1. Solução maximal

Sabendo que o P.V.I.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} &= f(x,y). \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases} \tag{1}$$

possui solução *local* única em um intervalo em torno de x_0, uma pergunta natural é se a solução obtida pode ser estendida e, se sim, até onde. Ou seja, podemos perguntar qual seria o 'maior intervalo' no qual a solução pode ser definida. Vejamos inicialmente alguns exemplos:

Exemplo 1.1. *Consideremos o problema*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y^2. \\ y(1) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Observemos que $f(x,y) = y^2$ é função de classe C^1 em todo o plano $\mathbb{R}^2$. Podemos verificar que $\varphi(x) = \frac{1}{2-x}$ é solução do P.V.I, definida em $(-\infty, 2)$. Mas $\varphi(x)$ não pode ser estendida a um intervalo maior pois $\lim_{x\to 2^-} \varphi(x) = +\infty$. Entretanto, se a condição inicial em (2) for substituída por $y(1) = 0$, a solução $y(x) \equiv 0$ está definida em $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.2. *O P.V.I.*

$$\begin{cases} y' = e^{-y}. \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Date: September 5, 2020.

tem a solução $\varphi(x) = \ln(x+1)$ *definida para* $x > -1$.

Exemplo 1.3. *O P.V.I.*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}. \\ y(\frac{1}{\pi}) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

tem a solução $\varphi(x) = sen\ \frac{1}{x}$ *definida para* $x > 0$.

Pergunta: Porque esta solução não pode ser estendida? (observe que o domínio onde a equação está definida não inclui o eixo $x = 0$).

Teorema 1.4. *Nas hipóteses do Teorema de Existência e Unicidade, toda solução do P.V.I.*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} &= f(x,y). \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases} \tag{5}$$

pode ser estendida de maneira única a um intervalo maximal, o qual é aberto.

Prova. Consideremos o conjunto de todas as soluções $\{\varphi_\alpha : I_\alpha \to \mathbb{R}, \quad \alpha \in \Lambda\}$ de (1) e seja $I := \bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$.

Então I é um intervalo pois é união de intervalos contendo um ponto comum x_0. Definimos uma solução $\Phi : I \to \mathbb{R}$ da seguinte forma.

Dado $x \in I$, seja $\varphi_\alpha : I_\alpha \to \mathbb{R}$ solução qualquer de (1) com $x \in I_\alpha$. Definimos $\Phi(x) = \varphi_\alpha(x)$. (Observe que a definição independe da escolha da solução φ_α, por unicidade da solução local). É imediato que Φ é solucção do P.V.I. e é uma extensão de qualquer solução, ou seja é *maximal*.

Falta mostrar que I é aberto. Suponhamos, por contradição que I contenha um de seus extremos, digamos o extremo direito, b. Então, pelo Teorema de Existência e Unicidade, existe uma solução local $\phi : J \to \mathbb{R}$ do P.V.I

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} &= f(x,y). \\ y(b) &= \Phi(b). \end{cases}$$

Podemos então estender a solução Φ a um intervalo maior definindo

$$\tilde{\Phi}(x) = \begin{cases} \Phi(x), \text{ se } x \in I \\ \phi(x), \text{ se } x \in J \end{cases}$$

Então $\tilde{\Phi}$ está bem definida, por unicidade e estende a solução maximal Φ, o que é uma contradição. □

Proposição 1.5. *Nas condições do Teorema de Existência e Unicidade, se $\Phi : (a,b) \to \mathbb{R}$ é solução maximal do P.V.I (1) e $K \subset \Omega$ é compacto então existe $\tau < b$ tal que $(\tau, \Phi(\tau)) \notin K$ e existe $\eta > a$ tal que $(\eta, \Phi(\eta) \notin K$.*

Esboço da prova: Suponhamos que $\Phi(x) \in K$, para todo $x \in [x_0, b[$. Então, como f é limitada em K, teremos $|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|$, para alguma constante C e todo x, com $x_0 \leq x_1 < x_2 < b$. Mas então segue que existe o limite $\lim_{x \to b-} \Phi(x)$. Usando o teorema de Existência e Unicidade, podemos estender a solução para $x > b$, contra a hipótese de maximalidade do intervalo.

Corolário 1.6. *Nas condições da Proposição 1.5 se Ω contém um semiplano $x > \bar{x}$ e $\Phi : (a,b) \to \mathbb{R}$ é solução maximal do P.V.I (1) então ou $b = +\infty$, ou $\limsup_{x \to b} |\Phi(x)| = +\infty$.*

Esboço da prova: Caso contrário, o gráfico de Φ estará contido em um compacto, contrariando a proposição. [1] □

[1] Com algum esforço adicional, pode-se provar que $\lim_{x \to b} \Phi(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to b} \Phi(x) = -\infty$. De fato, se isto não ocorrer, então existirá uma seqência $x_n \to b-$ tal que $\Phi(x_n) \to$ (algum) q. Se R é um retângulo com centro em (b,q), então R contém a sequência $(x_n, \Phi(x_n)$, para n suficientemente grande. Como f é limitada em R, a variação de Φ será limitada em R e seu gráfico permanecerá em R, para $x \geq x_n$, n grande, o que contraria o Corolário.