Cardinalidade

Seguindo Folland. Pode-se ver também Royden e Kolmogorov,

Definição 1. Seja X um conjunto. Dizemos que X é **infinito** se existir uma função bijetora de X com um subconjunto próprio de X.

Exemplo 1. Alguns conjuntos infinitos:

1. $\mathbb{N}$ com $f(n) = n + 1$.
2. $\mathbb{N}$ com $g(n) = 2n$.
3. $\mathbb{Z}$ com
$$h(x) = \begin{cases} 2x \ , \ x \geq 0 \\ 2|x| + 1 \ , \ x < 0 \end{cases}$$

Definição 2. Dizemos que um conjunto Y é **finito** se não for infinito, ou seja, se não existir uma função bijetora de Y com um subconjunto próprio dele.

Denotamos por J_n o subconjunto de $\mathbb{N}$ dado por $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, chamado de **segmento** $[1, n]$ em $\mathbb{N}$.

Proposição 1. *J_n é finito para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Seguimos por indução em n. J_1 é finito pois o único subconjunto próprio é $\emptyset$. Suponhamos que J_i é finito se $i < n + 1$. Mostremos que J_{n+1} é finito. Se ele fosse infinto haveria uma bijeção f com uma parte própria. Sem perda de generalidade, suponhamos que seja J_m com $m < n + 1$. Seja agora o conjunto $A = J_n \setminus f(n + 1)$. A é uma parte própria de J_n pela injetividade de f. Então $f\restriction_{J_n} : J_n \to A$ é uma bijeção. O que mostra que J_n é infinito (absurdo). ■

Proposição 2. *Se $Y \subset X$ e Y é infinito, então X é infinito.*

Demonstração. Existe $f : Y \to Z$ bijetora com $Z \subsetneqq Y$, logo definimos $g : X \to (X \setminus Y) \cup Z$ por:
$$g(x) = \begin{cases} x \text{ se } x \in X \setminus Y \\ f(x) \text{ se } x \in Y \end{cases}$$
Observe que $(X \setminus Y) \cup Z$ é um subconjunto próprio de X porque Z é um subconjunto próprio de Y. Assim, X é infinito. ■

Definição 3. Se $X, Y \neq \emptyset$ definimos $\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(Y)$ (resp. $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(Y)$, $\mathrm{Card}(X) \geq \mathrm{Card}(Y)$) se existir $f : X \to Y$ injetora (resp. bijetora, sobrejetora).

Proposição 3. *Se $Y \subset X$ então $Card(X) \leq Card(Y)$.*

Demonstração. A inclusão $I : Y \to X$, ie, I(x)=x é injetora ■

Proposição 4. $\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(Y) \Leftrightarrow \mathrm{Card}(Y) \geq \mathrm{Card}(X)$.

Demonstração. ($\Rightarrow$): Se $f : X \to Y$ é injetora, tomamos $x_0 \in X$ e definimos $g : Y \to X$ por:

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y) \text{ se } i \in \mathrm{Im}(f) \\ x_0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Então g é sobrejetora. ($\Leftarrow$) Seja $g : Y \to X$ sobrejetora. Então os conjuntos $g^{-1}(\{x\})$ são não vazios e disjuntos. Consideremos $\prod_{x \in X} g^{-1}(\{x\})$. Tomamos qualquer f e resulta injetora (f é um elemento do produto de conjuntos). ■

Definição 4. Dizemos que X é enumerável se existir uma bijeção dele com $\mathbb{N}$. Escrevemos $\mathrm{Card}(X) = \omega$.

Por exemplo, $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ são enumeráveis, $\mathbb{R}$ não é enumerável.

Teorema 1 (Cantor-Bernstein-Schröeder)**.** *Se* $\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(Y)$ *e* $\mathrm{Card}(Y) \leq \mathrm{Card}(X)$*, então* $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(Y)$.

Demonstração. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ injetoras. Faremos partições de X e Y em três subconjuntos. Seja $x \in X$, se $x \in g(Y)$, tomamos $g^{-1}(x) \in Y$. Se $g^{-1}(x) \in \mathrm{Im}(f)$, tomamos $f^{-1}(g^{-1}(x))$ e assim sucessivamente. Daí há 3 possibilidades para x que definem 3 subconjuntos:

1. $x \in X_\infty$ se o processo continuar indefinidamente.
2. $x \in X_X$ se o processo terminar num elemento de $X \setminus \mathrm{Im}(g)$. O próprio x inicial também pode estar nesse caso.
3. $x \in X_Y$ se o processo terminar nem elemento de $Y \setminus \mathrm{Im}(f)$.

Analogamente definimos Y_∞, Y_X e Y_Y. Definamos a função $h : X \to Y$ por:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ se } x \in X_\infty \cup X_X \\ g^{-1}(x) \text{ se } x \in X_Y \end{cases}$$

Observemos que $f\restriction_{X_\infty} : X_\infty \to Y_\infty, f\restriction_{X_X} : X_X \to Y_X$ e $g\restriction_{Y_Y} : Y_Y \to X_Y$ são bijetoras, portanto, h é bijetora. ■

Proposição 5. $\mathrm{Card}(X) < \mathrm{Card}(\wp(X))$

Demonstração. A função $f : X \to \wp(X)$ dada por $f(x) = \{x\}$ é injetora. Seja $g : X \to \wp(X)$ qualquer, mostremos que não pode ser sobrejetora. Consideremos $Y = \{x \in X \mid x \notin g(x)\}$, mostremos que $Y \notin \mathrm{Im}(g)$. Se $Y = g(x)$ para algum $x \in X$, ou $x \in Y$ ou $x \notin Y$:

1. Se $x \in Y$, então $x \notin g(x) = Y$ (absurdo).
2. Se $x \notin Y$, então x é tal que $x \notin g(x)$ e, portanto,verifica a condição de pertencer a Y (absurdo).

Portanto $Y \notin \mathrm{Im}(g)$ e g não pode ser sobrejetora. ■

Proposição 6. *Produto de dois conjuntos enumeráveis é enumerável e união enumerável de enumeráveis é enumerável, isto é:*

1. *Se X, Y são enumeráveis, então $X \times Y$ é enumerável.*
2. *Se A é enumerável e X_α é enumerável para cada $\alpha \in A$, então $\cup_{\alpha \in A} X_\alpha$ é enumerável.*

Demonstração. Para o primeiro item, basta ver que $\mathbb{N}^2$ é enumerável enumerando sucessivamente pelas retas $\{j + k = n\}$. Agora ao segundo, temos, para cada $\alpha \in A$ uma bijeção $f_\alpha : \mathbb{N} \to X_\alpha$, logo $f : \mathbb{N} \times A \to \cup_{\alpha \in A} X_\alpha$ dada por $f(n, \alpha) = f_\alpha(n)$ é sobrejetora e enumerabilidade de $\mathbb{N} \times A$ segue de A. ■

Definição 5. Dizemos que X tem a **cardinalidade do contínuo** se $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c} = \aleph_1$.

Proposição 7. $\mathrm{Card}(\wp(\mathbb{N})) = \mathfrak{c}$.

Demonstração. Se $A \subset \mathbb{N}$ definimos $f : \wp(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ por

$$f(A) = \begin{cases} \sum_{n \in A} \frac{1}{2^n} \text{ se } \mathbb{N} \setminus A \text{ é infinito} \\ 1 + \sum_{n \in A} \frac{1}{2^n} \text{ se } \mathbb{N} \setminus A \text{ é finito} \end{cases}$$

Assim f é injetora. Definamos $g : \wp(\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(A) = \begin{cases} \log\left(\sum_{n \in A} \frac{1}{2^n}\right) \text{ se } A \text{ é limitado inferiormente } 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Logo g é sobrejetora. Pelo teorema, segue o resultado. ■