EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE 1^a ORDEM

1. Solução geral e Teorema de Existência de Unicidade

Consideremos novamante a equação diferencial ordinária de 1^a ordem, escrita na forma normal:

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

Em certos casos, usando manipulações e integrações podemos encontrar a família de todas as soluções de 1, usualmente denominada **solução geral** de 1.

Exemplo 1.1. *Consideremos a equação $y' = y$. Temos então (se $y \neq 0$), $\frac{y'}{y} = 1 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \ln|y| = 1 \Leftrightarrow \ln|y| = x + C \Leftrightarrow |y| = e^C \cdot e^x$, sendo C uma constante real Daí obtemos $y = \pm e^C \cdot e^x = Ke^x$, K uma constante real não nula. Agora, se $K = 0$, obtemos $y \equiv 0$ que, como se pode verificar, também é solução da equação. Além disso, essas são as únicas soluções do problema pois, se φ for solução no intervalo I, então: $(e^{-x}\varphi)' = (-e^{-x}\varphi) + (e^{-x}\varphi) = 0$, de onde decorre que $(e^{-x}\varphi) = k$ no intervalo I e, portanto, $\varphi = ke^x$.*

Assim, a solução geral da equação é $y(x) = Ke^x$, K constante arbitrária.

Dados valores arbitrários, x_0 e y_0, podemos sempre encontrar a constante K de tal forma que $y(x_0) = y_0$. De fato: $y(x_0) = y_0 \Leftrightarrow Ke^{x_0} = y_0 \Leftrightarrow K = y_0 \cdot e^{-x_0} \Leftrightarrow y(x) = y_0 \cdot e^{(x-x_0)}$.

Date: September 3, 2020.

A situação descrita no (1.3) ilustra o que ocorre no caso geral, a *solução geral* inclui uma constante arbitrária, determinada pelas *condições iniciais*. De fato, temos o seguinte resultado fundamental.

Teorema 1.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, aberto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponhamos que a derivada parcial de f, em relação à segunda variável $\frac{\partial f}{\partial y}$ seja contínua também. Então, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe um intervalo aberto I contendo x_0 e uma função diferenciável $\Phi : I \to \mathbb{R}$ com $(x, \Phi(x)) \in \Omega$, para cada $x \in I$, que é solução do problema de valor inicial:*

$$\left\{ \begin{array}{rl} \frac{dy}{dx} & = f(x,y). \\ y(x_0) & = y_0. \end{array} \right. \tag{2}$$

A solução é única no seguinte sentido: se existir um intervalo J e contendo x_0 e e uma função diferenciável $\varphi : I \to \mathbb{R}$ com $(x, \varphi(x)) \in \Omega$, para cada $x \in I$, que tamém é solução do problema de valor inicial, então $\varphi(x) = \Phi(x)$ para todo $x \in I \cap J$.

Faremos uma da prova mais adiante, depois de considerar alguns casos em que uma solução explícita pode ser encontrada. De fato, as condições exigidas no enunciado podem ser um pouco relaxadas mas *alguma* regularidade é necessária, especialmente para a parte de unicidade.

Exemplo 1.3. *A função $y = \frac{1}{16}x^4$ é uma solução da equação $y' = x|y|^{1/2}$, no intervalo $I = \mathbb{R}$, com condição inicial $y(0) = 0$. Por outro lado, a função $y(x) \equiv 0$ também é solução com a mesma condição inicial. Observemos que a função $f(x,y) = x|y|^{1/2}$ é derivável em relação à variável y na origem, mas esta não é contínua.*