Axioma De Escolha

Seguindo Folland e Bartle.

Definição 1. Axioma da Escolha: Sejam A e X_α, $\alpha \in A$ conjuntos. Seja $\mathcal{B} = \{X_\alpha\}$. Então existe uma função $\phi : \mathcal{B} \to \cup X_\alpha$ tal que $\phi(X_\alpha) \in X_\alpha$. Ou seja, existe uma função que a cada X_α atribui um elemento do próprio X_α

Este axioma é equivalente ao Princípio da Boa Ordem e a outros Axiomas. Aqui somente enunciaremos o Princípio da Boa ordem. Para enunciá-lo, precisamos de algumas definições.

Definição 2. Dado um conjunto X uma **relação de ordem R sobre X** verifica:
1. (transitiva) se xRy e yRz então xRz
2. (antisimétrica) se xRy e yRx então xRy
A ordem chama-se **linear** se dados x, y em X então xRy ou yRx
Uma ordem linear em X é uma **boa ordem** se todo subconjunto A de X tem um elemento minimal (ou um "primeiro elemento").

Definição 3. Princípio da Boa Ordem: todo conjunto X admite uma Boa Ordem.

Exemplos:

1. $\mathbb{N}$ está bem ordenado pela ordem usual.

2. A ordem usual em $\mathbb{Z}$ é linear, mas não é Boa Ordem porque $\mathbb{Z}$ não tem elemento minimal.

3. ordem lexicográfica: em $\mathbb{R}^2$ dada por:
   a.(a,b) R (c,d) se a $\gneq$ c
   b.(a,b) R (a,d) se b $\gneq$ d
   é uma ordem linear mas não é Boa Ordem.