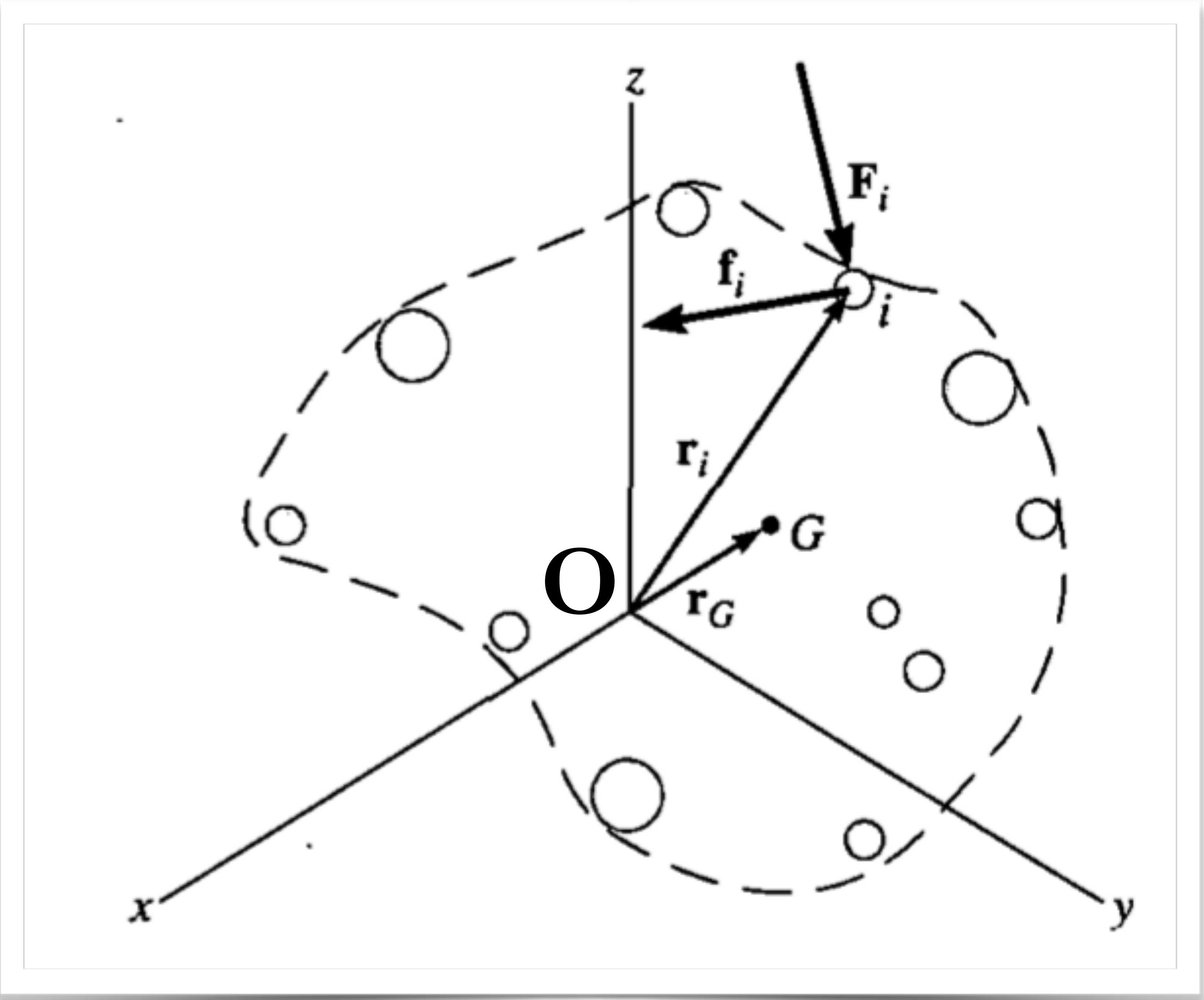
média ponderada da distância com a massa como peso

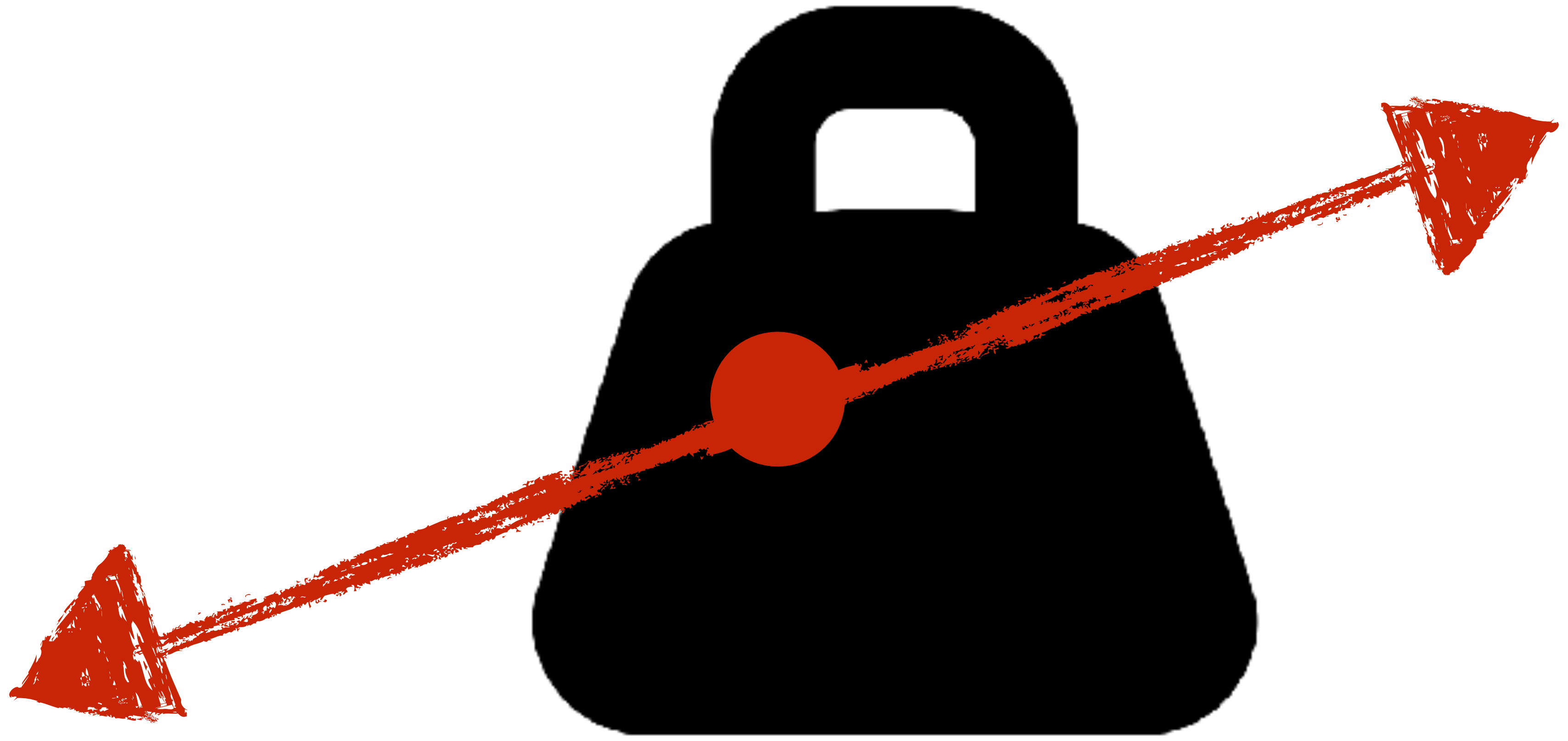
$$\mathbf{r}_{G/O} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_{i/O}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}$$

$$\mathbf{a}_{G/O} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{a}_{i/O}$$

A equação do movimento de um corpo rígido





conjunto de partículas

$$\mathbf{a}_{G/O} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{a}_{i/O}$$

$$\sum \mathbf{F}_i = \sum m_i \mathbf{a}_{i/O} = M\mathbf{a}_{G/O}$$

e essa **equação** também vale para um

corpo rígido?

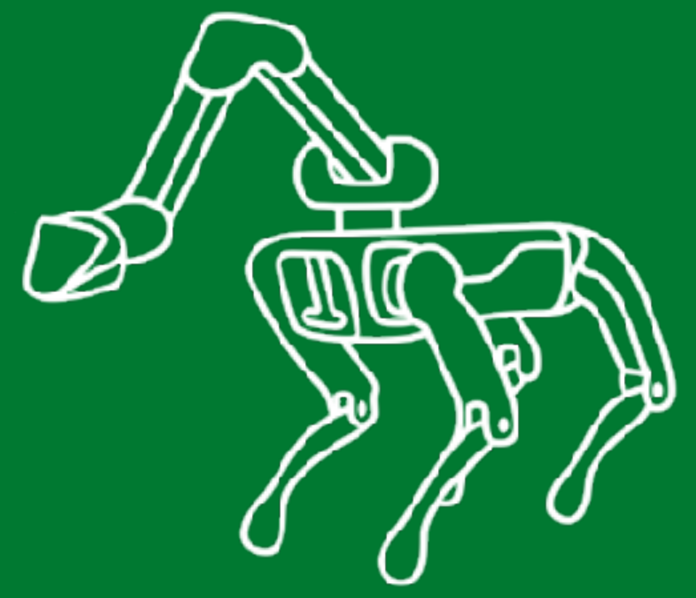
$$\mathbf{F}_R = m\mathbf{a}$$

Para seu **centro de massa**, **sim!**

$$\mathbf{F}_\mathbf{R} = m\mathbf{a}_\mathbf{G}$$

Conteúdo

Cinemática



- Segunda lei de Newton
- Newton-Euler
- Corpos articulados

Dinâmica

Conclusão

Momento linear

Também chamado de

Quantidade de movimento

"Inércia"

$$\mathbf{L} = m\mathbf{v}$$

$$\mathbf{L} = m\mathbf{v}_G$$

$\mathbf{v}$

m

$\mathbf{v}$

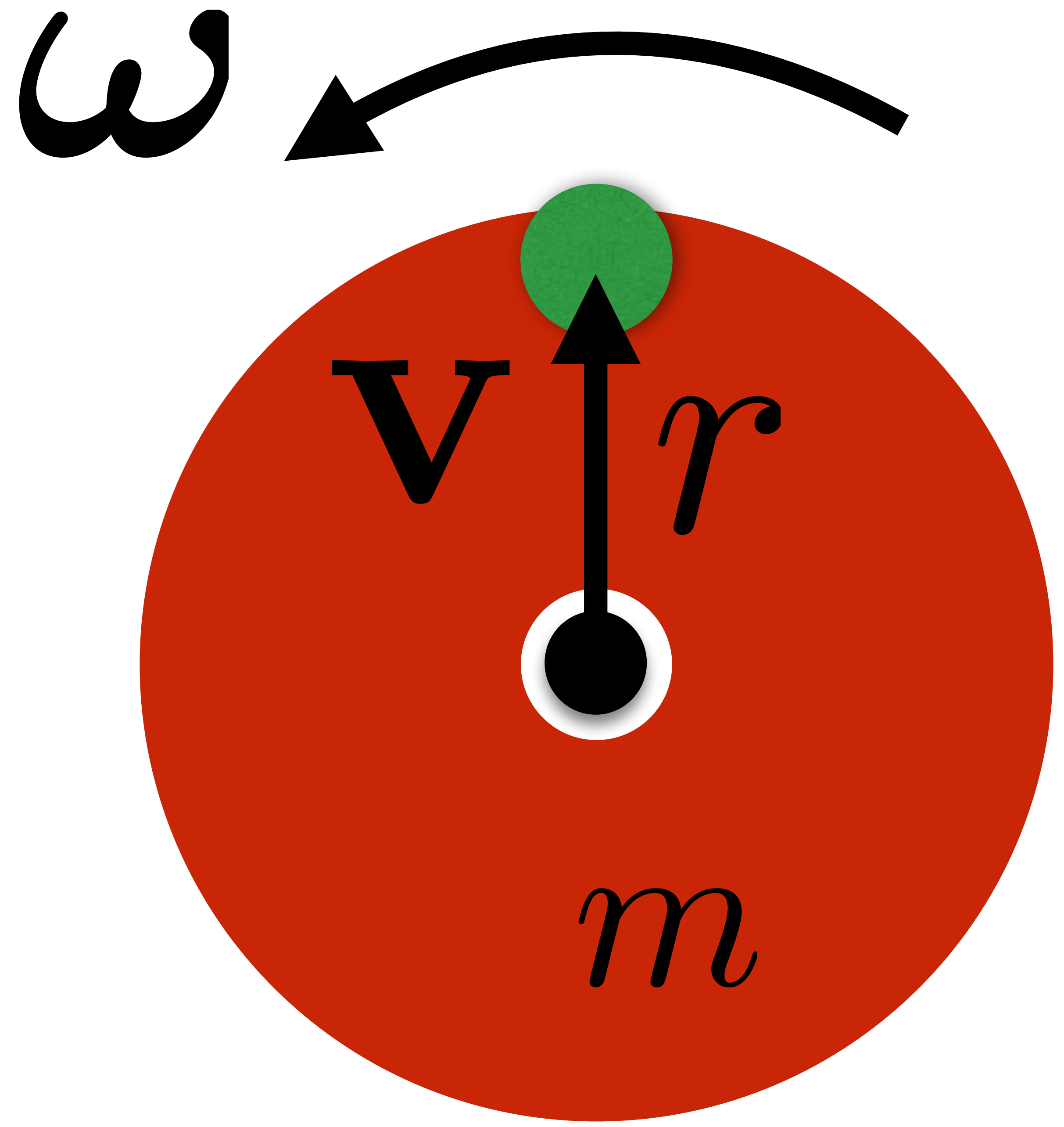
M

Momento angular

Momento linear:

$$\mathbf{L} = m\mathbf{v}$$

Momento angular:



$$\mathbf{H} = \mathbf{r} \times \mathbf{L}$$

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)\, m_i$$

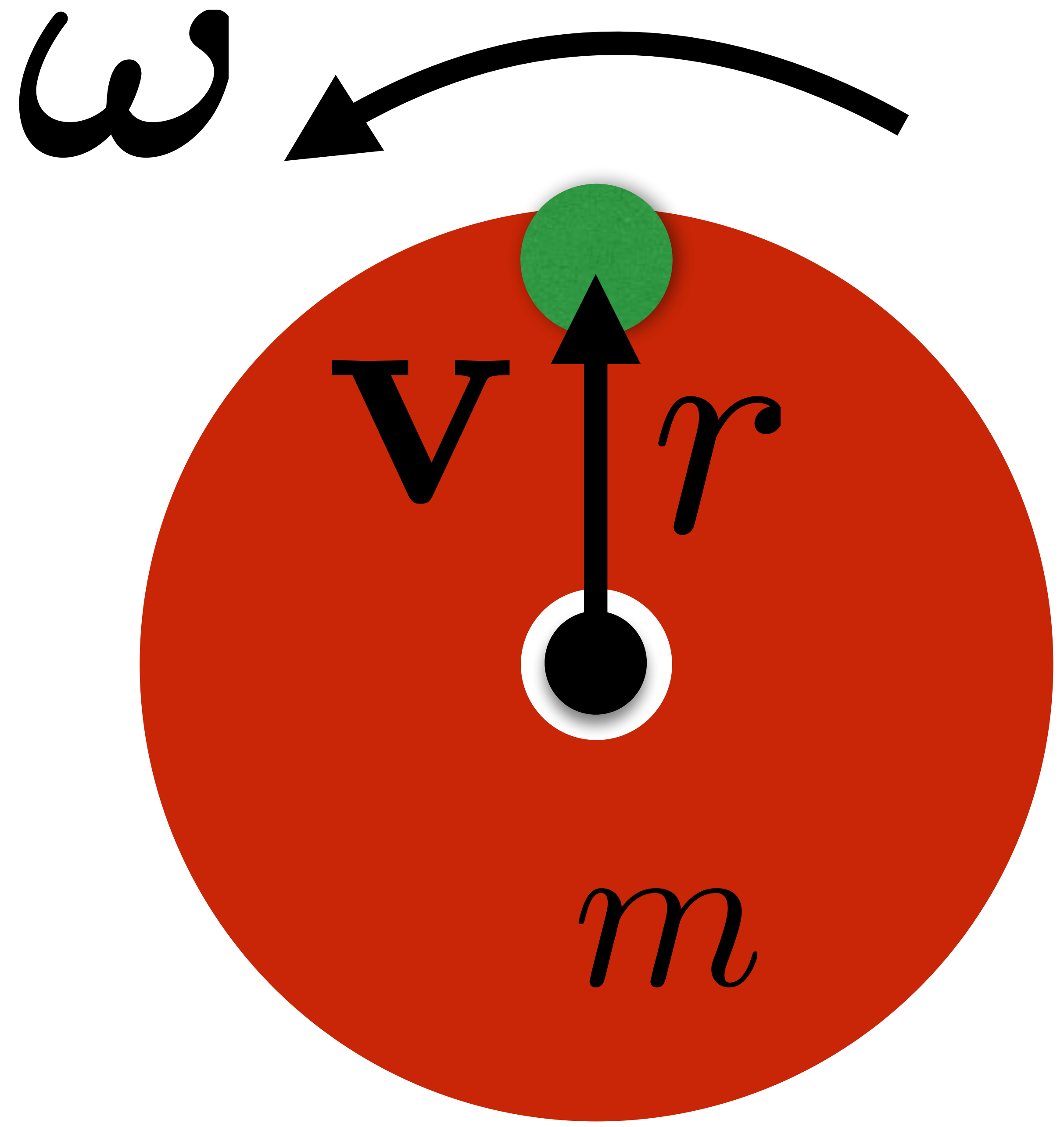
$$H_i = \omega\, r_i^2 m_i$$

Momento angular

Momento linear:

$$\mathbf{L} = m\mathbf{v}$$

Momento angular:



$$\mathbf{H} = \mathbf{r} \times \mathbf{L}$$

$$H_i = \omega\, r_i^2 m_i$$

$$H = \omega \underbrace{\sum_{i=1}^{N} r_i^2 m_i}_{}$$

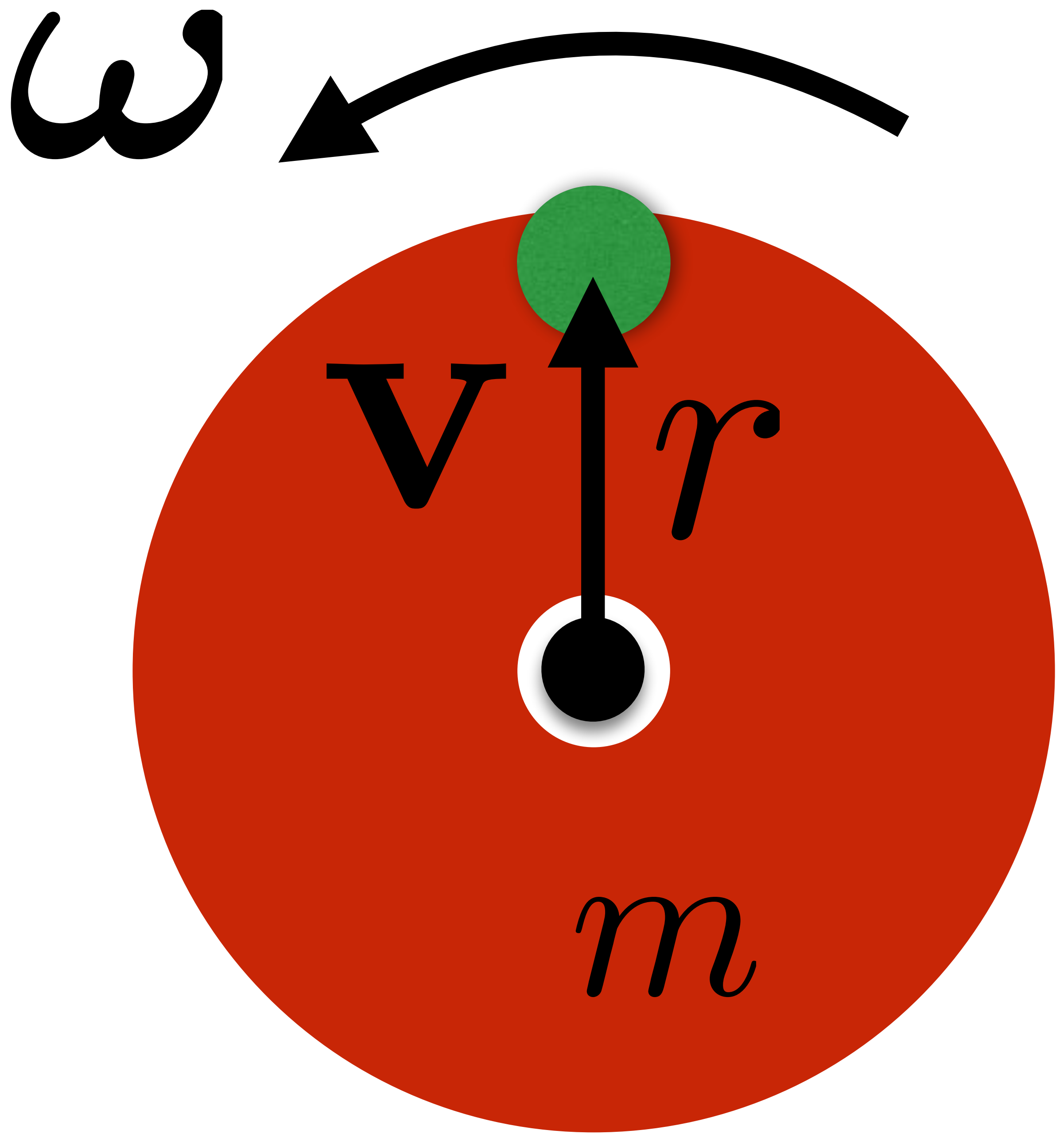
momento de inércia I

Momento de inércia

Momento linear:

$$\mathbf{L} = m\mathbf{v}$$

Momento angular:

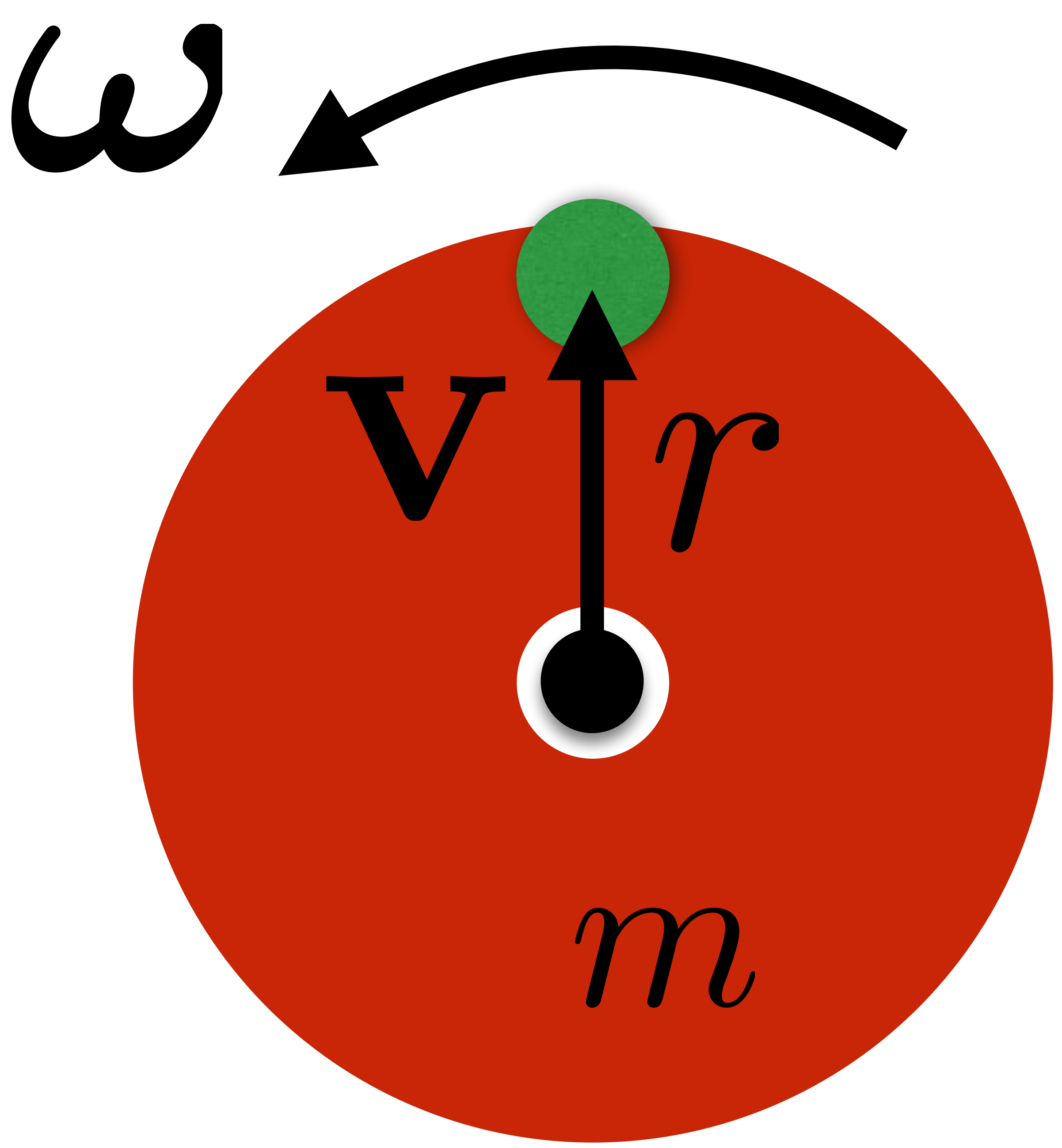


$$\mathbf{H} = \mathbf{r} \times \mathbf{L}$$

$$\mathbf{H} = I\omega$$

medida da resistência de um corpo a uma aceleração angular

Momento de inércia



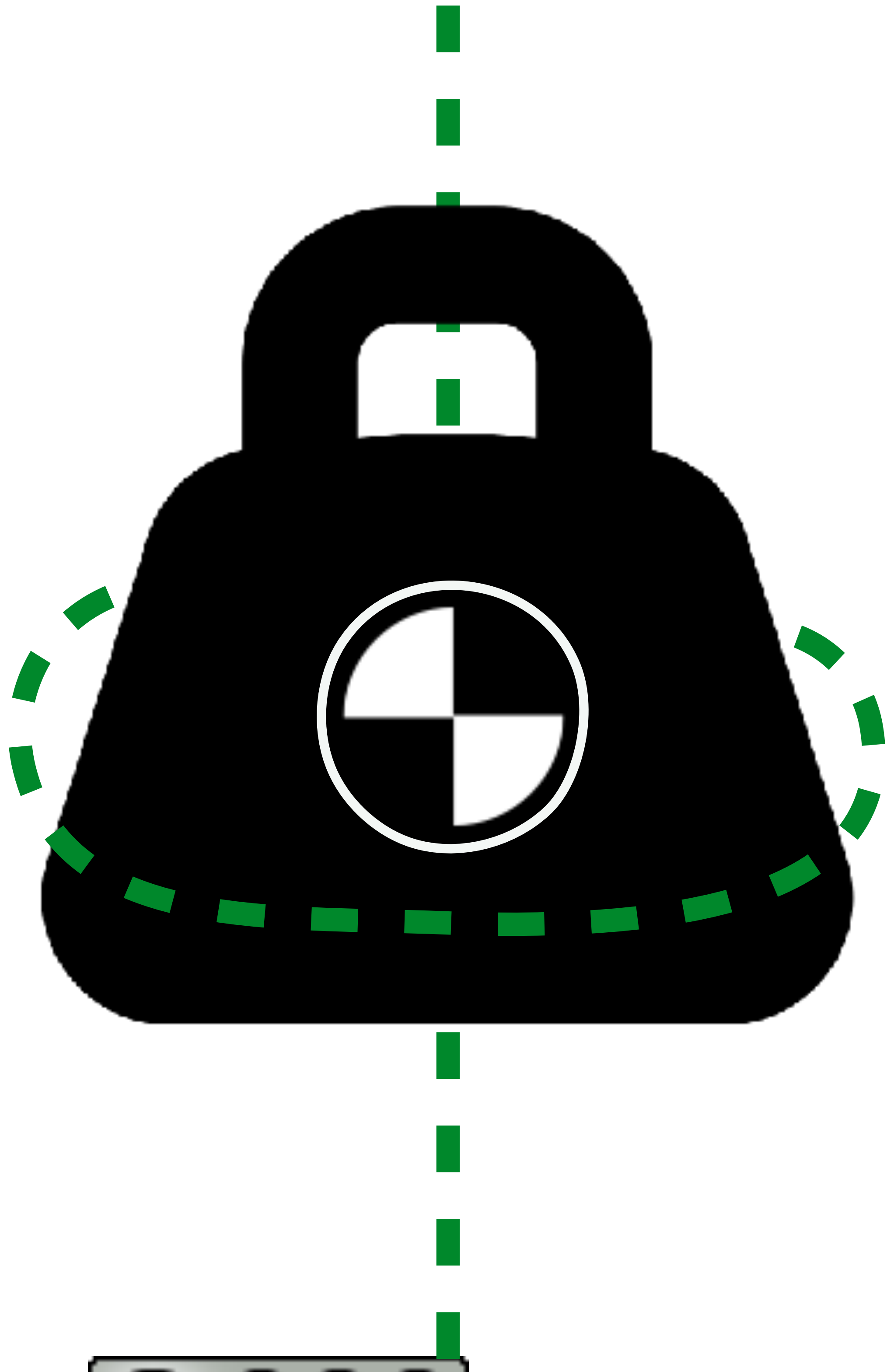
$$\mathbf{H} = I\omega$$

$$I = \sum_{i=1}^{N} r_i^2 m_i$$

$$I = \int_m r^2 dm$$

Cinética do movimento plano

Rotação
(em torno de um eixo fixo)



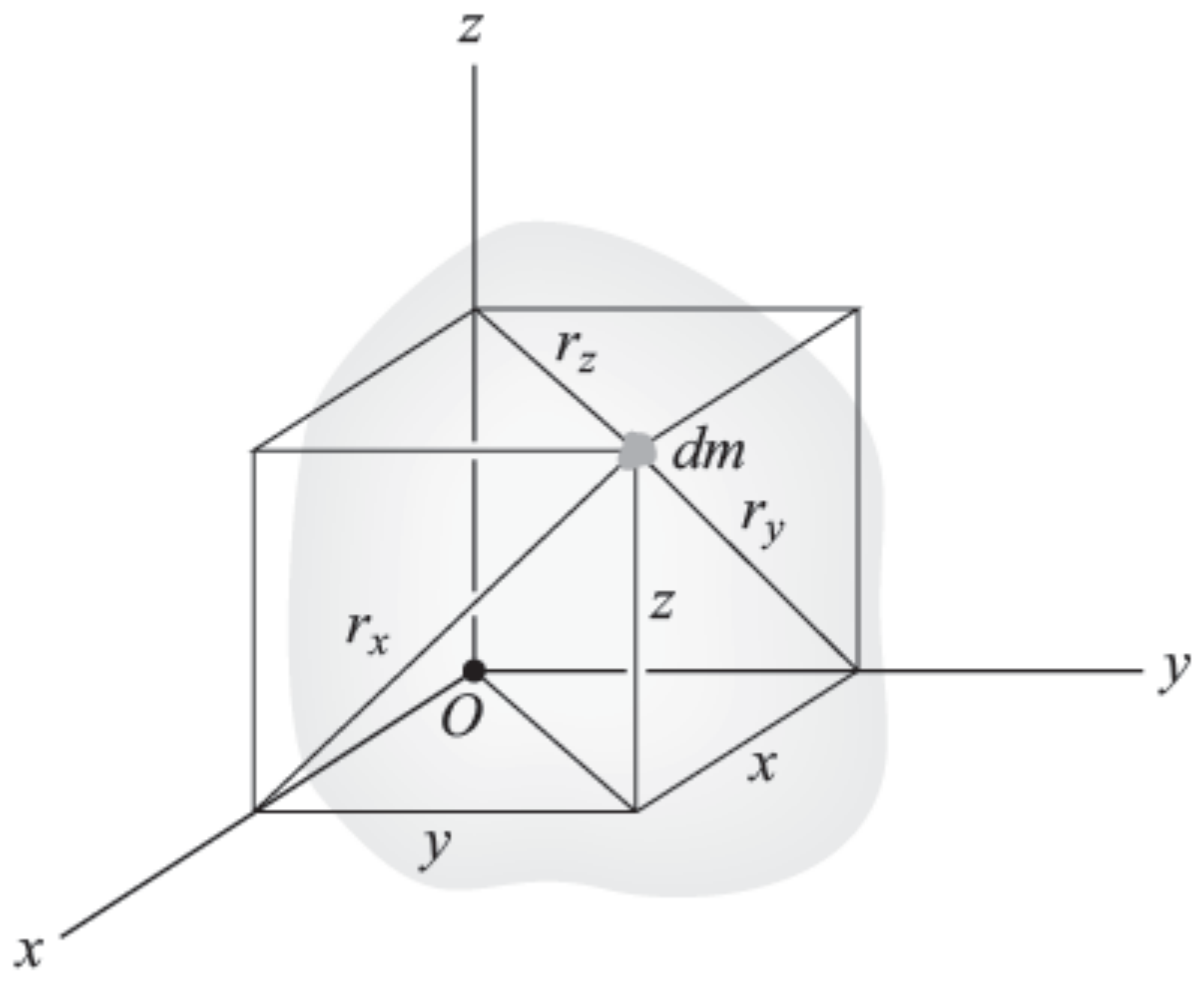
Momento angular:

$$\mathbf{H} = I\omega$$

$$\sum \mathbf{M} = \frac{d(\mathbf{H})}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt}$$

$$\sum \mathbf{M}_G = I_G \alpha$$

Cinética do movimento tridimensional



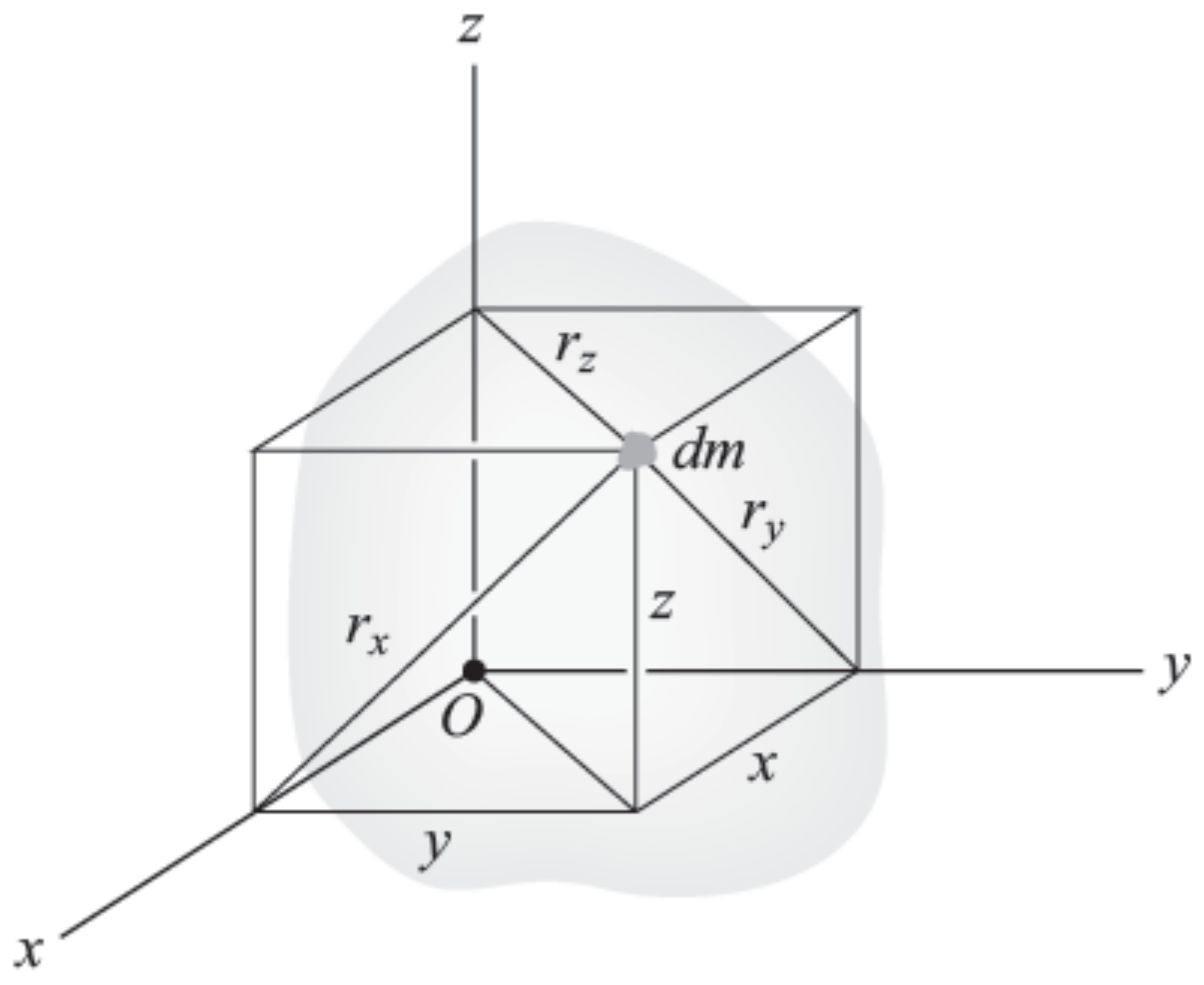
Momentos de inércia:

$$I_{xx} = \int_m r_x^2\, dm = \int_m (y^2 + z^2)\, dm$$
$$I_{yy} = \int_m r_y^2\, dm = \int_m (x^2 + z^2)\, dm$$
$$I_{zz} = \int_m r_z^2\, dm = \int_m (x^2 + y^2)\, dm$$

Produtos de inércia:

$$I_{xy} = I_{yx} = \int_m xy\, dm$$
$$I_{yz} = I_{zy} = \int_m yz\, dm$$
$$I_{xz} = I_{zx} = \int_m xz\, dm$$

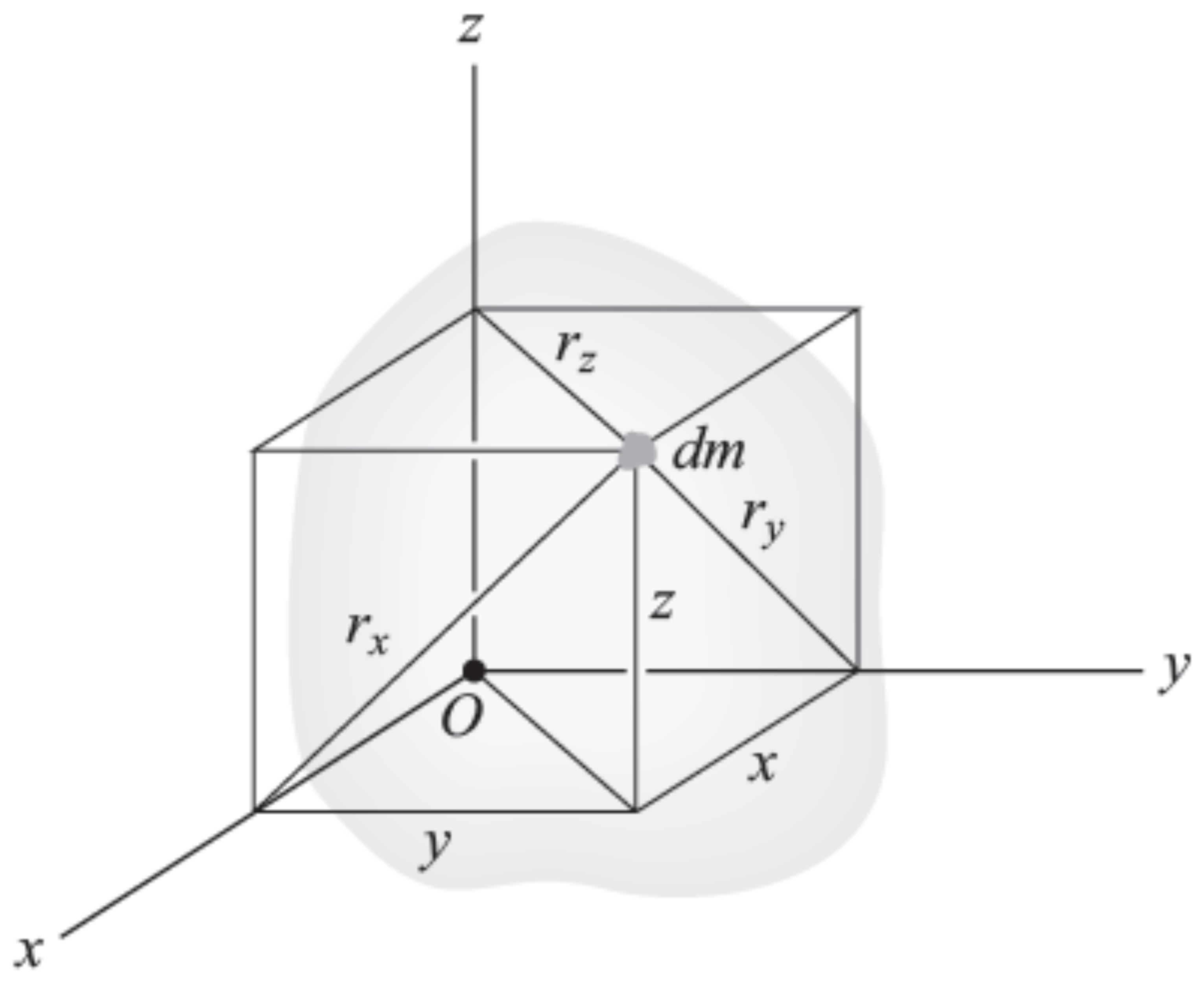
Cinética do movimento tridimensional



Tensor de inércia:

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Cinética do movimento tridimensional



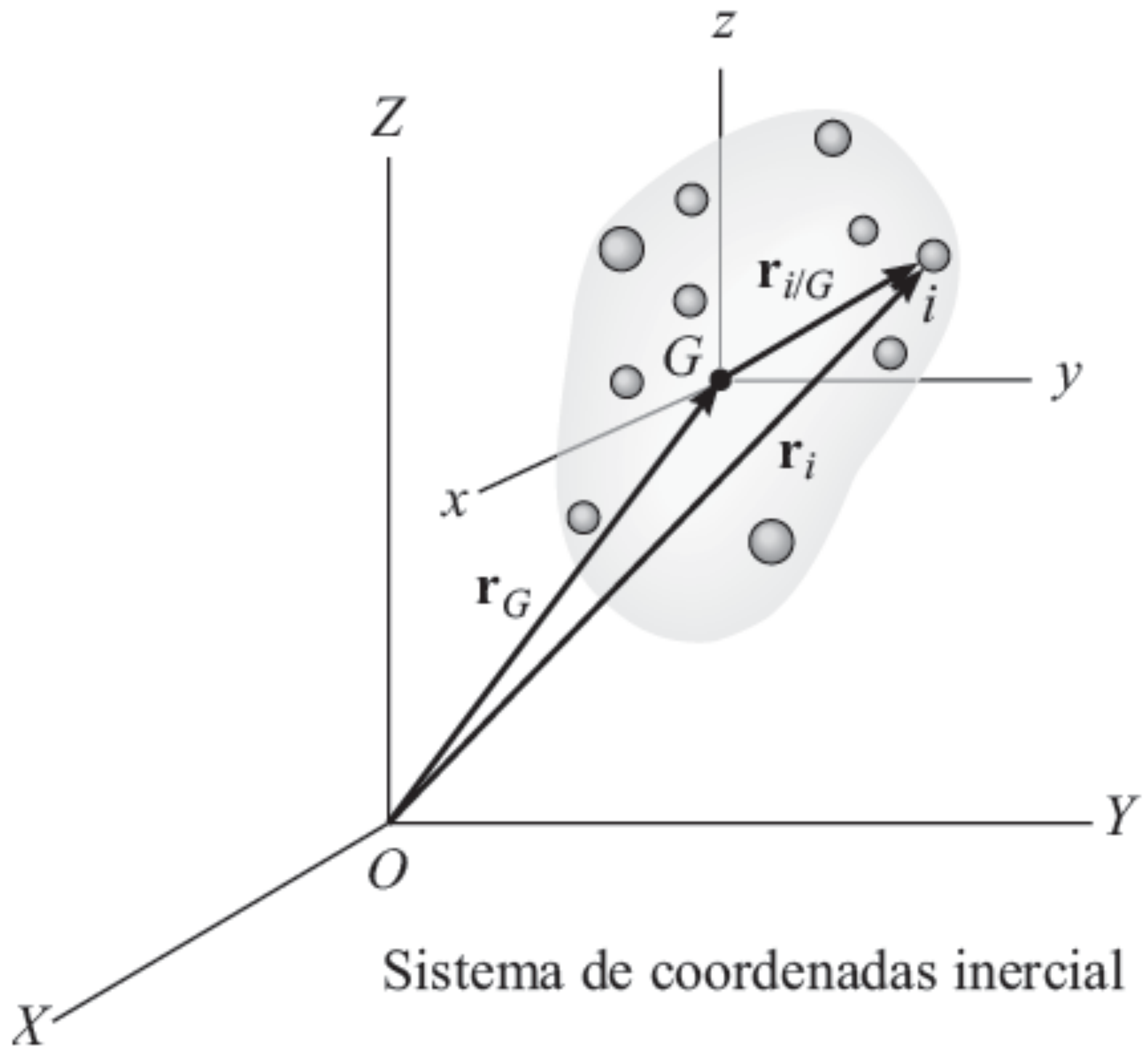
Momento angular:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$$

Equação de movimento rotacional

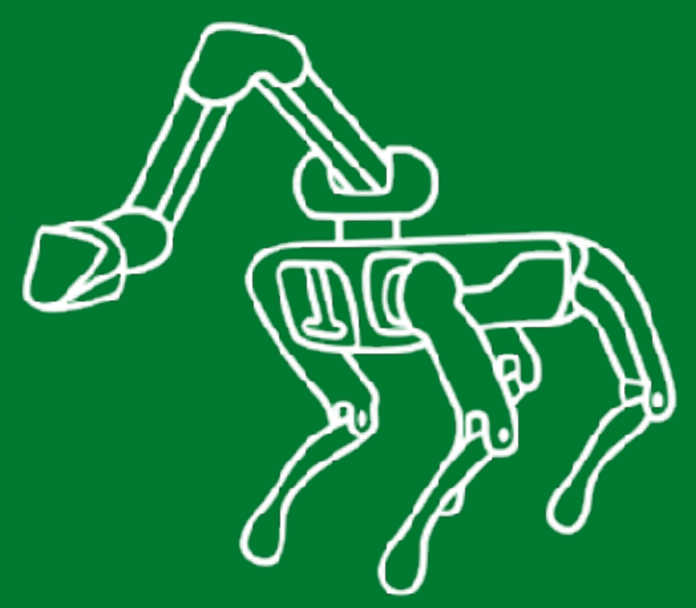
$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - I_y\Omega_z\omega_y + I_z\Omega_y\omega_z$$
$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - I_z\Omega_x\omega_z + I_x\Omega_z\omega_x$$
$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - I_x\Omega_y\omega_x + I_y\Omega_x\omega_y$$



Sistema de coordenadas inercial

Conteúdo

Cinemática



- Segunda lei de Newton
- Newton-Euler
- Corpos articulados

Dinâmica

Conclusão

Dinâmica de corpos rígidos articulados

Cinemática

Dinâmica

Conclusão

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{0}$$

$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathcal{R}^{n \times n}$	Matrix de inércia do robô
$\mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathcal{R}^{n}$	Vetor de forças de Coriolis
$\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathcal{R}^{n}$	Vetor de forças gravitacionais
$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \in \mathcal{R}^{n}$	Vetor de forças generalizadas

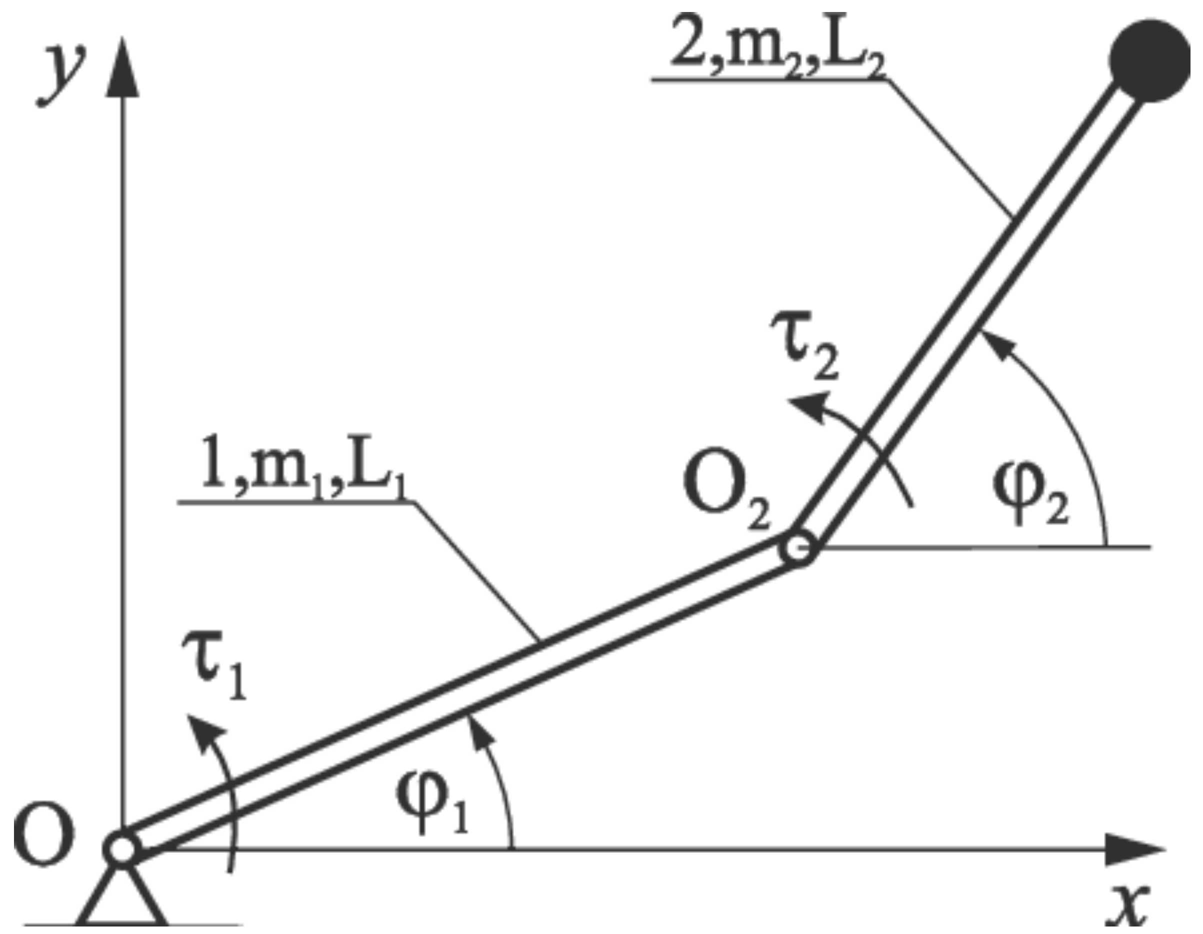
Dinâmica de corpos rígidos articulados

Cinemática

Dinâmica

Conclusão

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{0}$$



$$\underbrace{\begin{pmatrix} I_{o1} + m_2 l_1^2 + 0.25 m_2 l_2^2 + I_{c2} + m_2 l_1 l_2 c_2 & 0.25 m_2 l_2^2 + I_{c2} + 0.5 m_2 l_1 l_2 c_2 \\ 0.25 m_2 l_2^2 + I_{c2} + 0.5 m_2 l_1 l_2 c_2 & 0.25 m_2 l_2^2 + I_{c2} \end{pmatrix}}_{H(\mathbf{q})} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix}$$

$$+ \underbrace{\begin{pmatrix} -m_2 l_1 l_2 s_2 (\dot{\theta}_1 + 0.5\dot{\theta}_2)\dot{\theta}_2 \\ 0.5 m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 \end{pmatrix}}_{C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})} + \underbrace{\begin{pmatrix} (0.5 m_1 + m_2) l_1 g c_1 + 0.5 m_2 l_2 g c_{12} \\ 0.5 m_2 l_2 g c_{12} \end{pmatrix}}_{G(\mathbf{q})} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}$$

Dinâmica de corpos rígidos articulados

Cinemática

Dinâmica

Conclusão

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{J_c}(\mathbf{q})^T \mathbf{f_c} + \mathbf{f_m} + \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0$$

$\mathbf{J_c}(\mathbf{q}) \in \mathcal{R}^{n_c \times n}$ Matrix Jacobiano dos pontos de contato

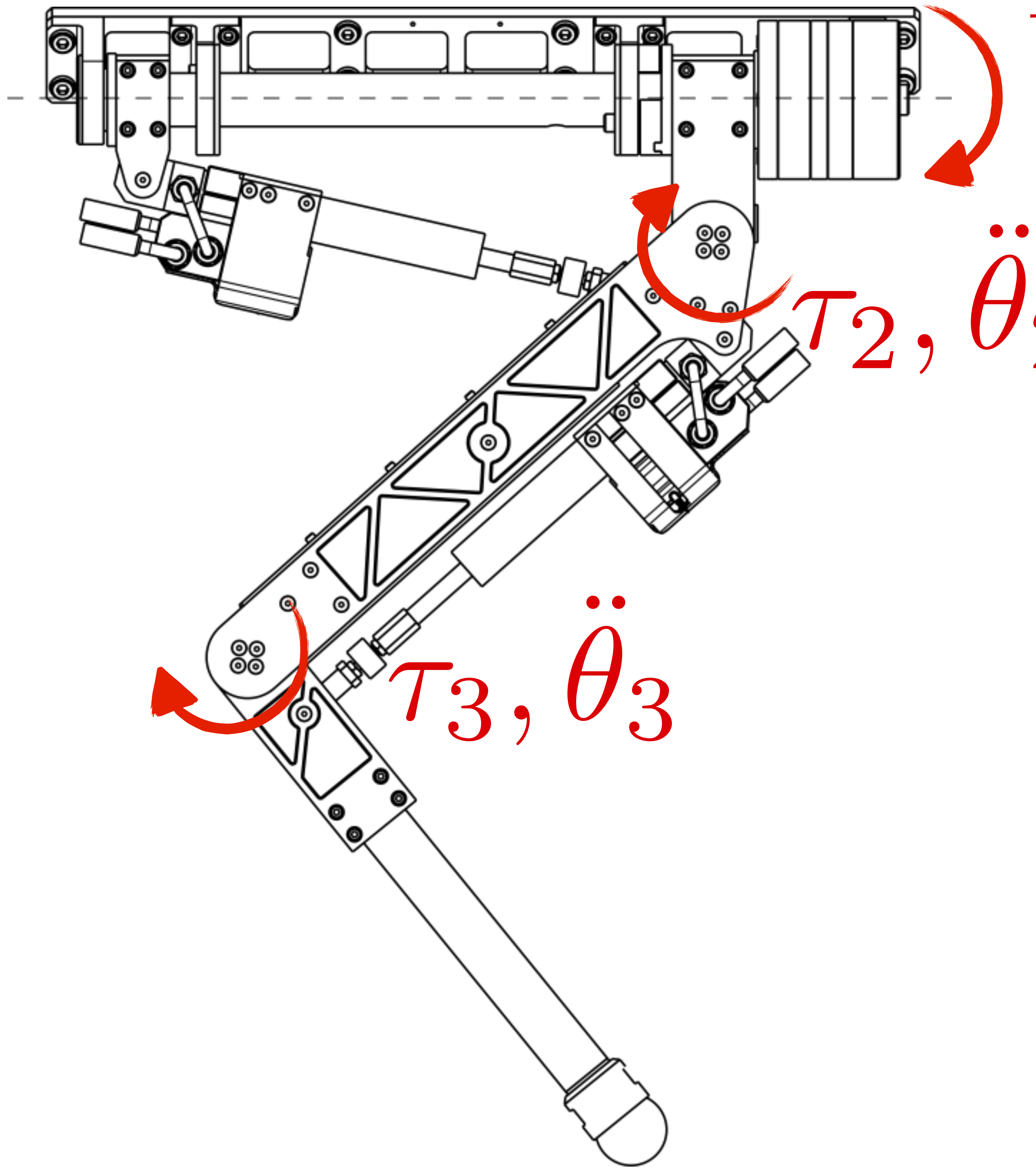
$\mathbf{f_c} \in \mathcal{R}^{n_c}$ Vetor de forças de contato

$\mathbf{f_m} \in \mathcal{R}^{n}$ Vetor de forças dos motores (atuadores)

$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \in \mathcal{R}^{n}$ Vetor de forças externas generalizadas

Dinâmica de corpos rígidos articulados

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \boldsymbol{\tau} = 0$$



Dinâmica direta (p/ **simulação**)

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1}(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))$$

"Dinâmica inversa" (p/ **controle**)

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_{\mathrm{d}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

$q = [\theta_1, \ldots, \theta_n]$

Conteúdo

Cinemática

Dinâmica

- Bibliografia

Conclusão

Bibliografia

HIBBELER, RUSSELL C. Dinâmica: mecânica para engenharia. Pearson Education do Brasil, 2005.

SICILIANO, BRUNO, and OUSSAMA KHATIB. Springer handbook of robotics. Springer, 2016.

FEATHERSTONE, ROY. Rigid body dynamics algorithms. Springer, 2014.

BUCHLI, J.; BOAVENTURA, T. Impedance control for bioinspired robots. In: Bioinspired Legged Locomotion – Models, Concepts, Control and Applications. Elsevier, 2017. ISBN 9780128037669.


That's all Folks!