

# Equações Diferenciais Parciais MAP 5712 (2020)

Pedro T. P. Lopes



## Sumário

Capítulo 1. Introdução: Definição de EDP e algumas classificações (Aula do dia 2 de setembro)	5
1.1. Classificação: Linear, semilinear, quasilinear e totalmente não lineares.	6
1.2. Classificação de equações de segunda ordem: Formas Normais	9
Capítulo 2. Funções harmônicas (Aula do dia 4 de setembro)	19
2.1. O Teorema do valor médio.	20
2.2. Regularidade (Aula do dia 9 de setembro)	27
2.3. Princípio do máximo e unicidade de EDPs	30
2.4. Fórmula de Harnack (Aula do dia 11 de setembro)	33
2.5. Funções harmônicas radiais em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$	35
2.6. Teorema de Liouville	40
2.7. Representação de uma função de classe $C^2$ (Aula do dia 16 de setembro)	41
Capítulo 3. Distribuições	44
3.1. Motivação	44
3.2. Voltando ao rigor matemático	45
Capítulo 4. Equação de Poisson	57
4.1. Definição geral de solução fundamental e a equação de Poisson em $\mathbb{R}^n$	57
4.2. Problema de Poisson em abertos de $U \subset \mathbb{R}^n$ (Aula do dia 23 de setembro)	60
4.3. Exemplos de funções de Green	65
4.4. Consequências da fórmula de Poisson	74
4.5. Princípio variacional	83
Capítulo 5. Transformada de Fourier	87
5.1. Motivação	87
5.2. Definição de Transformada de Fourier	87
5.3. Propriedades básicas	91
5.4. Inversa da Transformada de Fourier e fórmula de Plancherel	94
5.5. Fórmula de inversão	94
5.6. Convolução: Definição e propriedades	96
5.7. Convolução e Transformada de Fourier	98
5.8. Fórmula de Plancherel	99
5.9. Aplicações	102
Capítulo 6. Equação do calor	105
6.1. Motivação: Dedução física	105
6.2. A equação do calor em $\mathbb{R}^n$ : Descobrimos a fórmula da solução	106
6.3. A equação do calor homogênea em $\mathbb{R}^n$ : Demonstrando a existência de solução	109
6.4. Solução da equação do calor não homogênea em $\mathbb{R}^n$ com condição inicial nula	112
6.5. Solução da equação do calor não homogênea em $\mathbb{R}^n$ com condição inicial não nula	116
6.6. Princípio do máximo para a equação do calor e suas consequências	119
6.7. Regularidade das soluções da equação do calor	124
6.8. Método variacional	125

6.9. O método de separação de variáveis	127
Aplicação à Equação do Calor.	128
6.10. Existência de solução da equação do calor em $[0, \pi]$	130
Capítulo 7. Equação da Onda	138
7.1. Dedução física da equação da onda	138
7.2. Equação da onda em $\mathbb{R}$	140
7.3. A equação da onda em $[0, \infty[$	143
7.4. A equação da onda para $n \geq 2$	145
7.5. Fórmula para a solução quando $n = 3$	147
7.6. Fórmula para a solução quando $n = 2$ : Abaixamento de ordem.	151
7.7. Princípio de Huygens	155
7.8. Problema não homogêneos	156
7.9. Resolvendo a equação de onda usando transformada de Fourier	160
7.10. Métodos de energia	163
7.11. Existência de soluções	167
Capítulo 8. Equações não lineares de primeira ordem: Método das Características	170
8.1. Problemas semilineares	171
8.2. Problemas Quasilineares	175
8.3. O problema em hiperfícies	180
Capítulo 9. Problema de Cauchy	183
9.1. O problema de Cauchy com condições de contorno em $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ .	183
9.2. O problema de Cauchy em superfícies $\Gamma$ .	184
9.3. Propagação de singularidades	187
9.4. Teorema de Cauchy-Kowalevski	188
9.5. Demonstração do Teorema de Cauchy-Kowaleski	192
9.6. O problema de Lewy	197
Capítulo 10. Notação	201

## Introdução: Definição de EDP e algumas classificações (Aula do dia 2 de setembro)

Antes de mais nada, o que é uma equação diferencial parcial (EDP)? (Em inglês: Partial Differential Equations (PDE)).

Vamos fixar notação. Para  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função com derivadas de ordem  $k \in \mathbb{N}_0$ , definimos  $\partial^k u(x) := \left( \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x), i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\} \right)$  o elemento em  $\mathbb{R}^{mn^k}$  que consiste de todas as derivadas de ordem  $k$  de  $u$ .

Uma equação diferencial parcial definida num aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  é uma equação da forma:

$$F(x, u(x), \partial^1 u(x), \partial^2 u(x), \dots, \partial^k u(x)) = 0,$$

em que  $F : U \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R}^{mn^2} \times \dots \times \mathbb{R}^{mn^k} \rightarrow \mathbb{R}^N$  é uma função. Dizemos que a equação tem ordem  $k$ . Em diversas situações, trabalha-se também com equações com valores complexos, seja por razões técnicas ou devido ao próprio modelo físico. Assim, podemos encontrar casos em que  $\mathbb{C}$  é usado no lugar de  $\mathbb{R}$ , seja no domínio de  $F$  ou no seu contradomínio.

Se  $m = N = 1$ , dizemos que a equação é escalar. Caso contrário, costumamos chamar a equação de um sistema de equações diferenciais.

Se  $m < N$  dizemos que a equação é sobredeterminada. Por exemplo, se  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , e a equação é dada por

$$\nabla u(x) = f(x),$$

ou seja,

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \iff \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) = f_1(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) = f_n(x) \end{array},$$

então a equação é sobredeterminada, já que  $N = n$  e  $m = 1$ .

Se  $m > N$ , dizemos que o sistema é subdeterminada. Por exemplo, se  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  e a equação é dada por

$$\nabla \cdot u(x) = f(x),$$

ou seja,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x) + \dots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}(x) = f(x),$$

então a equação é subdeterminada, já que  $N = 1$  e  $m = n$ .

Se  $m = N$ , dizemos que o sistema é determinado. As equações escalares são exemplos deste caso.

Uma notação bastante útil e disseminada é a notação de multi-índice. Funciona assim: Seja  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ . Definimos

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \\ \partial^\alpha u(x) &= \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(x), \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}. \end{aligned}$$

De acordo com as equações acima, se  $n = 2$  e  $\alpha = (2, 1)$ , por exemplo, temos  $x^\alpha = x_1^2 x_2$  e  $\partial^\alpha u(x) = \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2}(x)$ . Observe que na notação de multi-índice a ordem de derivação é sempre primeiro

em  $x_n$ , depois em  $x_{n-1}$ , até chegar em  $x_1$ . No estudo de EDPs isto não traz problemas, uma vez que na grande maioria das vezes trabalhamos com classes de funções em que a ordem das derivadas não altera o resultado.

### 1.1. Classificação: Linear, semilinear, quasilinear e totalmente não lineares.

As equações podem ser classificadas de acordo com sua (não)-linearidade. Usualmente podemos dividir em quatro casos. Vamos defini-los aqui apenas para equações escalares. Para sistemas, as definições são análogas.

DEFINIÇÃO 1. Dizemos que

1) A equação é linear se for da forma

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) = f(x).$$

A equação é chamada de homogênea se  $f = 0$ .

2) A equação é semilinear se for da forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) + a_0(x, u(x), \partial^1 u(x), \dots, \partial^{k-1} u(x)) = 0.$$

Assim, é semilinear se “for linear no termo de ordem mais alta”.

3) A equação é quasilinear se for da forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, u(x), \partial^1 u(x), \dots, \partial^{k-1} u(x)) \partial^\alpha u(x) + a_0(x, u(x), \partial^1 u(x), \dots, \partial^{k-1} u(x)) = 0.$$

Assim, é quasilinear se “o termo que multiplica os termo de ordem mais alta depende apenas de termos de ordem mais baixa”.

4) A equação é totalmente não linear se não for de nenhum dos tipos anteriores, ou seja, “se a não linearidade atinge até os termos de ordem mais alta”.

OBSERVAÇÃO 2. Observamos que as equações lineares definem naturalmente transformações lineares entre espaços de funções. Por exemplo, se  $U \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto e  $a_\alpha \in C(U)$  para todo  $|\alpha| \leq k$ , então a função  $T : C^k(U) \rightarrow C(U)$  dada por

$$T(u) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x)$$

é uma transformação linear contínua.

EXEMPLO 3. Vamos ver como ficam as equações de primeira e segunda ordem em  $\mathbb{R}^2$ .

#### **Equações de ordem 1:**

*Lineares:*

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = f(x, y).$$

*Semilineares:*

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = f(x, y, u(x, y)).$$

*Quasilineares:*

$$a(x, y, u(x, y)) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + b(x, y, u(x, y)) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = f(x, y, u(x, y)).$$

#### **Equações de ordem 2:**

*Lineares:*

$$\begin{aligned} & a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \\ & + e(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + f(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = g(x, y). \end{aligned}$$

*Semilineares:*

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + d(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0.$$

*Quasilineares:*

$$a(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + b(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) + c(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + d(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0.$$

As equações lineares, semilineares e quasilineares podem, em certas condições, serem resolvidas pelo método das características. Veremos mais para frente como funciona este método.

Em muitos exemplos, é usual denotar as variáveis por  $(x, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , ao invés de apenas por  $x$ . Isto ocorre, porque fisicamente muitas vezes uma das variáveis denota tempo e as demais indicam variáveis espaciais. Mas é apenas uma questão de notação.

Abaixo daremos alguns exemplos de equações diferenciais encontradas em aplicações.

**EXEMPLO 4.** Equação de Cauchy- Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(x, y) := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right) = 0,$$

em que  $u : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $z = (x, y) = x + iy$ . Esta é uma equação linear de primeira ordem.

**EXEMPLO 5.** Equação do Transporte

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) = 0,$$

em que  $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Esta é uma equação linear de primeira ordem.

**EXEMPLO 6. Equação de Laplace/Poisson**

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0. (\text{Laplace}) \\ \Delta u(x) &= f(x). (\text{Poisson}) \end{aligned}$$

em que  $u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Esta é uma equação linear de segunda ordem.

**EXEMPLO 7. Equação do Calor**

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \alpha \Delta u(x, t),$$

em que  $u : U \times [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Esta é uma equação linear de segunda ordem.

**EXEMPLO 8. Equação da Onda**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \Delta u(x, t),$$

em que  $u : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Esta é uma equação linear de segunda ordem.

**EXEMPLO 9.** Equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta u(x, t) + V(x)u(x, t),$$

em que  $u : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Esta é uma equação linear de segunda ordem.

**EXEMPLO 10.** Equação da placa

$$\Delta^2 u(x) = 0.$$

Note que  $\Delta^2 u(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_j^2}(x)$ . Aqui  $u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Esta é uma equação linear de quarta ordem.

EXEMPLO 11. Equação de Maxwell

$$\begin{aligned}\nabla \cdot E &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t}, \\ \nabla \times B &= \mu_0 \left( J + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

Aqui  $E, B : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $U \subset \mathbb{R}^3$ . Esta é uma equação linear de primeira ordem.

EXEMPLO 12. Equação Eikodal

$$|\nabla u(x)| = 1,$$

em que  $|\nabla u(x)| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}(x)\right)^2}$ . Aqui  $u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Esta é uma equação totalmente não linear de primeira ordem.

EXEMPLO 13. Equação de Monge-Ampere

$$\det(D^2u(x)) = f(x),$$

em que  $u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Esta é uma equação totalmente não linear de segunda ordem. Aqui usamos a seguinte notação:  $D^2u(x) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  é a matriz Hessiana de  $u$  no ponto  $x$ , isto é,  $D^2u(x)_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ .

EXEMPLO 14. Equação do  $p$ -Laplaciano

$$\nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0.$$

Aqui temos que  $u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e

$$\nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = |\nabla u|^{p-2} \Delta u + (p-2) |\nabla u|^{p-4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Esta é uma equação de segunda ordem. Para  $p = 2$ , a equação é linear. Para  $p \neq 2$ , a equação é quasilinear.

EXEMPLO 15. Equação do Meio Poroso

$$\Delta(u^\gamma) = 0,$$

em que  $\gamma \neq 0$ . Aqui temos que  $u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e

$$\Delta(u^\gamma) = \gamma(\gamma-1)u^{\gamma-2} \nabla u \cdot \nabla u + \gamma u^{\gamma-1} \Delta u.$$

Esta é uma equação de segunda ordem. Para  $\gamma = 1$ , a equação é linear. Para  $\gamma \notin \{0, 1\}$ , a equação é quasilinear.

EXEMPLO 16. Equação de KdV

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0,$$

Aqui  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Esta é uma equação de terceira ordem semilinear.

EXEMPLO 17. Equação de Stokes

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u - \Delta u &= -\nabla p \\ \nabla \cdot u &= 0\end{aligned}$$

Aqui temos  $u : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $U \subset \mathbb{R}^3$ , e

$$u \cdot \nabla = \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

ou seja,

$$(u \cdot \nabla) u = \left( \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u_1}{\partial x_j}, \dots, \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \right).$$

Esta é uma equação de segunda ordem semilinear.

### 1.2. Classificação de equações de segunda ordem: Formas Normais

Consideremos agora a seguinte equação de segunda ordem

$$(1.2.1) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + cu(x) = f(x).$$

Vamos supor que  $u \in C^2(U)$ , em que  $U \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto, e que  $a_{ij}$ ,  $b_i$  e  $c$  pertencem a  $\mathbb{R}$ . Observamos que não há perda de generalidade em supor que os coeficientes  $a_{ij}$  sejam simétricos em  $i$  e  $j$ , isto é,  $a_{ij} = a_{ji}$  para todo  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Isto segue da proposição abaixo.

PROPOSIÇÃO 18. *Sejam  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , não necessariamente simétricos em  $i$  e  $j$ . Considere  $u \in C^2(U)$ . Logo*

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

Note que  $\left( \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} \right)$  são coeficientes simétricos em  $i$  e  $j$ .

DEMONSTRAÇÃO. De fato, temos que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

Note agora que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \stackrel{(1)}{=} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{a_{ji} - a_{ij}}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \\ & \stackrel{(2)}{=} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{a_{ji} - a_{ij}}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x) \stackrel{(3)}{=} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x). \end{aligned}$$

Em (1) usamos que  $\left( \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2} \right) = - \left( \frac{a_{ji} - a_{ij}}{2} \right)$ . Em (2) usamos o Teorema de Schwarz:  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x)$ , para toda função de classe  $C^2$ . Em (3) apenas trocamos  $i$  por  $j$ . Isto é possível, pois pouco importa o nome da variável que estamos somando. Concluímos assim que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = 0.$$

□

A partir de agora consideraremos, sem perda de generalidade, que  $a_{ij} = a_{ji}$ . Nosso objetivo é fazer uma mudança de coordenadas de forma a deixar a equação mais simples. Vamos considerar  $B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  uma matriz ortogonal, isto é,  $B^T B = I$ , em que  $B^T$  é a matriz transposta, e fazer

uma mudança de coordenadas<sup>1</sup>  $y = Bx$ . Em particular, vamos definir o aberto  $U_1 = \{Bx; x \in U\}$  e a função  $v : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $v(y) = u(B^T y)$ . Em particular,  $u(x) = v(Bx)$ , ou seja,

$$u(x) = v\left(\sum_{k=1}^n B_{1k}x_k, \dots, \sum_{k=1}^n B_{nk}x_k\right).$$

Pela regra da cadeia temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_k}(Bx) \frac{\partial y_k}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_k}(Bx) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{m=1}^n B_{km}x_m \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_k}(Bx) \left( \sum_{m=1}^n B_{km} \frac{\partial x_m}{\partial x_i} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_k}(Bx) \left( \sum_{m=1}^n B_{km} \delta_{im} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_k}(Bx) B_{ki}. \end{aligned}$$

Derivando mais uma vez, obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_l \partial y_k}(Bx) B_{lj} B_{ki}.$$

Substituindo as expressões acima na Equação (1.2.2), obtemos

$$\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ki} a_{ij} B_{lj} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y_l \partial y_k}(y) + \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n B_{ki} b_i \right) \frac{\partial v}{\partial y_k}(y) + cv(y) = f(B^T y).$$

Denotando por  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  a matriz  $A = (a_{ij})$ , sabemos que, por  $A$  ser uma matriz simétrica, que existe uma matriz ortogonal  $B$  tal que  $BAB^T$  é uma matriz diagonal, ou seja,

$$(BAB^T)_{kl} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ki} a_{ij} B_{lj} = \lambda_k \delta_{kl},$$

em que  $\lambda_j$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , são os autovalores da matriz  $A$ .

Escolhendo a matriz  $B$  desta forma, a equação se torna

$$\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_k \delta_{kl} \frac{\partial^2 v}{\partial y_l \partial y_k}(y) + \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n B_{ki} b_i \right) \frac{\partial v}{\partial y_k}(y) + cv(y) = f(B^T y),$$

ou seja,

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial^2 v}{\partial y_k^2}(y) + \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n B_{ki} b_i \right) \frac{\partial v}{\partial y_k}(y) + cv(y) = f(B^T y).$$

Vamos usar a equação acima para classificar as equações.

**1.2.1. Classificação para  $n = 2$ .** No caso em que  $n = 2$  ficamos com

$$(1.2.2) \quad \lambda_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}(y) + \lambda_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}(y) + \tilde{b}_1 \frac{\partial v}{\partial y_1}(y) + \tilde{b}_2 \frac{\partial v}{\partial y_2}(y) + cv(y) = f(B^T y),$$

em que  $\tilde{b}_k = \sum_{i=1}^2 B_{ki} b_i$ . Usando a equação acima, podemos fazer a seguinte classificação:

- (1) Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  forem ambos diferentes de zero e tiverem o mesmo sinal, chamamos a equação de elíptica.
- (2) Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  forem ambos diferentes de zero e tiverem sinais diferentes, chamamos a equação de hiperbólica.

<sup>1</sup>Lembramos que, quando temos uma função  $u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , uma mudança de coordenadas nada mais é do que a composição de  $u$  com uma bijeção  $\Phi : V \rightarrow U$ , ou seja,  $u \circ \Phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ . No estudo de EDPs, geralmente essa bijeção é um difeomorfismo.

- (3) Se um dos autovalores for igual a zero e o outro diferente de zero, chamamos a equação de parabólica.

OBSERVAÇÃO 19. Os nomes das equações acima se devem ao seguinte fato: Consideremos a equação

$$\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \tilde{b}_1 \xi_1 + \tilde{b}_2 \xi_2 + c = 0.$$

Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  forem diferentes de zero, esta equação pode ser escrita como

$$\lambda_1 \left( \xi_1 + \frac{\tilde{b}_1}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left( \xi_2 + \frac{\tilde{b}_2}{2\lambda_2} \right)^2 = \lambda_1 \left( \frac{\tilde{b}_1}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left( \frac{\tilde{b}_2}{2\lambda_2} \right)^2 - c.$$

Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tiverem o mesmo sinal, então a equação acima descreve uma elipse (ou uma região vazia). Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tiverem sinais opostos, então a equação acima descreve uma hipérbole.

Por fim, se  $\lambda_1 \neq 0$  e  $\lambda_2 = 0$  e  $\tilde{b}_2 \neq 0$ , então temos

$$\lambda_1 \left( \xi_1 + \frac{\tilde{b}_1}{2\lambda_1} \right)^2 + \tilde{b}_2 \xi_2 = \lambda_1 \left( \frac{\tilde{b}_1}{2\lambda_1} \right)^2 - c.$$

A equação acima descreve uma parábola. O mesmo ocorre com  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 \neq 0$  e  $\tilde{b}_1 \neq 0$ .

Apesar desta origem dos nomes, não há muito mais o que se pode obter dessas relações entre as equações e as cônicas.

OBSERVAÇÃO 20. Se  $\lambda_1 \neq 0$  e  $\lambda_2 = 0$  e  $\tilde{b}_2 = 0$ , então essencialmente temos uma equação diferencial apenas em  $y_1$ , sem termos em  $y_2$ . O mesmo se pode dizer para  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 \neq 0$  e  $\tilde{b}_1 = 0$ , já que a equação fica apenas em  $y_2$ .

Para cada um dos casos, podemos escrever a EDP numa forma ainda mais simples. Se a equação for elíptica ou hiperbólica, então podemos definir  $w : U_2 \rightarrow \mathbb{R}$  por  $w(z_1, z_2) = v(\sqrt{|\lambda_1|}z_1, \sqrt{|\lambda_2|}z_2)$ , em que  $U_2 = \{(z_1, z_2); (\sqrt{|\lambda_1|}z_1, \sqrt{|\lambda_2|}z_2) \in U_1\}$ . Assim,

$$\frac{\partial w}{\partial z_j}(z) = \sqrt{|\lambda_j|} \frac{\partial v}{\partial y_j}(\sqrt{|\lambda_1|}z_1, \sqrt{|\lambda_2|}z_2) \text{ e } \frac{\partial^2 w}{\partial z_j^2}(z) = |\lambda_j| \frac{\partial^2 v}{\partial y_j^2}(\sqrt{|\lambda_1|}z_1, \sqrt{|\lambda_2|}z_2).$$

Portanto, se a equação for elíptica, obtemos

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2}(z) + \frac{\partial^2 w}{\partial z_2^2}(z) + \tilde{b}_1 \frac{\partial w}{\partial z_1}(z) + \tilde{b}_2 \frac{\partial w}{\partial z_2}(z) + cw(z) = \pm f(B^T y),$$

em que  $\pm$  é igual a  $+$  se os autovalores forem positivos e igual a  $-$  se forem negativos.

Se a equação for hiperbólica, obtemos

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2}(z) - \frac{\partial^2 w}{\partial z_2^2}(z) + \tilde{b}_1 \frac{\partial w}{\partial z_1}(z) + \tilde{b}_2 \frac{\partial w}{\partial z_2}(z) + cw(z) = \pm f(B^T y),$$

em que  $\pm$  é igual a  $+$  se  $\lambda_1 > 0$  e igual a  $-$  se  $\lambda_2 < 0$  for negativo.

Se a equação for parabólica e  $\lambda_1 \neq 0$ , então podemos definir  $w : U_2 \rightarrow \mathbb{R}$  por  $w(z_1, z_2) = v(\sqrt{|\lambda_1|}z_1, z_2)$  e a equação se torna

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}(y) + \tilde{b}_1 \frac{\partial v}{\partial y_1}(y) + \tilde{b}_2 \frac{\partial v}{\partial y_2}(y) + cv(y) = \pm f(B^T y).$$

Novamente o sinal  $\pm$  depende do autovalor  $\lambda_1$ . Se a equação for parabólica e  $\lambda_2 \neq 0$ , então trocando  $y_1$  por  $y_2$  obtemos a mesma expressão anterior.

As formas acima são chamadas de formas normais.

Vamos por fim achar um critério para classificar as equações partindo da nossa equação original. Para tanto usamos a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 21. *A equação é*

- 1) *Elíptica se, e somente se,  $\det(A) > 0$ .*
- 2) *Hiperbólica se, e somente se,  $\det(A) < 0$ .*
- 3) *Parabólica se, e somente se,  $\det(A) = 0$  e  $A \neq 0$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{pmatrix} = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

Os autovalores são iguais a

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm} &= -\frac{(a_{11} + a_{22})}{2} \pm \frac{\sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2} \\ &= -\frac{(a_{11} + a_{22})}{2} \pm \frac{\sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4\det(A)}}{2}. \end{aligned}$$

Observamos que os autovalores acima são sempre reais. Isto pode ser provado lembrando que  $a_{12} = a_{21}$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} (1.2.3) \quad (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) &= a_{11}^2 + a_{22}^2 + 2a_{11}a_{22} - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}a_{21} \\ &= a_{11}^2 + a_{22}^2 - 2a_{11}a_{22} + 4a_{12}^2 \\ &= (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 > 0. \end{aligned}$$

Agora observamos o seguinte fato. Considere dois números dados por  $\lambda_1 = a + b$  e  $\lambda_2 = a - b$  tais que ou  $a$  ou  $b$  são diferentes de zero e ambos são números reais. Se  $0 < b < |a|$ , então  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são positivos se  $a > 0$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são negativos se  $a < 0$ . Se  $b = |a|$ , então um dos  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2$  vale zero e o outro  $2a$ . Por fim, se  $b > |a|$ , então um dos  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2$  é positivo e o outro negativo. Usando este simples fato (verifique!) vamos estudar os casos abaixo:

Note que se  $\det(A) > 0$ , então temos

$$(a_{11} + a_{22})^2 - 4\det(A) < (a_{11} + a_{22})^2.$$

Assim,  $0 < \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4\det(A)} < |a_{11} + a_{22}|$ . Concluimos que ambos autovalores são maiores do que zero ou ambos são menores do que zero.

Se  $\det(A) < 0$ , então temos que  $(a_{11} + a_{22})^2 - 4\det(A) > (a_{11} + a_{22})^2$ . Logo  $\sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4\det(A)} > |a_{11} + a_{22}|$ . Concluimos que  $\lambda_{\pm}$  são diferentes de zero e têm sinais opostos.

Por fim, se  $\det(A) = 0$ , então um dos autovalores é igual a zero e o outro igual a  $a_{11} + a_{22}$ , que é diferente de zero, pois  $A \neq 0$ . De fato, pela conta (1.2.3), temos que

$$(a_{11} + a_{22})^2 - 4\det(A) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2.$$

Assim, se  $\det(A) = 0$  e  $a_{11} + a_{22} = 0$ , concluimos que  $a_{11} = a_{22}$  e  $a_{12} = 0$ . Mas se  $a_{11} = a_{22}$  e  $a_{11} + a_{22} = 0$ , então  $a_{11} = a_{22} = 0$ . Portanto, teríamos  $A = 0$ .  $\square$

Por fim, uma última observação em relação às equações parabólicas:

PROPOSIÇÃO 22. *Suponha que a equação seja parabólica e após uma mudança de variável dada por uma transformação ortogonal, obtemos a Equação 1.2.2. Logo as condições  $\lambda_1 \neq 0$  e  $\lambda_2 = 0$  e  $\tilde{b}_2 \neq 0$  e a condição  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 \neq 0$  e  $\tilde{b}_1 \neq 0$  equivalem ao fato da matriz abaixo ter posto dois:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix},$$

ou seja, se as linhas forem linearmente independentes.

DEMONSTRAÇÃO. Observamos que

$$\begin{aligned} & B \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & B_{11}b_1 + B_{12}b_2 \\ 0 & \lambda_2 & B_{21}b_1 + B_{22}b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \tilde{b}_1 \\ 0 & \lambda_2 & \tilde{b}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como as matrizes  $B$  e  $\begin{pmatrix} B^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  são inversíveis, então as linhas de

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}$$

são linearmente independentes se, e somente se, as linhas de

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \tilde{b}_1 \\ 0 & \lambda_2 & \tilde{b}_2 \end{pmatrix}$$

são linearmente independentes. Se  $\lambda_1 \neq 0$  e  $\lambda_2 = 0$ , isto é o mesmo que dizer que  $\tilde{b}_2 \neq 0$ . Se  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 \neq 0$ , isto é o mesmo que dizer que  $\tilde{b}_1 \neq 0$ .  $\square$

Vamos juntar agora tudo o que vimos na forma de um teorema.

**TEOREMA 23.** *Considere uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes reais definida em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  dada abaixo:*

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(x) + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) + b_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) + b_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) + cu(x) = f(x).$$

Considere a matriz simétrica dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Neste caso,

1) A equação é elítica (ambos os autovalores de  $A$  forem diferentes e tiverem o mesmo sinal) se, e somente se,  $\det(A) > 0$ . Neste caso existe uma transformação linear inversível  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que a função  $v : V \rightarrow \mathbb{R}$  definida em  $V := \{y \in \mathbb{R}^2, Ty \in U\}$  e dada por  $v(y) = u(Ty)$  satisfaz

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}(y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}(y) + c_1 \frac{\partial v}{\partial y_1}(y) + c_2 \frac{\partial v}{\partial y_2}(y) + cv(y) = g(y).$$

A equação acima é chamada de forma normal das equações elípticas.

2) A equação é hiperbólica (ambos os autovalores de  $A$  forem diferentes e tiverem sinais opostos) se, e somente se,  $\det(A) < 0$ . Neste caso, existe uma transformação linear inversível  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que a função  $v : V \rightarrow \mathbb{R}$  definida em  $V := \{y \in \mathbb{R}^2, Ty \in U\}$  e dada por  $v(y) = u(Ty)$  satisfaz

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}(y) - \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}(y) + c_1 \frac{\partial v}{\partial y_1}(y) + c_2 \frac{\partial v}{\partial y_2}(y) + cv(y) = g(y).$$

A equação acima é chamada de forma normal das equações hiperbólicas.

3) A equação equação é parabólica (um e somente um dos autovalores de  $A$  é diferente de zero) se, e somente se,  $\det(A) = 0$ . Neste caso existe uma transformação linear inversível  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que a função  $v : V \rightarrow \mathbb{R}$  definida em  $V := \{y \in \mathbb{R}^2, Ty \in U\}$  e dada por  $v(y) = u(Ty)$  satisfaz

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}(y) + c_1 \frac{\partial v}{\partial y_1}(y) + c_2 \frac{\partial v}{\partial y_2}(y) + cv(y) = g(y).$$

A equação acima é chamada de forma normal das equações parabólicas

Teremos  $c_2 \neq 0$  se, e somente se, a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}$$

tiver linhas linearmente independentes.

Acima vemos que uma equação elíptica pode, após uma mudança de coordenadas, ser escrita em sua forma normal:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}(y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}(y) + c_1 \frac{\partial v}{\partial y_1}(y) + c_2 \frac{\partial v}{\partial y_2}(y) + cv(y) = g(y).$$

Por outro lado, uma equação da forma acima é elíptica, já que a matriz  $A$  correspondente é a matriz identidade cujos autovalores são ambos positivos.

Da mesma forma, qualquer equação que tem a forma normal das equações hiperbólicas é hiperbólica, já que a matriz  $A$  correspondente é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que tem autovalores 1 e  $-1$ . Por fim, uma equação na forma normal das equações parabólica é parabólica, já que a matriz associada é igual a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que tem autovalores 1 e 0.

Essa simples observação é relevante para dar os três principais tipos de equações elípticas, parabólicas e hiperbólicas, que são equações que já aparecem na forma normal.

EXEMPLO 24. A equação de Laplace é elíptica:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

A equação do calor é parabólica:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t).$$

A equação da onda é hiperbólica:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t).$$

**1.2.2. Classificação para  $n \geq 2$ .** A classificação para dimensões maiores ou iguais a 2 é feita essencialmente da mesma maneira que anteriormente. Como anteriormente, consideremos

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + cu(x) = f(x).$$

e a matriz simétrica  $A = (a_{ij})$ .

PROPOSIÇÃO 25. A equação é

- 1) Elíptica se, e somente se, todos os autovalores de  $A$  forem não nulos e tiverem o mesmo sinal.
- 2) Hiperbólica se, e somente se, todos os autovalores de  $A$  forem não nulos e um dos autovalores tem sinal diferente de todos os outros  $n - 1$  autovalores (temos 1 autovalor positivo e  $n - 1$  negativos ou 1 negativo e  $n - 1$  positivos)
- 3) Parabólica se, e somente se,  $A$  tem um autovalor igual a zero e todos os outros diferentes de zero e com o mesmo sinal.

OBSERVAÇÃO 26. Em algumas referências (Fritz John, por exemplo), também se encontra na classificação as equação ultrahiperbólicas. Elas correspondem ao caso em que todos os autovalores são diferentes de zero e ao menos dois são positivos e outros dois são negativos. Elas só existem em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ .

Novamente, para as equações parabólicas, é natural (embora não seja necessário) supor que a matriz abaixo tem posto  $n$ :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix},$$

ou seja, que as linhas acima são linearmente independentes. Com esta hipótese, ao fazer as mudanças de coordenadas usando uma matriz ortogonal, obtemos uma equação do tipo

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \frac{\partial^2 v}{\partial y_k^2}(y) + \sum_{k=1}^n b_k \frac{\partial v}{\partial y_k}(y) + cv(y) = f(B^T y),$$

com  $\lambda_k \neq 0$  para todo  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  e  $b_n \neq 0$ .

Abaixo, daremos os três principais exemplos de cada tipo.

EXEMPLO 27. A equação de Laplace é elíptica:

$$\Delta u(x) = 0.$$

A matriz associada a equação é a matriz identidade.

A equação do calor é parabólica:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \Delta u(x, t).$$

A matriz associada a esta equação é a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A equação da onda é hiperbólica:

$$\Delta u(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t).$$

A matriz associada a esta equação é a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vale a pena notar que a classificação acima pode ser feita também quando as equações não têm coeficientes constante. Neste caso, a classificação da equação pode mudar de ponto a ponto. De fato, podemos até classificar equações semilineares do tipo abaixo:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + a \left( x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right) = f(x),$$

em que  $a_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$  são funções tais que  $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$  para todo  $x \in U$ . Neste caso, a classificação entre elípticas, parabólicas ou hiperbólicas depende de cada ponto de  $x \in U$ .

EXEMPLO 28. Considere a equação abaixo definida em todo o  $\mathbb{R}^3$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + x_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = f(x_1, x_2, x_3).$$

A matriz  $A$  correspondente é igual a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores são 1, 1 e  $x_3$ . Desta maneira a equação é elíptica em  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 > 0\}$ , parabólica em  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = 0\}$  e hiperbólica em  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 < 0\}$ .

Se a equação é quasilinear, então a situação fica ainda mais complicada. De fato, consideremos a seguinte equação

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x, u(x), \nabla u(x)) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + a\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x)\right) = f(x),$$

em que  $a_{ij} : U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  são funções tais que  $a_{ij}(x, v, y) = a_{ji}(x, v, y)$  para todo  $(x, v, y) \in U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Neste caso, a matriz  $A$  é dada por

$$A = (a_{ij}(x, u(x), \nabla u(x)))_{ij},$$

ou seja,  $A$  depende não só de  $x$  como da própria solução  $u(x)$ . Assim, a princípio, só seria possível classificar a equação sabendo a sua solução. E mesmo assim, a classificação dependeria da solução. Isto torna tudo muito complicado.

No entanto, em alguns casos, é possível sim classificar equações quasilineares de maneira simples. Vamos supor que exista  $c > 0$  tal que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x, v, y) \xi_i \xi_j \geq c |\xi|^2,$$

para todo  $(x, v, y) \in U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  e  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Logo a matriz  $A$  é estritamente positiva (e autoadjunta, por hipótese). Logo todos os seus autovalores serão positivos. Desta maneira, podemos afirmar que a equação é elíptica, mesmo sem conhecer a solução  $u(x)$ .

Podemos também considerar a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x, t, u(x, t), \nabla u(x, t)) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x, t) + a\left(x, u(x, t), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x, t), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x, t)\right) = f(x, t),$$

em que  $a_{ij}(x, t, v, y) = a_{ji}(x, t, v, y)$  e existe  $c > 0$  tal que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x, t, v, y) \xi_i \xi_j \geq c |\xi|^2,$$

para todo  $(x, t, v, y) \in U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  e  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .

A matriz  $(n+1) \times (n+1)$  será dada por

$$A = \begin{pmatrix} (a_{ij}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como  $n$  autovalores são positivos e 1 é igual a zero, a equação acima é quasilinear parabólica. Um raciocínio semelhante pode ser usado para equações hiperbólicas também.

#### Referências:

Treves  
Evans  
Strauss  
Arendt e Urban

**1.2.3. Exercícios.**

EXERCÍCIO 29. (Folland 2.A.1)(Recordamos aqui as definições de multi-índice que aprendemos no dia 07 de agosto)

Seja um operador diferencial  $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha$ , em que  $a_\alpha \in C(\mathbb{R}^n)$ . Suponha que para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  fixo, temos

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha u(x + x_0) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x + x_0) \partial_x^\alpha u(x + x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall u \in C^\infty(\mathbb{R}^n),$$

ou seja,  $P(x, D)$  comuta com todas as translações. Prove que as funções  $a_\alpha$  são constantes.

Dica: Considere funções  $u(x) = x^\beta$ ,  $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ , e note que

$$\partial^\alpha(x^\beta) = \begin{cases} \frac{\beta!}{\alpha!} x^{\beta-\alpha}, & \alpha \leq \beta \\ 0, & \alpha \not\leq \beta \end{cases}.$$

EXERCÍCIO 30. Considere a equação de segunda ordem abaixo e mostre em que regiões essa equação é elíptica, parabólica ou hiperbólica:

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x) - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x) = 0.$$

EXERCÍCIO 31. Considere a forma normal das equações hiperbólicas em  $\mathbb{R}^2$  abaixo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(y) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) + c_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) + c_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) + cu(x) = g(x).$$

Defina a função  $v(y_1, y_2) = u(y_1 + y_2, y_1 - y_2)$ , ou seja,  $u(x_1, x_2) = v(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1-x_2}{2})$ . Mostre que  $v$  satisfaz uma equação do tipo:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \partial y_2}(y) + a_1 \frac{\partial v}{\partial y_1}(y) + a_2 \frac{\partial v}{\partial y_2}(y) + bv(y) = \tilde{g}(y).$$

A equação acima às vezes também é chamada de forma normal.

EXERCÍCIO 32. (Arendt e Urban 2.1) Classifique as equações abaixo em lineares, semilineares, quasilineares ou totalmente não lineares.

- $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right)^2 + e^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) = \sin(x_1)$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + e^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) = \sin^2(x_1)$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \exp\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right) = \sin^3(x_1)$

EXERCÍCIO 33. (Arendt e Urban 2.4) Classifique as equações abaixo em elípticas, parabólicas ou hiperbólicas.

- $-2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) = 0$
- $\frac{5}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) = 0$
- $9 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(x) + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) = 0$

EXERCÍCIO 34. (Arendt e Urban 2.5) Diga em quais pontos a equação abaixo é elíptica, parabólica ou hiperbólica:

$$(x_1^2 - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + 2x_1 x_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(x) + (x_2^2 - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) = x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}(x).$$

EXERCÍCIO 35. Suponha que a equação abaixo definida em  $\mathbb{R}^n$  seja elíptica:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + cu(x) = f(x).$$

Mostre, então, que a equação abaixo, definida em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , é parabólica

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x, t) + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) + cu(x, t) = f(x, t).$$

## Funções harmônicas (Aula do dia 4 de setembro)

Vamos iniciar o nosso estudo com as equações de Laplace e de Poisson. Mais especificamente, estaremos interessados na seguinte equação:

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in U,$$

em que  $U \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto. Lembramos que

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Quando  $f = 0$ , chamamos a equação de equação de Laplace. Quando  $f \neq 0$ , a equação é chamada de equação de Poisson.

Essas equações aparecem em diversos contextos. Em situações físicas, geralmente descrevem modelos físicos estáticos, que não variam com o tempo. Entre os exemplos, temos (veja mais no livro do Strauss):

- (1) A equação aparece naturalmente quando consideramos a equação do calor ou da onda em equilíbrio. De fato, suponha que um corpo esteja em equilíbrio térmico. A equação do calor descreve a temperatura deste corpo e é dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \Delta u(x, t).$$

Como o corpo está em equilíbrio térmico, concluímos que a temperatura não varia. Logo  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 0$  e a temperatura satisfaz a equação de Laplace. Com a equação da onda em equilíbrio temos o mesmo argumento, já que neste caso  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = 0$ .

- (2) Na teoria de variáveis complexas, uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto, é analítica se, e somente se,  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$  é uma função  $C^\infty$  e as funções com valores reais  $u$  e  $v$  satisfazem as condições de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Neste caso  $u$  e  $v$  satisfazem a equação de Laplace.

- (3) Na teoria do Eletromagnetismo, se os campos não variam com o tempo, então o campo elétrico satisfaz:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot E &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \nabla \times E &= 0 \end{aligned}$$

Se  $E : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  for de classe  $C^1$  e estiver definido num aberto convexo, então existe uma função  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  tal que  $E = -\nabla\varphi$  (veja o livro do Apostol ou o Elon). A função  $\varphi$  é chamada de potencial elétrico. Assim, temos

$$-\Delta\varphi = -\nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

- (4) Um fluido incompressível e irrotacional estacionário pode ser descrito por um campo de velocidades  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , em que  $U \subset \mathbb{R}^3$  é um aberto. Nas condições dadas, temos que

$\nabla \times v = 0$  e  $\nabla \cdot v = 0$ . Se  $v$  é de classe  $C^1$  e  $U$  é um aberto convexo, então  $v = -\nabla\varphi$ , em que  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  é o potencial de velocidade. Assim

$$\Delta\varphi = \nabla \cdot \nabla\varphi = -\nabla \cdot v = 0.$$

- (5) Na teoria da gravitação de Newton, podemos, em certas situações, descrever o campo gravitacional usando o potencial gravitacional  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ , em que  $U \subset \mathbb{R}^3$  é um aberto. Esse potencial satisfaz a equação

$$\Delta\varphi(x) = 4\pi G\rho(x),$$

em que  $\rho$  é a densidade de massa e  $G$  é a constante gravitacional.

Geralmente estaremos interessados em resolver essas equações em um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Neste caso, naturalmente aparecem condições que a solução deve satisfazer na fronteira  $\partial U$ . Tais condições não só são relacionadas a condições físicas, mas também são fundamentais para determinar as soluções das equações. Abaixo, listamos 3 das principais condições de contorno e sua interpretação quando  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  descreve a temperatura de um corpo em equilíbrio térmico:

- (1) Condição de Contorno de Dirichlet. Neste caso, queremos que a função  $u$  satisfaça em  $\partial U$ , a condição:

$$u(x) = g(x),$$

em que  $g : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função dada. Esta é uma condição que aparece quando a temperatura é fixa e igual a  $g$  na fronteira de  $U$ .

- (2) Condição de Contorno de Neumann. Neste caso, queremos que a função  $u$  satisfaça em  $\partial U$  a condição:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = g(x),$$

em que  $g : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função dada e  $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \langle \nabla u(x), n(x) \rangle$  é a derivada direcional de  $u$  em relação a normal que aponta para fora. Esta é uma condição que aparece quando o fluxo de temperatura (calor) é fixo e proporcional a  $g$  na fronteira de  $U$ .

- (3) Condição de Contorno de Robin. Neste caso, queremos que a função  $u$  satisfaça em  $\partial U$  a condição:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) + au(x) = g(x),$$

em que  $g : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função dada. Esta é uma condição que aparece quando o fluxo de temperatura (calor) é proporcional a própria temperatura (quando  $a \neq 0$  e  $g = 0$ ), ou depende tanto da temperatura dentro do corpo, dada por  $u$ , como a temperatura  $g$  na fronteira de  $U$ .

Neste primeiro momento, vamos apenas focar nas propriedades de funções que satisfazem a equação de Laplace:

$$\Delta u(x) = 0.$$

As soluções dessa equação são chamadas de funções harmônicas. De forma mais precisa, temos

DEFINIÇÃO 36. Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto. Dizemos que uma função  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função harmônica se

- 1)  $u$  é de classe  $C^2$ .
- 2)  $\Delta u(x) = 0$  para todo  $x \in U$ .

## 2.1. O Teorema do valor médio.

Nessa seção vamos mostrar o teorema do valor médio. Esse teorema mostra que as funções harmônicas têm uma propriedade de “serem médias de si mesmas sobre bolas”, conforme veremos mais adiante de maneira mais precisa. Este resultado possui diversas aplicações, como veremos nas seções posteriores. Para prová-lo precisamos de algumas definições e resultados preliminares.

Para demonstrar o Teorema do valor médio, precisamos antes de algumas definições e resultados.

Antes definiremos  $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n; |y - x| < r\}$ ,  $\overline{B(x, r)} = \{y \in \mathbb{R}^n; |y - x| \leq r\}$ ,  $\partial B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n; |y - x| = r\}$  e  $\mathbb{S}^{n-1} := \partial B(0, 1)$ .

$$\begin{aligned} |B(x, r)| &:= \int_{B(x, r)} dy \text{ é o volume da bola } B(x, r) \\ |\partial B(x, r)| &:= \int_{\partial B(x, r)} dS(y) \text{ é a área da bola } \partial B(x, r) \\ |\mathbb{S}^{n-1}| &:= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} dS(y) \text{ é a área da bola unitária} \end{aligned}$$

LEMA 37. *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Seja  $x \in U$ ,  $r > 0$  e  $\overline{B(x, r)} \subset U$ . Logo*

- 1)  $\int_{\partial B(x, r)} f(y) dS(y) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x + rz) r^{n-1} dS(z)$ .
- 2)  $|\partial B(x, r)| = r^{n-1} |\mathbb{S}^{n-1}|$ .
- 3)  $\int_{B(x, r)} f(y) dy = \int_0^r \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x + sz) dS(z) \right) s^{n-1} ds = \int_0^r \int_{\partial B(x, r)} f(y) dS(y) ds$ .
- 4)  $|B(x, r)| = \frac{r^n |\mathbb{S}^{n-1}|}{n}$ .

DEMONSTRAÇÃO. Vamos provar apenas para  $n = 3$ . O caso geral pode ser provado também usando coordenadas esféricas.

Lembramos de cálculo 3 que podemos calcular a integral de superfície na esfera usando coordenadas esféricas em dimensões superiores. Assim, para calcular

$$\int_{\partial B(x, r)} f(y) dS(y),$$

vamos usar  $\rho(\theta, \psi) = (x_1 + r \cos(\theta) \text{sen}(\psi), x_2 + r \text{sen}(\theta) \text{sen}(\psi), x_3 + r \cos(\psi))$ , em que  $x = (x_1, x_2, x_3)$ . Logo

$$dS(y) = \left| \det \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial \rho}{\partial \theta}, \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \rho}{\partial \theta}, \frac{\partial \rho}{\partial \psi} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \rho}{\partial \theta}, \frac{\partial \rho}{\partial \psi} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \rho}{\partial \psi}, \frac{\partial \rho}{\partial \psi} \right\rangle \end{pmatrix} \right|^{\frac{1}{2}} d\theta d\psi = \left\| \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \times \frac{\partial \rho}{\partial \psi} \right\| d\theta d\psi = r^2 \text{sen} \psi d\theta d\psi.$$

Portanto

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(x_1 + r \cos(\theta) \text{sen}(\psi), x_2 + r \text{sen}(\theta) \text{sen}(\psi), x_3 + r \cos(\psi)) r^2 \text{sen} \psi d\theta d\psi.$$

Por outro lado,

$$\int_{\mathbb{S}^2} f(x + rz) r^2 dS(z)$$

pode ser calculado usando

$$\rho(\theta, \psi) = (\cos(\theta) \text{sen}(\psi), \text{sen}(\theta) \text{sen}(\psi), \cos(\psi)).$$

Assim,

$$dS(z) = \text{sen} \psi d\theta d\psi.$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}^2} f(x + rz) r^2 dS(z) \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(x + r\rho(\theta, \psi)) r^2 \text{sen} \psi d\theta d\psi \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(x_1 + r \cos(\theta) \text{sen}(\psi), x_2 + r \text{sen}(\theta) \text{sen}(\psi), x_3 + r \cos(\psi)) r^2 \text{sen} \psi d\theta d\psi. \end{aligned}$$

Isto concluí a demonstração.

2) Basta usar  $f = 1$ . Logo

$$|\partial B(x, r)| = \int_{\partial B(x, r)} dS(y) \stackrel{(1)}{=} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} r^{n-1} dS(z) = r^{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} dS(z) = r^{n-1} |\mathbb{S}^{n-1}|.$$

Usamos o resultado do item 1 em (1).

3) Vamos calcular

$$\int_0^r \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x + sz) dS(z) \right) s^{n-1} ds.$$

Usaremos que  $z = \rho(\theta, \psi) = (\cos(\theta)\text{sen}(\psi), \text{sen}(\theta)\text{sen}(\psi), \cos(\psi))$  e  $dS(z) = \text{sen}\psi d\theta d\psi$ . Assim, temos

$$\begin{aligned} & \int_0^r \left( \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(x_1 + s \cos(\theta)\text{sen}(\psi), x_2 + s \text{sen}(\theta)\text{sen}(\psi), x_3 + s \cos(\psi)) \text{sen}\psi d\theta d\psi \right) s^2 ds \\ &= \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(x_1 + s \cos(\theta)\text{sen}(\psi), x_2 + s \text{sen}(\theta)\text{sen}(\psi), x_3 + s \cos(\psi)) s^2 \text{sen}\psi d\theta d\psi ds. \end{aligned}$$

Por outro lado, podemos calcular  $\int_{B(x, r)} f(y) dy$  usando coordenadas

$$y = (x_1 + s \cos(\theta)\text{sen}(\psi), x_2 + s \text{sen}(\theta)\text{sen}(\psi), x_3 + s \cos(\psi))$$

e  $dy = s^2 \text{sen}\psi d\theta d\psi ds$ . Concluimos que

$$\int_{B(x, r)} f(y) dy = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(x_1 + s \cos(\theta)\text{sen}(\psi), x_2 + s \text{sen}(\theta)\text{sen}(\psi), x_3 + s \cos(\psi)) s^2 \text{sen}\psi d\theta d\psi ds$$

e obtemos o resultado.

Agora note que se  $f = 1$ , então

$$\int_{B(x, r)} dy = \int_0^r \left( \int_{\mathbb{S}^2} dS(z) \right) s^2 ds.$$

Assim,

$$\int_{B(x, r)} dy = |B(x, r)| \text{ e } \int_0^r \left( \int_{\mathbb{S}^2} dS(z) \right) s^2 ds = \frac{r^3 |\mathbb{S}^2|}{3}.$$

□

OBSERVAÇÃO 38. A demonstração acima poderia ser feita em  $\mathbb{R}^n$  usando coordenadas esféricas. Estas coordenadas são definidas como

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos(\phi_1) \\ x_2 &= r \text{sen}(\phi_1) \cos(\phi_2) \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= r \text{sen}(\phi_1) \dots \text{sen}(\phi_{n-2}) \cos(\phi_{n-1}) \\ x_n &= r \text{sen}(\phi_1) \dots \text{sen}(\phi_{n-2}) \text{sen}(\phi_{n-1}), \end{aligned}$$

em que  $\phi_1 \in ]0, 2\pi[$ ,  $\phi_j \in ]0, \pi[$ ,  $j \geq 2$ . Neste caso, o Jacobiano da transformação e o cálculo de elemento de área nos dão

$$\begin{aligned} dx &= r^{n-1} \prod_{k=2}^{n-1} (\text{sen}(\phi_{n-k}))^{k-1} dr d\phi_1 \dots d\phi_{n-1} \\ dS(x) &= r^{n-1} \prod_{k=2}^{n-1} (\text{sen}(\phi_{n-k}))^{k-1} d\phi_1 \dots d\phi_{n-1}, \end{aligned}$$

em que  $dS(x)$  é o elemento de área em  $B(0, r)$ .

DEFINIÇÃO 39. (*Médias sobre abertos e superfícies*) Seja  $U$  um aberto limitado e  $S$  uma superfície compacta.

1) Se  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função integrável, definimos

$$\int_U u dy := \frac{1}{|U|} \int_U u dy, \text{ em que } |U| := \int_U dy.$$

A integral  $\int_U u dy$  é chamada de média de  $u$  sobre o aberto  $U$ .

1) Se  $u : S \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua (ou, mais geral, integrável em  $S$ ), definimos

$$\int_S u dS(y) := \frac{1}{|S|} \int_S u dS(y), \text{ em que } |S| := \int_S dS(y).$$

A integral  $\int_S u dS(y)$  é chamada de média de  $u$  sobre a superfície  $S$ .

Note que a média de uma função constante é sempre igual a essa mesma constante. Algumas propriedades serão particularmente úteis para nós.

PROPOSIÇÃO 40. *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $u \in C(U)$ . Logo as seguintes propriedades são equivalentes:*

- 1)  $u(x) = \int_{B(x,r)} u dy$ , para todo  $\overline{B(x,r)} \subset U$ .
- 2)  $u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u dS$ , para todo  $\overline{B(x,r)} \subset U$ .

DEMONSTRAÇÃO. 1)  $\implies$  2) Neste caso, temos

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{B(x,r)} u dy = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u(y) dy \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{n}{r^n |\mathbb{S}^{n-1}|} \int_0^r \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x + sz) dS(z) \right) s^{n-1} ds. \end{aligned}$$

Em (1) usamos os itens 3 e 4 do Lema 37.

Assim,

$$r^n u(x) = \frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_0^r \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x + sz) dS(z) \right) s^{n-1} ds.$$

Derivando os dois lados em  $r$ , temos

$$\frac{d}{dr} (r^n u(x)) = \frac{d}{dr} \left( \frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_0^r \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x + sz) dS(z) \right) s^{n-1} ds \right).$$

Vemos assim que

$$\frac{d}{dr} (r^n u(x)) = nr^{n-1} u(x)$$

e

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_0^r \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x + sz) dS(z) \right) s^{n-1} ds \right) = \frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x + rz) dS(z) r^{n-1}.$$

Acima, usamos que  $u$  é contínua. Desta forma,  $s \mapsto \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x + sz) dS(z) s^{n-1}$  é uma função contínua e podemos derivar a sua integral.

Portanto,

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{r^{n-1} |\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x + rz) r^{n-1} dS(z) \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} u(z) dS(z) = \int_{\partial B(x,r)} u(z) dS(z). \end{aligned}$$

Em (1) usamos o item 1 do Lema 37.

2)  $\implies$  1) Suponha que

$$u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u dS.$$

Vamos agora multiplicar  $u(x)$  e o valor da média por  $|\partial B(x, s)|$  e integrar de 0 a  $r$ . Assim, temos

$$(2.1.1) \quad \int_0^r u(x) |\partial B(x, s)| ds = \int_0^r \int_{\partial B(x, s)} u(y) dS(y) ds \stackrel{(1)}{=} \int_{B(x, r)} u(y) dy.$$

Em (1) usamos o item 3 do Lema 37.

Note que

$$(2.1.2) \quad \int_0^r u(x) |\partial B(x, s)| ds \stackrel{(1)}{=} |\mathbb{S}^{n-1}| u(x) \int_0^r s^{n-1} ds = \frac{|\mathbb{S}^{n-1}| r^n}{n} u(x) \stackrel{(2)}{=} |B(x, r)| u(x),$$

em que usamos o item 2 e o item 4 do Lema 37 em (1) e (2) respectivamente. Juntando as expressões (2.1.1) e (2.1.2), obtemos

$$u(x) = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} u(y) dy = \int_{B(x, r)} u(y) dy.$$

□

Estamos finalmente em condições de enunciar e provar o Teorema do Valor Médio.

**TEOREMA 41.** (*Teorema do Valor Médio*) *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função harmônica. Logo para todo  $\overline{B(x, r)} \subset U$ , temos*

$$u(x) = \int_{\partial B(x, r)} u dS = \int_{B(x, r)} u dy.$$

É interessante notar que, de certa maneira, este teorema é razoável dados os exemplos de aplicações das funções harmônicas. Por exemplo, suponha que a função  $u$  descreva a temperatura de um corpo em equilíbrio térmico. Se tivéssemos  $\int_{B(x, r)} u dy > u(x)$ , isto implicaria que a média de temperatura de  $u$  em uma bola ao redor de  $x$  é superior a própria temperatura em  $x$ . Então esperaríamos que houvesse um fluxo de calor de tal forma que a temperatura aumentasse em  $x$ . Mas isso não pode ocorrer, já que o corpo está em equilíbrio. O mesmo raciocínio se aplica se  $\int_{B(x, r)} u dy < u(x)$ . Assim, aparentemente, parece que a única opção razoável é que  $\int_{B(x, r)} u dy = u(x)$ . É claro que matematicamente essa discussão não prova nada. Mas talvez ajude a dar alguma intuição sobre o teorema.

**DEMONSTRAÇÃO.** Basta mostrar que para todo  $\overline{B(x, r)} \subset U$ , temos, devido a Proposição 40. Seja

$$d(x, U^c) = \inf \{d(x, y); y \in U^c\}.$$

Dado  $x \in U$ , definimos  $\phi : ]0, d(x, U^c)[ \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\phi(r) = \int_{\partial B(x, r)} u dS.$$

Vamos mostrar que

1)  $\phi$  é um função constante.

Para prová-lo, basta mostrar que  $\phi'(r) = 0$ , para todo  $r > 0$ . Vamos inicialmente escrever  $\phi$  de uma maneira adequada. Temos

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \int_{\partial B(x, r)} u dS = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS(y) \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{r^{n-1} |\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} r^{n-1} u(x + rz) dS(z) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x + rz) dS(z) \end{aligned}$$

em que em (1) usamos os itens 1 e 2 do Lema 37.

Logo

$$\begin{aligned}
\phi'(r) &= \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \nabla u(x+rz) \cdot z dS(z) \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{r^{n-1} |\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot \frac{y-x}{r} dS(y) \\
&\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot \frac{y-x}{r} dS(y) \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot n(y) dS(y) \\
&\stackrel{(4)}{=} \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \nabla \cdot (\nabla u(y)) dS(y) \stackrel{(5)}{=} \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) dS(y) = 0
\end{aligned}$$

Usamos o item 1 do Lema 37 em (1), o item 2 em (2), a definição de normal para fora em (3), o Teorema da divergência em (4) e o fato de  $u$  ser harmônica em (5).

2)  $\phi(r) = u(x)$  para todo  $r \in ]0, d(x, U^c)[$ .

Sabemos que  $\phi$  é uma função constante. Logo para todo  $r$  e  $s$  em  $]0, d(x, U^c)[$ , temos  $\phi(r) = \phi(s)$ . Em particular, tomando o limite  $s$  para zero, temos

$$\phi(r) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \phi(s).$$

Lembramos que o limite acima é verdadeiro, porque, afinal, o limite é feito sobre uma função constante.

Agora notamos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{s \rightarrow 0^+} \phi(s) \\
&= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{|\partial B(x,s)|} \int_{\partial B(x,s)} u(y) dS(y) \\
&= \lim_{s \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{|\partial B(x,s)|} \int_{\partial B(x,s)} (u(y) - u(x)) dS(y) + \frac{1}{|\partial B(x,s)|} \int_{\partial B(x,s)} u(x) dS(y) \right) \\
&= \lim_{s \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{|\partial B(x,s)|} \int_{\partial B(x,s)} (u(y) - u(x)) dS(y) + u(x) \right) \\
&\stackrel{(1)}{=} u(x) + \lim_{s \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{s^{n-1} |\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (u(x+sz) - u(x)) s^{n-1} dS(y) \right) \\
&\stackrel{(2)}{=} u(x) + \lim_{s \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (u(x+sz) - u(x)) dS(y) \right) = u(x).
\end{aligned}$$

Usamos os itens 1 e 2 do Lema 37 em (1) e a continuidade de  $u$  em (2). Concluimos que

$$u(x) = \phi(r) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y).$$

□

Vamos agora provar o inverso.

**PROPOSIÇÃO 42.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$ . Suponha que  $u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u dS$ , para todo  $\overline{B(x,r)} \subset U$ . Logo  $u$  é harmônica.*

**DEMONSTRAÇÃO.** Sabemos que

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_{\partial B(x,r)} u dS = \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) \\
&\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{r^{n-1} |\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x+rz) r^{n-1} dS(z) \\
&= \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x+rz) dS(z).
\end{aligned}$$

Em (1) usamos os itens 1 e 2 do Lema 37.

Derivando em  $r$ , temos que

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{dr} \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x + rz) dS(z) \right) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \nabla u(x + rz) \cdot z dS(z) \\
 &= \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \nabla u(x + rz) \cdot z r^{n-1} dS(z) \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot \frac{y-x}{r} dS(y) \\
 &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot n(y) dS(y) \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \nabla \cdot \nabla u(y) dy \\
 &= \frac{1}{r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) dy.
 \end{aligned}$$

Em (1) usamos o item 1 do Lema 37, em (2) a normal exterior  $n$  e em (3) usamos o Teorema da Divergência.

Como  $u \in C^2(U)$ , concluímos que  $\Delta u$  é uma função contínua em  $U$  tal que

$$\int_{B(x,r)} \Delta u(y) dy = 0$$

para todo  $\overline{B(x,r)} \subset U$ . Se  $\Delta u(x_0) > 0$  para alguma  $x_0 \in U$ , então  $\Delta u(x_0) > 0$  em  $B(x_0, r)$  para algum  $r$  suficientemente pequeno, devido a continuidade de  $u$ . Logo  $\int_{B(x_0,r)} \Delta u(y) dy > 0$ , o que é um absurdo. O análogo ocorre quando  $\Delta u(x_0) < 0$  para algum  $x_0 \in U$ . Portanto, temos  $\Delta u = 0$  e  $u$  é harmônica.  $\square$

### 2.1.1. Exercícios.

EXERCÍCIO 43. Seja  $U = ]a, b[$ . Determine todas as funções harmônicas em  $U$ . Se  $f \in C(\overline{U})$ , mostre que existe uma única solução de  $\Delta u(x) = f(x)$  com condições de Dirichlet  $u(a) = u(b) = 0$  e determine esta solução. (Note que aqui  $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$ )

EXERCÍCIO 44. Considere  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$ .

i) Sejam  $u$  e  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$  funções de classe  $C^2(\overline{U})$ . Prove que

$$\nabla \cdot (v \nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u.$$

ii) Mostre, usando o teorema da divergência, que

$$\int_{\partial U} v(x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) dS(x) = \int_U \nabla v(x) \cdot \nabla u(x) dx + \int_U v(x) \Delta u(x) dx,$$

em que  $\nu$  é a normal que aponta para fora de  $U$ .

iii) Conclua que se  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^2(\overline{U})$  e é solução de

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in U \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = g(x), & x \in \partial U \end{cases},$$

em que  $f$  e  $g$  são contínuas, então

$$\int_{\partial U} g(x) dS(x) = \int_U f(x) dx.$$

EXERCÍCIO 45. Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$ . Mostre que

$$\Delta u(x) = \nabla \cdot \nabla u(x) := \operatorname{div}(\operatorname{grad}(u)).$$

Se  $D^2u(x)$  é a matriz Hessiana de  $u$  no ponto  $x$ , isto é,  $D^2u(x)$  é uma matriz  $n \times n$  dada por  $D^2u(x) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$ . Mostre que

$$\Delta u(x) = \operatorname{Tr}(D^2u(x)),$$

em que  $\operatorname{Tr}$  denota o traço da matriz.

EXERCÍCIO 46. Mostre que se  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U \subset \mathbb{C}$ , então

$$4 \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z} = \Delta f(z),$$

em que

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \text{ e } \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Conclua que uma função holomorfa, ou seja,  $C^\infty$  e que satisfaz  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0$  automaticamente é uma função harmônica.

EXERCÍCIO 47. Seja  $U = ]a, b[ \subset \mathbb{R}$ . Mostre que as funções harmônicas  $u : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazem a fórmula do valor médio:

$$u(x) = \int_{B(x,r)} u(y) dy = \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} u(y) dy,$$

para todo  $r > 0$  tal que  $[x-r, x+r] \subset ]a, b[$ .

EXERCÍCIO 48. (Folland exercício (2.B.2))

Seja  $u \in C^2(U)$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $x \in U$ . Mostre que

$$\Delta u(x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2n}{r^2} \left[ \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} u(x+ry) dS(y) - u(x) \right].$$

Conclua que se

$$u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y), \quad \forall \overline{B(x,r)} \subset U,$$

então  $u$  é harmônica.

Dica: Use a fórmula de Taylor de grau 2 em  $r$  e observe que, por simetria,  $\int_{S^{n-1}} y_j dS(y) = \int_{S^{n-1}} y_j y_k dS(y) = 0$ , se  $j \neq k$ , e que  $\int_{S^{n-1}} y_k^2 dS(y) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \sum_{j=1}^n y_j^2 dS(y) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} 1 dS(y)$ .

EXERCÍCIO 49. (Evans Cap. 2 ex. 2) Seja  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Prove que a equação de Laplace  $\Delta u(x) = 0$  é invariante por rotação, isto é, Se  $B$  é uma matriz  $n \times n$  ortogonal e  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é definida como  $v(x) = u(Bx)$ , então  $\Delta v(x) = 0$ .

EXERCÍCIO 50. (Evans Cap. 2 ex. 3) Modifique a prova do Teorema do valor médio e mostre que, se  $n \geq 3$ , então

$$u(0) = \int_{\partial B(0,r)} g dS + \frac{1}{n(n-2)|B(0,1)|} \int_{B(0,r)} \left( \frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}} \right) f dx,$$

desde que

$$\begin{cases} -\Delta u(x) &= f(x), & x \in B(0,r) \\ u(x) &= g(x) & x \in \partial B(0,r) \end{cases} .$$

### Referências:

Evans  
Folland  
Strauss

## 2.2. Regularidade (Aula do dia 9 de setembro)

Vamos agora provar regularidade. Para tanto, precisaremos da seguinte função auxiliar:

LEMA 51. A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

é uma função  $C^\infty$ .

DEMONSTRAÇÃO. Para  $t > 0$  e para  $t < 0$ , a função é  $C^\infty$ . Basta, então, mostrar que as derivadas de  $f$  em zero existem para qualquer ordem. Em particular, vamos mostrar que todas as derivadas em zero são iguais a zero.

Para isto, observamos que para cada  $j \in \mathbb{N}_0$ , existe um polinômio  $P_j$  tal que então  $\frac{d^j f}{dt^j}(t) = P_j\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t}}$ . Vamos provar este fato por indução:

Para  $j = 0$ , isto é óbvio e o polinômio é simplesmente igual a 1, já que  $\frac{d^0 f}{dt^0}(t) := f(t) = e^{-\frac{1}{t}}$ . Suponha agora que este fato valha para algum  $j \geq 0$ . Logo

$$\begin{aligned} \frac{d^{j+1}f}{dt^{j+1}}(t) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{d^j f}{dt^j} \right) (t) = \frac{d}{dt} \left( P_j \left( \frac{1}{t} \right) e^{-\frac{1}{t}} \right) \\ &= - \left( \frac{1}{t} \right)^2 \frac{dP_j}{dt} \left( \frac{1}{t} \right) e^{-\frac{1}{t}} + \left( \frac{1}{t} \right)^2 P_j \left( \frac{1}{t} \right) e^{-\frac{1}{t}}. \end{aligned}$$

Assim, definindo o polinômio  $P_{j+1}(x) = -x^2 P_j'(x) + x^2 P_j(x)$ , concluímos que

$$\frac{d^{j+1}f}{dt^{j+1}}(t) = P_{j+1} \left( \frac{1}{t} \right) e^{-\frac{1}{t}}.$$

Vamos agora mostrar que isto implica que  $\frac{d^j f}{dt^j}(0) = 0$  para todo  $j \in \mathbb{N}_0$ . Para  $j = 0$ , isto é óbvio pela definição de  $f$ . Vamos usar novamente indução. Se  $\frac{d^j f}{dt^j}(0) = 0$  para algum  $j \in \mathbb{N}_0$ , então é claro que a derivada do lado esquerdo é zero

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{d^j f}{dt^j}(h) - \frac{d^j f}{dt^j}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{0 - 0}{h} = 0,$$

já que  $\frac{d^j f}{dt^j}(t) = 0$  para todo  $t < 0$ .

Tomando o limite do lado direito, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{d^j f}{dt^j}(h) - \frac{d^j f}{dt^j}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P_j\left(\frac{1}{h}\right) e^{-\frac{1}{h}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} P_j\left(\frac{1}{h}\right) \frac{1}{h} e^{-\frac{1}{h}} = \lim_{h \rightarrow \infty} P_j(h) h e^{-h} = 0.$$

Nossa conclusão é que

$$\frac{d^{j+1}f}{dt^{j+1}}(0) = \frac{d}{dt} \left( \frac{d^j f}{dt^j} \right) (0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{d^j f}{dt^j}(h) - \frac{d^j f}{dt^j}(0)}{h} = 0.$$

Logo todas as derivadas de qualquer ordem existem em todos os pontos. A função  $f$  é, portanto,  $C^\infty$ .  $\square$

PROPOSIÇÃO 52. *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto. Suponha que  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua tal que  $u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u dS$ , para todo  $B(x,r) \subset U$ . Logo  $u$  é  $C^\infty(U)$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $\epsilon > 0$  e  $U_\epsilon := \{x \in U; d(x, \partial U) > \epsilon\}$ . Consideremos  $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  dado por  $\eta(x) = c_0 f(\epsilon^2 - |x|^2)$ , em que  $c_0 \in \mathbb{R}$ . Assim, vemos que

$$\eta(x) = \begin{cases} c_0 e^{-\frac{1}{\epsilon^2 - |x|^2}}, & |x| < \epsilon \\ 0, & |x| \geq \epsilon \end{cases}.$$

A função acima é  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , já que é composição de duas funções  $C^\infty$ :  $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \epsilon^2 - |x|^2 \in \mathbb{R}$  e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Além disso,  $\eta$  se anula fora da bola  $B_\epsilon(0)$ . Vamos escolher  $c_0 \in \mathbb{R}$  de tal forma que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(y) dy = 1 \iff c_0 = \frac{1}{\int_{B_\epsilon(0)} e^{-\frac{1}{\epsilon^2 - |x|^2}} dx}.$$

Vamos definir  $u_\epsilon : U_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$u_\epsilon(x) = \int_U \eta(x-y) u(y) dy = \int_{B(x,\epsilon)} \eta(x-y) u(y) dy,$$

já que  $y \mapsto \eta(x - y)$  se anula quando  $y \notin B(x, \epsilon)$ .

Seja  $A \subset U$  um aberto limitado tal que  $\bar{A} \subset U_\epsilon$  (aqui  $\bar{A}$  é o fecho em relação a  $\mathbb{R}^n$ , portanto  $\bar{A}$  é um compacto). Seja  $K := \{y \in \mathbb{R}^n; d(y, A) \leq \epsilon\} \subset U$ . Logo  $K$  é um compacto e, se  $x \in A$ , então

$$u_\epsilon(x) = \int_U \eta(x - y)u(y)dy \stackrel{(1)}{=} \int_K \eta(x - y)u(y)dy.$$

Em (1) usamos que se  $y \notin K$  e  $x \in A$ , então  $|x - y| > \epsilon$ . Assim  $\eta(x - y)$  é igual a zero e, portanto, basta considerar  $y \in K$ .

Como  $K$  é um compacto e  $\eta$  é uma função  $C^\infty$ , podemos derivar a expressão acima e concluir que

$$\partial_x^\alpha u_\epsilon(x) = \int_K \partial_x^\alpha \eta(x - y)u(y)dy.$$

Em particular,  $u_\epsilon$  é uma função  $C^\infty$ .

Note que se  $x \in U_\epsilon$ , então

$$\begin{aligned} u_\epsilon(x) &= \int_{B(x, \epsilon)} \eta(x - y)u(y)dy \stackrel{(1)}{=} \int_0^\epsilon \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \eta(-rz)u(x + rz)dS(z) \right) r^{n-1}dr \\ &= \int_0^\epsilon \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} c_0 f(\epsilon^2 - |rz|^2)u(x + rz)dS(z) \right) r^{n-1}dr \\ &= \int_0^\epsilon c_0 f(\epsilon^2 - r^2) \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x + rz)r^{n-1}dS(z) \right) dr \stackrel{(2)}{=} \int_0^\epsilon c_0 f(\epsilon^2 - r^2) \left( \int_{\partial B(x, r)} u(y)dS(y) \right) dr \\ &= \int_0^\epsilon c_0 f(\epsilon^2 - r^2)r^{n-1} |\mathbb{S}^{n-1}| \left( \frac{1}{r^{n-1} |\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\partial B(x, r)} u(y)dS(y) \right) dr \\ &\stackrel{(3)}{=} \int_0^\epsilon c_0 f(\epsilon^2 - r^2)r^{n-1} |\mathbb{S}^{n-1}| \left( \int_{\partial B(x, r)} u(y)dS(y) \right) dr \stackrel{(4)}{=} \int_0^\epsilon c_0 f(\epsilon^2 - r^2)r^{n-1} |\mathbb{S}^{n-1}| u(x)dr \\ &\stackrel{(5)}{=} u(x) \int_0^\epsilon \int_{\mathbb{S}^{n-1}} c_0 f(\epsilon^2 - r^2)r^{n-1}dS(z)dr \stackrel{(6)}{=} u(x) \int_{B(0, \epsilon)} \eta(y)dy = u(x). \end{aligned}$$

Em (1) usamos o item 3 do Lema 37. Em (2) usamos o item 1 do Lema 37. Em (3) usamos item 2 do Lema 37 e a definição de média. Em (4) usamos a propriedade do valor médio que assumimos na Proposição. Em (5), usamos que  $|\mathbb{S}^{n-1}| = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} dS(z)$ . Em (6), usamos novamente o item 3 do Lema 37.

Assim,  $u$  restrito a  $U_\epsilon$  é  $C^\infty$ . Como  $\cup_{\epsilon > 0} U_\epsilon = U$ , concluímos que  $u$  está em  $C^\infty(U)$ .  $\square$

Concluímos esta seção juntando todos os resultados que aprendemos no Teorema abaixo:

**TEOREMA 53.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. As seguintes propriedades abaixo são equivalentes:*

- 1) A função  $u$  é harmônica, ou seja,  $u \in C^2(U)$  e  $\Delta u(x) = 0$  para todo  $x \in U$ .
- 2) A função  $u$  é contínua e  $u(x) = \int_{B(x, r)} u dy$ , para todo  $\overline{B(x, r)} \subset U$ .
- 3) A função  $u$  é contínua e  $u(x) = \int_{\partial B(x, r)} u dS$ , para todo  $\overline{B(x, r)} \subset U$ .
- 4) A função  $u \in C^\infty(U)$  e  $\Delta u(x) = 0$  para todo  $x \in U$ .

**DEMONSTRAÇÃO.** 1) implica 2) devido ao Teorema do valor médio 41.

As condições 2) e 3) são equivalentes de acordo com a Proposição 40.

O item 3) implica que  $u$  é  $C^\infty$  de acordo com a Proposição 52. Assim, se vale 3) a função é  $C^\infty$  e vale o valor médio. Logo pela Proposição 42, a função  $u$  é harmônica e vale o item 4).

O item 4) implica 1) trivialmente.  $\square$

**COROLÁRIO 54.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  uma sequência de funções  $u_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  harmônicas. Seja  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e suponha que para todo compacto  $K \subset U$  as funções  $u_n$  convergem uniformemente para  $u$  em  $K$ . Logo  $u$  é harmônica. Em particular,  $u$  é  $C^\infty$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Sabemos que para todo  $\overline{B(x,r)} \subset U$  temos

$$u_n(x) = \int_{B(x,r)} u_n dy = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u_n(y) dy.$$

Como  $u_n$  converge uniformemente em  $\overline{B(x,r)}$ , concluímos que

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B(x,r)} u_n(y) dy = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u(y) dy.$$

Assim,  $u$  satisfaz a fórmula do valor médio. Como  $u$  é o limite de funções contínuas uniformemente sobre compactos, concluímos que  $u$  também é contínua. Assim, por ser contínua e por valer a fórmula do valor médio, a função  $u$  é harmônica.  $\square$

### Referências:

Evans  
Folland

### 2.3. Princípio do máximo e unicidade de EDPs

Vamos agora estudar uma consequência do princípio do máximo.

TEOREMA 55. *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado e  $u \in C(\overline{U})$  tal que  $u|_U$  é harmônica (ou seja,  $u|_U \in C^2(U)$  e  $\Delta u = 0$ ). Logo*

1)  $\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u$ .

2) Se  $U$  é conexo e existe  $x_0 \in U$  tal que  $u(x_0) = \max_{\overline{U}} u$ , então  $u$  é constante.

OBSERVAÇÃO 56. Usaremos frequentemente a notação  $u \in C(\overline{U}) \cap C^2(U)$  para dizer que  $u : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua e a sua restrição  $u|_U : U \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^2$ .

DEMONSTRAÇÃO. Vamos começar provando 2)

Suponha que  $u$  seja conexo e que exista  $x_0 \in U$  tal que  $u(x_0) = \max_{\overline{U}} u$ . Consideremos agora o seguinte conjunto

$$\mathcal{C} := \{x \in U; u(x) = u(x_0)\}.$$

Este conjunto é fechado em  $U$  já que  $\mathcal{C} = u^{-1}(\{u(x_0)\})$ ,  $u$  é uma função contínua e  $\{u(x_0)\}$  é um conjunto fechado.

Este conjunto também é aberto em  $U$ . De fato, se  $x \in \mathcal{C}$  e  $0 < r < d(x, \partial U)$ , então

$$u(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u(y) dy.$$

Por outro lado, também sabemos que

$$u(x) = u(x) \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} dy = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u(x) dy,$$

já que a integração acima é em  $y$ .

Assim,

$$\int_{B(x,r)} (u(x) - u(y)) dy = 0.$$

Como  $u(y) \leq \max_{\overline{U}} u = u(x_0) = u(x)$ , temos que  $u(x) - u(y) \geq 0$ . Como  $u$  é contínua, concluímos que  $u(y) = u(x) = u(x_0)$  (Caso contrário, teríamos  $\int_{B(x,r)} (u(x) - u(y)) dy > 0$ ). Assim,  $B(x,r) \subset \mathcal{C}$ .

O argumento anterior implica que  $\mathcal{C}$  é um conjunto aberto e fechado em  $U$ . Como  $U$  é conexo, temos  $\mathcal{C} = U$ . Logo  $u$  é uma função constante.

1) Seja  $x_0 \in \overline{U}$  tal que  $u(x_0) = \max_{\overline{U}} u$ . Este  $x_0$  sempre existe, já que  $\overline{U}$  é um conjunto compacto. Se  $x_0 \in \partial U$ , então concluímos que  $\max_{\partial U} u = \max_{\overline{U}} u$ . Se  $x_0 \notin \partial U$ , então seja  $C$  a componente conexa de  $U$  que contém  $x_0$ . Assim, pelo item 1) concluímos que  $u|_C$  é a função constante. Seja  $x \in \partial C$ . Logo  $u(x) = u(x_0) = \max_{\overline{U}} u$ . Basta agora mostrar que  $x \in \partial U$ . Isto implicaria que  $\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u$ .

Suponha que  $x \in \partial C$ , mas  $x \notin \partial U$ . Concluimos que  $x \in U$  e que existe  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \subset U$ . Como  $B(x, r)$  e  $C$  são conexos e  $x \in C \cap B(x, r)$ , então  $C \cup B(x, r) \subset U$  é conexo (lembramos que a união de abertos conexos com intersecção não nula também é conexo). No entanto,  $C$  é uma componente conexa. Portanto, não está contido propriamente em nenhum outro conjunto conexo de  $U$ . Assim, temos  $C \cup B(x, r) = C$ . Mas isto claramente implica que  $x$  pertence ao interior de  $C$  e não ao sua fronteira. Obtemos um absurdo.  $\square$

**COROLÁRIO 57.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado e  $u \in C(\bar{U})$  tal que  $u|_U$  é harmônica (ou seja,  $u|_U \in C^2(U)$  e  $\Delta u = 0$ ). Logo*

1)  $\min_{\bar{U}} u = \min_{\partial U} u$ .

2) Se  $U$  é conexo e existe  $x_0 \in U$  tal que  $u(x_0) = \min_{\bar{U}} u$ , então  $u$  é constante.

**DEMONSTRAÇÃO.** 1) Seja  $v = -u \in C(\bar{U}) \cap C^2(U)$  tal que  $\Delta v(x) = 0$ , para todo  $x \in U$ . Logo

$$\min_{\partial U} u = \min_{\partial U} -v = -\max_{\partial U} v \stackrel{(1)}{=} -\max_{\bar{U}} v = \min_{\bar{U}} -v = \min_{\bar{U}} u.$$

Em (1) usamos o princípio do máximo para  $v$ .

2) Se  $u(x_0) = \min_{\bar{U}} u$ , então  $-v(x_0) = \min_{\bar{U}} -v$ . Assim,

$$v(x_0) = -\min_{\bar{U}} -v = \max_{\bar{U}} v.$$

Portanto,  $v$  é uma função constante e, portanto,  $u$  também é constante.  $\square$

**PROPOSIÇÃO 58.** (*Positividade*) *Seja  $U$  um aberto conexo e limitado e  $u \in C(\bar{U}) \cap C^2(U)$  uma função tal que*

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0, & x \in U \\ u(x) &= g(x), & x \in \partial U \end{aligned} .$$

*Se  $g : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$  for uma função contínua,  $g \geq 0$  e  $g$  não for identicamente igual a zero, então  $u(x) > 0$ , para todo  $x \in U$ .*

**DEMONSTRAÇÃO.** Sabemos que

$$\min_{\bar{U}} u = \min_{\partial U} u = \min_{\partial U} g \geq 0.$$

Logo  $u \geq 0$ . Se existir  $x_0 \in U$  tal que  $u(x_0) = 0$ , então necessariamente  $u(x_0) = \min_{\bar{U}} u$ . Portanto  $u$  é constante e igual a zero. Assim,  $g$  também deve ser identicamente zero. Como isto não ocorre, concluimos que  $u(x) > 0$  para todo  $x \in U$ .  $\square$

**PROPOSIÇÃO 59.** (*Unicidade do Problema de Dirichlet*) *Seja  $U$  um aberto limitado,  $f \in C(\bar{U})$  e  $g \in C(\partial U)$ . Logo existe no máximo uma função  $u \in C(\bar{U}) \cap C^2(U)$  tal que*

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= f(x), & x \in U \\ u(x) &= g(x), & x \in \partial U \end{aligned} .$$

Note que proposição acima não diz que existe alguma solução  $u \in C(\bar{U}) \cap C^2(U)$  do problema acima. Apenas afirma que, se existir, então ela é única.

**DEMONSTRAÇÃO.** Suponha que  $u_1$  e  $u_2$  sejam solução do problema. Vamos definir  $v := u_1 - u_2$ . Como  $u_1$  e  $u_2$  pertencem a  $C(\bar{U})$ , então  $v \in C(\bar{U})$ . Além disso,  $v$  é harmônica em  $U$ , pois

$$\Delta v = \Delta u_1 - \Delta u_2 = f - f = 0.$$

Estamos assim nas condições do princípio do máximo. Portanto

$$\max_{\bar{U}} v = \max_{\partial U} v \text{ e } \min_{\bar{U}} v = \min_{\partial U} v.$$

No entanto, para  $x \in \partial U$ , temos

$$v(x) = u_1(x) - u_2(x) = g(x) - g(x) = 0.$$

Logo

$$\min_{\partial U} v = \max_{\partial U} v = 0.$$

Logo  $0 \leq v(x) \leq 0$  e, portanto,  $v$  é a função nula. Concluímos que  $u_1 = u_2$ .  $\square$

EXERCÍCIO 60. Seja  $U = ]a, b[ \subset \mathbb{R}$ . Mostre diretamente (usando a expressão geral de  $u$ ) que se  $u : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  é harmônica, então  $u$  se estende a uma função contínua em  $[a, b]$ . Além disso, o máximo e o mínimo de  $u$  ocorrem em  $a$  e  $b$ . Mostre também que se o máximo ou o mínimo ocorrerem em  $]a, b[$ , então  $u$  é constante.

EXERCÍCIO 61. (Evans cap. 2 exercício 4) Dê uma prova direta de que se  $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$  é harmônica em  $U$ , em que  $U \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto limitado, então

$$\max_{\partial U} u = \max_{\bar{U}} u.$$

(Dica: Defina  $u_\epsilon := u + \epsilon|x|^2$  para  $\epsilon > 0$  e mostre que  $u_\epsilon$  não pode atingir seu máximo sobre  $\bar{U}$  em um ponto de  $U$ .)

EXERCÍCIO 62. (Evans cap. 2 exercício 5) Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Dizemos que  $v \in C^2(\bar{U})$  é subharmônica se

$$-\Delta v(x) \leq 0, \forall x \in U.$$

a) Prove que para funções subharmônicas, temos

$$v(x) \leq \int_{B(x,\epsilon)} v(y) dy,$$

para toda bola  $B(x, \epsilon) \subset U$ .

b) Prove que

$$\max_{\partial U} v = \max_{\bar{U}} v.$$

c) Seja  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa de classe  $C^2$ . Se  $u \in C^2(\bar{U})$  é uma função harmônica em  $U$ , mostre que  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $v(x) = \phi(u(x))$  é uma função subharmônica.

c) Seja  $u \in C^2(\bar{U})$  uma função harmônica em  $U$ . Mostre que  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $v(x) = |\nabla u(x)|^2$  é uma função subharmônica.

EXERCÍCIO 63. Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Dizemos que  $v \in C^2(\bar{U})$  é superharmônica se

$$-\Delta v(x) \geq 0, \forall x \in U.$$

Prove que para funções superharmônicas, temos

$$v(x) \geq \int_{B(x,\epsilon)} v(y) dy,$$

para toda bola  $B(x, \epsilon) \subset U$ .

EXERCÍCIO 64. (Evans cap. 2 exercício 6) Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Prove que existe uma constante, que depende apenas de  $U$ , tal que

$$\max_{\bar{U}} |u| \leq C \left( \max_{\bar{U}} |f| + \max_{\partial U} |g| \right)$$

sempre que  $u$  for uma solução de

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in U \\ u(x) = g(x), & x \in \partial U \end{cases},$$

em que  $f : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas.

(Dica: Observe que  $-\Delta \left( u + \frac{|x|^2}{2n} \lambda \right) \leq 0$ , para  $\lambda := \max_{\bar{U}} |f|$ )

EXERCÍCIO 65. (Folland cap. 2, ex. 2.B.1) O exercício abaixo mostra uma versão complexa do teorema do máximo:

Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Se  $u : \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função contínua, de classe  $C^2$  no interior de  $U$  e tal que  $\Delta u(x) = 0$  para todo  $x \in U$ , então prove que  $\max_{\bar{U}} |u| = \max_{\partial U} |u|$ .

Dica: Se  $x_0 \in \bar{U}$  é tal que  $|u(x_0)| = \max_{\bar{U}} |u|$ , então existe  $\theta \in [0, 2\pi[$  tal que  $u(x_0) = Me^{i\theta}$ ,  $M = |u(x_0)|$ . Considere, então, a função harmônica com valores reais  $v(x) = \operatorname{Re}(e^{-i\theta}u(x))$ .

EXERCÍCIO 66. (Folland cap. 2 ex 2.B.3) O exercício estende o teorema do máximo:

Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e limitado. Todas as funções abaixo tem valores reais. Seja

$$L = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

em que  $a_{jk}$  e  $b_j$  são funções contínuas em  $\bar{U}$ . Suponha que  $(a_{jk})$  seja uma matriz auto-adjunta positiva:  $a_{jk} = a_{kj}$  e  $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk}(x) \xi_j \xi_k > a_0 |\xi|^2$ , para algum  $a_0 > 0$  e todo  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \neq 0$ .

a) Mostre que se  $v \in C^2(U)$  e  $Lv(x) > 0$  para todo  $x \in U$ , então  $v$  não tem máximo local em  $U$ .

Dica: Lembre-se (veja no livro do Elon de análise real volume 2, cinza) que se uma função  $C^2$  tem máximo local em  $x_0 \in U$ , então  $\nabla v(x_0) = 0$  e a matriz Hessiana  $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right)_{ij}$  é não positiva.

Lembre-se também que toda matriz auto-adjunta é diagonalizável.

b) Seja  $w(x) = e^{-M|x-x_0|^2}$ , em que  $x_0 \notin \bar{U}$ . Mostre que se  $M$  for suficientemente grande, então  $Lw(x) > 0$  para todo  $x \in \bar{U}$ .

c) Prove que se  $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$  e  $Lu(x) = 0$ , para todo  $x \in U$ , então  $\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u$ .

Dica: Mostre que isso é verdade para a função  $v = u + \epsilon w$ , para qualquer  $\epsilon > 0$ , em que  $w$  é a função do item b.

### Referências:

Evans

## 2.4. Fórmula de Harnack (Aula do dia 11 de setembro)

Vamos agora demonstrar a desigualdade de Harnack.

LEMA 67. *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto e  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função harmônica. Sejam  $x$  e  $y$  pertencentes a  $U$  tais que  $|x - y| < \frac{1}{2}d(y, U^c)$ . Logo  $u(x) \leq 2^n u(y)$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $r := |x - y|$ . Assim,  $d(y, U^c) > 2r$  e, portanto,  $\overline{B(y, 2r)} \subset U$ . Desta maneira,

$$\begin{aligned} u(y) &= \int_{B(y, 2r)} u(z) dz = \frac{1}{|B(y, 2r)|} \int_{B(y, 2r)} u(z) dz \\ &= \frac{1}{2^n r^n |B(0, 1)|} \int_{B(y, 2r)} u(z) dz \stackrel{(1)}{\geq} \frac{1}{2^n r^n |B(0, 1)|} \int_{B(x, r)} u(z) dz \\ &= \frac{1}{2^n |B(x, r)|} \int_{B(x, r)} u(z) dz = \frac{1}{2^n} \int_{B(x, r)} u(z) dz \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2^n} u(x). \end{aligned}$$

Usamos em (1) que  $u$  é uma função positiva (aqui é importante a positividade) e  $B(x, r) \subset B(y, 2r)$ . De fato, se  $v \in B(x, r)$ , então

$$|v - y| \leq |v - x| + |x - y| < 2r.$$

Logo  $v \in B(y, 2r)$ . Em (2) usamos a fórmula do valor médio.  $\square$

TEOREMA 68. (*Desigualdade de Harnack*) *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto. Se  $V \subset U$  é um aberto conexo tal que  $\bar{V} \subset U$  é compacto, então existe uma constante  $c_V > 0$  tal que*

$$\sup_V u \leq c_V \inf_V u,$$

para toda função  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  harmônica e **positiva**.

Note que precisamos da hipótese extra de positividade para o Teorema.

**OBSERVAÇÃO 69.** Note que  $\sup_V u \leq c_V \inf_V u$  ocorre se, e somente se,  $u(x) \leq c_V u(y)$  para todo  $x, y \in V$ .

( $\implies$ ) Se  $x$  e  $y \in V$ , então  $u(x) \leq \sup_V u \leq c_V \inf_V u \leq c_V u(y)$ .

( $\impliedby$ ) Basta observar que se  $\frac{1}{c_V} u(x) \leq u(y)$  para todo  $y \in V$ , então  $\frac{1}{c_V} u(x)$  é um limitante inferior para o conjunto  $\{u(y); y \in V\}$ . Como o ínfimo é a maior destes limitantes, concluímos que  $\frac{1}{c_V} u(x) \leq \inf_V u$  para todo  $x \in V$ . No entanto, isto implica que  $c_V \inf_V u$  é um limitante superior para o conjunto  $\{u(x); x \in V\}$ . Como o supremo é o menor destes limitantes, concluímos que  $\sup_V u \leq c_V \inf_V u$ .

**DEMONSTRAÇÃO.** Sabemos que  $V$  é conexo. Logo  $\bar{V}$  também é um conjunto conexo, pois é o fecho de um conexo. Seja  $\tilde{U} \subset U$  a componente conexa de  $U$  que contém  $\bar{V}$ . Como  $U$  é aberto, então  $\tilde{U}$  também é aberto, já que componentes conexas de abertos em  $\mathbb{R}^n$  são abertos. Como  $\tilde{U}$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$  e conexo, então  $\tilde{U}$  é conexo por caminhos.

Sejam  $x_0$  e  $y_0$  pertencentes a  $\bar{V}$  tais que  $u(x_0) = \min_{x \in \bar{V}} u(x) = \inf_{x \in V} u(x)$  e  $u(y_0) = \max_{x \in \bar{V}} u(x) = \sup_{x \in V} u(x)$  (a igualdade entre o máximo e o supremo ocorre pois  $\bar{V}$  é o fecho de  $V$ . O mesmo com o ínfimo e o mínimo). Como  $\tilde{U}$  é conexo por caminhos, concluímos que existe uma função contínua  $\gamma := [0, 1] \rightarrow \tilde{U} \subset U$  tal que  $\gamma(0) = y_0$  e  $\gamma(1) = x_0$ . Como  $\text{Im}\gamma = \{\gamma(t); t \in [0, 1]\}$  é um conjunto compacto,  $U^c$  é um fechado e  $\text{Im}\gamma \cap U^c = \emptyset$ , concluímos que  $d(\text{Im}\gamma, U^c) > 0$  tal que  $d(\text{Im}\gamma, U^c) > 2r$ .

Como  $[0, 1]$  é um compacto, então a função  $\gamma$  é uniformemente contínua. Assim, existe  $\delta > 0$  tal que se  $|t - s| < \delta$ , então  $|\gamma(t) - \gamma(s)| < r$ . Sejam  $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = 1$  tais que  $|t_j - t_{j-1}| < \delta$  para todo  $j \in \{1, \dots, N\}$ . Assim,  $|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| < r < \frac{1}{2}d(\text{Im}\gamma, U^c) \leq \frac{1}{2}d(\gamma(t_j), U^c)$ . Pelo Lema 67, concluímos que  $u(\gamma(t_{j-1})) \leq 2^n u(\gamma(t_j))$ . Assim,

$$\sup_{x \in V} u(x) = u(y_0) = u(\gamma(t_0)) \leq 2^n u(\gamma(t_1)) \leq 2^{2n} u(\gamma(t_2)) \leq \dots \leq 2^{Nn} u(\gamma(t_N)) = 2^{Nn} \inf_{x \in V} u(x).$$

Logo podemos escolher  $c_V = 2^{Nn}$ . □

**OBSERVAÇÃO 70.** Vamos elaborar o comentário que tentei fazer em sala de aula:

Suponha que  $U \subset \mathbb{R}^n$  seja um aberto conexo e  $x$  e  $y$  sejam dois pontos em  $U$ . Se  $U$  representa um corpo (onde vale a equação do calor) com temperatura positiva e em equilíbrio térmico e sabemos a temperatura em  $x$ , então será que a temperatura em  $y$  pode ser arbitrariamente grande?

A resposta é não! Sabemos que se o corpo está em equilíbrio térmico, então a temperatura não varia com o tempo e é dada por uma função  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  harmônica. Além disso, estamos supondo que  $u$  é positiva. Seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  uma função contínua tal que  $\gamma(0) = x$  e  $\gamma(1) = y$ . Esta curva existe. De fato, como  $U$  é conexo e aberto, então  $U$  é conexo por caminhos. Sabemos que  $\gamma([0, 1])$  é compacto em  $U$ . Seja  $2r := d(\gamma([0, 1]), U^c)$  que é estritamente positivo, pois a distância entre um compacto e um fechado disjuntos é sempre positiva. Como  $\gamma([0, 1])$  é compacto, podemos cobri-lo por finitas bolas  $B(x_1, r), \dots, B(x_N, r)$ . Vamos supor que as bolas tenham intersecção não nula com  $\gamma([0, 1])$ . Logo  $V := B(x_1, r) \cup \dots \cup B(x_N, r)$  é conexo e  $\bar{V} \subset U$  é compacto (estamos usando que se  $A$  e  $B$  são conexos com intersecção não nula, então  $A \cup B$  é conexo). Assim, estamos nas condições do teorema de Harnack. Portanto existe  $c_V > 0$  tal que  $u(x_1) \leq c_V u(x_2)$  para todo  $x_1$  e  $x_2$  em  $V$ . Em particular,  $u(y) \leq c_V u(x)$ . Logo a temperatura em  $u(y)$  não pode ser superior a temperatura  $c_V u(x)$ .

**OBSERVAÇÃO 71.** O teorema de Harnack supõe que  $V$  é um aberto cujo fecho  $\bar{V}$  é compacto e contido em  $U$ . Logo  $V \neq U$ . Assim, o teorema não implica que as funções são limitadas. Por exemplo, a função  $u : ]0, 1[ \times ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$  é harmônica mas não é limitada. No entanto, veremos mais para frente que se  $U$  for todo o  $\mathbb{R}^n$ , então toda função positiva e harmônica é limitada.

**EXERCÍCIO 72.** Seja  $U = ]a, b[ \subset \mathbb{R}$  e  $V = ]c, d[$ , em que  $a < c < d < b$ . Mostre diretamente (usando a expressão geral de  $u$ ) que existe  $c_V > 0$  tal que

$$\sup_V u \leq c_V \inf_V u,$$

para toda função harmônica positiva. Estime a constante  $c_V$ .

EXERCÍCIO 73. (Jürgen Jost) Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto e  $(u_j)$  uma sequência de funções harmônicas monotonicamente crescentes. Mostre que se existir  $y \in U$  tal que a sequência em  $\mathbb{R}$  dada por  $(u_j(y))$  for limitada, então a sequência de funções  $(u_j)$  converge uniformemente sobre compactos para uma função harmônica  $u$ .

### 2.5. Funções harmônicas radiais em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Funções harmônicas radiais vão se mostrar muito importantes no estudo de soluções tanto da equação de Laplace como na de Poisson. Antes de mais nada, vamos deixar claro o que queremos dizer com funções radiais.

DEFINIÇÃO 74. Seja  $u : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$ . Dizemos que  $u$  é uma função radial se existir  $\tilde{u} : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  tal que

$$u(x) = \tilde{u}(|x|),$$

em que  $|x| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ .

Vamos agora determinar todas as funções harmônicas radiais. observamos que

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \tilde{u}'(|x|) \frac{\partial}{\partial x_i}(|x|) = \tilde{u}'(|x|) \frac{x_i}{|x|},$$

em que usamos

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(|x|) = \frac{\partial}{\partial x_i} (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{1}{2}} 2x_i = \frac{x_i}{|x|}.$$

Além disso,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \tilde{u}'(|x|) \frac{x_i}{|x|} \right) = \tilde{u}''(|x|) \frac{x_i^2}{|x|^2} + \tilde{u}'(|x|) \frac{1}{|x|} - \tilde{u}'(|x|) \frac{x_i^2}{|x|^3}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = \tilde{u}''(|x|) \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{|x|^2} + \tilde{u}'(|x|) \frac{\sum_{i=1}^n 1}{|x|} - \tilde{u}'(|x|) \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{|x|^3} \\ &= \tilde{u}''(|x|) + \tilde{u}'(|x|) \frac{n}{|x|} - \tilde{u}'(|x|) \frac{1}{|x|}. \end{aligned}$$

Logo  $\Delta u(x) = 0$  se, e somente se,  $\tilde{u}$  satisfaz a equação abaixo:

$$(2.5.1) \quad r\tilde{u}''(r) + (n-1)\tilde{u}'(r) = 0.$$

Vamos resolver a equação acima fazendo umas contas formais. Seja  $r_0 > 0$  uma constante fixa. Logo

$$\begin{aligned} r\tilde{u}''(r) + (n-1)\tilde{u}'(r) = 0 &\implies \frac{\tilde{u}''(r)}{\tilde{u}'(r)} = \frac{(1-n)}{r} \\ \implies \frac{d}{dr} \ln(\tilde{u}'(r)) &= \frac{(1-n)}{r} \implies \ln(\tilde{u}'(r)) - \ln(\tilde{u}'(r_0)) = (1-n)(\ln(r) - \ln(r_0)) \\ \implies \ln(\tilde{u}'(r)) &= \ln\left(\tilde{u}'(r_0) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{1-n}\right) \implies \tilde{u}'(r) = \left(\frac{\tilde{u}'(r_0)}{r_0^{1-n}}\right) r^{(1-n)}. \end{aligned}$$

Integrando mais uma vez, concluímos que

$$\tilde{u}(r) = \begin{cases} a + br, & n = 1 \\ a \ln(r) + b & n = 2 \\ \frac{a}{r^{n-2}} + b & n \geq 3 \end{cases}.$$

Observamos que fizemos as contas de maneira pouco cautelosa. Afinal supomos nas passagens que  $\tilde{u}'(r) > 0$  e assim por diante. No entanto, isso pouco importa. Sabemos dos cursos de EDO que uma equação de segunda ordem terá duas soluções linearmente independentes. O que fizemos foi

apenas uma conta pouco rigorosa para tentar descobrir essas funções. Quem quiser, pode verificar que a função  $\tilde{u}$  obtida de fato resolve a Equação (2.5.1).

Vamos então enunciar nossa conclusão na forma de uma proposição.

PROPOSIÇÃO 75. *As soluções radiais  $u : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  do problema de Laplace  $\Delta u(x) = 0$  são dadas por*

$$u(x) = \begin{cases} a + b|x|, & n = 1 \\ a \ln(|x|) + b & n = 2 \\ \frac{a}{|x|^{n-2}} + b & n \geq 3 \end{cases},$$

em que  $a$  e  $b$  são constantes reais.

Existe uma escolha de constantes  $a$  e  $b$  muito usada e útil. Com estas escolhas, definimos o que chamaremos de soluções fundamentais.

DEFINIÇÃO 76. A solução fundamental (canônica) do operador de Laplace  $-\Delta$  é a função  $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}|x|, & n = 1 \\ -\frac{1}{2\pi} \ln(|x|), & n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)|B(0,1)| |x|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases}.$$

Esta escolha de constantes é particularmente interessante devido à proposição abaixo, que será importante no futuro.

PROPOSIÇÃO 77. *Seja  $n \geq 2$ ,  $r > 0$  e  $u : \partial B(x, r) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Logo a solução fundamental (canônica) satisfaz*

$$(2.5.2) \quad \int_{\partial B(x,r)} u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) dS(y) = - \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y),$$

em que  $\nu$  é a normal que aponta para fora de  $B(x, r)$ . Em particular, se  $u \equiv 1$ , temos, para todo  $r > 0$ , que

$$(2.5.3) \quad \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) dS(y) = -1.$$

DEMONSTRAÇÃO. Vemos que se  $n > 2$ , temos

$$\begin{aligned} \nabla \Phi(x) &= \frac{2-n}{n(n-2)|B(0,1)|} |x|^{1-n} \nabla(|x|) \\ &= \frac{2-n}{n(n-2)|B(0,1)|} |x|^{1-n} \frac{x}{|x|} = -\frac{1}{n|B(0,1)|} \frac{x}{|x|^n}. \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $n = 2$ , temos

$$\nabla \Phi(x) = -\frac{1}{2\pi} \nabla(\ln|x|) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{|x|} \frac{x}{|x|} = -\frac{1}{2\pi} \frac{x}{|x|^2} = -\frac{1}{n|B(0,1)|} \frac{x}{|x|^n}.$$

Portanto, para qualquer  $n \geq 2$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(x,r)} u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) dS(y) &= -\frac{1}{n|B(0,1)|} \int_{\partial B(x,r)} u(y) \frac{y-x}{|y-x|^n} \cdot \nu(y) dS(y) \\ &\stackrel{(1)}{=} -\frac{1}{|\partial B(0,1)|} \int_{\partial B(x,r)} u(y) \frac{|y-x|^2}{|y-x|^{n+1}} dS(y) \stackrel{(2)}{=} -\frac{1}{|\partial B(0,1)| r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) \\ &\stackrel{(3)}{=} -\frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) = - \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y). \end{aligned}$$

Em (1) usamos que  $\nu(y) = \frac{y-x}{|y-x|}$  e o item 4 do Lema 37. Em (2) usamos que  $|y-x| = r$ . Em (3) usamos o item 2 do Lema 37.  $\square$

Antes de estudar mais consequências das equações acima, vamos lembrar alguns fatos sobre o teorema da divergência.

**2.5.1. Teorema da divergência e algumas consequências.** Para enunciar o teorema da divergência, vamos antes recordar algumas definições.

DEFINIÇÃO 78. Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto. Dizemos que  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  pertence a  $C^k(\bar{U})$ , para  $k \in \mathbb{N}_0$ , se  $u \in C^k(U)$  e para todos  $|\alpha| \leq k$ , as funções  $\partial^\alpha u : U \rightarrow \mathbb{R}$  se estendem a uma função contínua de  $\bar{U}$  em  $\mathbb{R}$ . Dizemos que  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^N$  pertence a  $C^k(\bar{U}; \mathbb{R}^N)$  se  $u = (u_1, \dots, u_N)$  e cada função  $u_j$  pertence a  $C^k(\bar{U})$ .

Observamos que a extensão tem que ser única. De fato, pela continuidade, se  $x \in \partial U := \bar{U} \setminus U$ , então

$$\partial^\alpha u(x_0) = \lim_{x \in U, x \rightarrow x_0} \partial^\alpha u(x).$$

Note também que a classe de funções  $C^k(\bar{U})$  forma uma álgebra, ou seja, combinações lineares e produtos de funções em  $C^k(\bar{U})$  continuam a pertencer a  $C^k(\bar{U})$ .

Se  $k = 0$ , então  $C(\bar{U})$  pode denotar as funções contínuas  $u : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  e pode denotar as funções  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  que admitem uma extensão contínua em  $\bar{U}$ . Isto não causa muita confusão. De fato, se  $u : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua é claro que  $u|_U : U \rightarrow \mathbb{R}$  possui uma única extensão contínua em  $\bar{U}$ . Por outro lado, uma função  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  que admite uma extensão contínua em  $\bar{U}$  pode ser identificada com a sua extensão de  $\bar{U}$  em  $\mathbb{R}$ .

EXEMPLO 79. Seja  $U = ]0, 1[ \subset \mathbb{R}$ . A função  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $u(x) = \sqrt{x}$  é tal que

- 1) A função  $u$  pertence a  $C(U)$ , pois é contínua no interior deste intervalo.
- 2) A função  $u$  pertence a  $C(\bar{U})$ , já que  $x \in [0, 1] \rightarrow \sqrt{x}$  é uma extensão contínua de  $u$ .
- 3) A função  $u$  pertence a  $C^1(U)$ , já que  $\frac{du}{dx}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  é uma função contínua em  $U$ .
- 4) A função  $u$  não pertence a  $C^1(\bar{U})$ , já que a derivada não tem extensão contínua em  $[0, 1]$ . De fato, temos  $\lim_{x \in U, x \rightarrow 0} \frac{du}{dx}(x) = \infty$ .

Lembramos também a definição de abertos de classe  $C^k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ .

DEFINIÇÃO 80. Dizemos que um aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^k$ ,  $k \in \{1, 2, \dots\}$ , se para todo ponto  $x_0 \in \partial U$ , existir um aberto  $\tilde{U} \ni x_0$  e um difeomorfismo  $\varphi : \tilde{U} \rightarrow B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  tal que

$$\begin{aligned} \varphi(\tilde{U} \cap U) &= \{x = (x_1, \dots, x_n) \in B(0, 1); x_n > 0\} \\ \varphi(\tilde{U} \cap \partial U) &= \{x = (x_1, \dots, x_n) \in B(0, 1); x_n = 0\} \\ \varphi(\tilde{U} \cap U^c) &= \{x = (x_1, \dots, x_n) \in B(0, 1); x_n < 0\} \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO 81. Usando a definição acima, dado um ponto  $x_0 \in \partial U$  e a função  $\varphi$  como na definição acima, podemos definir  $\phi : \{x' \in \mathbb{R}^{n-1}; |x'| < 1\} \rightarrow \partial U$  por

$$\phi(x') = \varphi^{-1}(x', 0).$$

A função  $\phi$  é de classe  $C^k$ , é um homeomorfismo (já que é a restrição do homeomorfismo  $\varphi^{-1}$  em  $\{x = (x_1, \dots, x_n) \in B(0, 1); x_n = 0\}$ ) e  $\phi'(x')(h') = (\varphi^{-1})'(x', 0)(h', 0)$  tem posto  $n - 1$ . Logo  $\phi$  é uma parametrização (veja o livro do Elon, análise real volume 2, capítulo 7. O livro cinza dele). Isto implica que  $\partial U$  é uma superfície de classe  $C^k$  de dimensão  $n - 1$ , ou seja, uma hiperfície.

TEOREMA 82. (Teorema da Divergência) Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$  e  $u \in C^1(\bar{U}; \mathbb{R}^N)$ . Logo a seguinte igualdade é válida

$$(2.5.4) \quad \int_U \nabla \cdot u(x) dx = \int_{\partial U} u(x) \cdot \nu(x) dS(x),$$

em que  $\nu(x) \in \mathbb{R}^n$  é a normal que aponta para fora de  $U$  no ponto  $x \in \partial U$ . A função  $u(x)$  no ponto  $x \in \partial U$  corresponde à única extensão contínua de  $u$  em  $\bar{U}$ .

COROLÁRIO 83. *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$  e  $u \in C^1(\bar{U})$ . Logo a seguinte igualdade é válida*

$$(2.5.5) \quad \int_U \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) dx = \int_{\partial U} u(x) \nu_j(x) dS(x),$$

em que  $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x)) \in \mathbb{R}^n$  é a normal que aponta para fora de  $U$  no ponto  $x \in \partial U$ . A função  $u(x)$  no ponto  $x \in \partial U$  corresponde a única extensão contínua de  $u$  em  $\bar{U}$ .

DEMONSTRAÇÃO. Basta definir  $F \in C^1(\bar{U}; \mathbb{R}^n)$  por  $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$ , em que  $F_i(x) = \delta_{ij}u(x)$ , ou seja,  $F(x) = (0, \dots, 0, u(x), 0, \dots, 0)$ , em que  $u(x)$  aparece na  $j$ -ésima casa. Assim, temos que

$$\nabla \cdot F(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x) = \sum_{i=1}^n \delta_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)$$

e

$$F(x) \cdot \nu(x) = \sum_{i=1}^n F_i(x) \nu_i(x) = \sum_{i=1}^n u(x) \delta_{ij} \nu_i(x) = u(x) \nu_j(x).$$

Desta forma, aplicando o teorema da divergência para a função  $F$  implica o resultado.  $\square$

É interessante notar que se  $u = (u_1, \dots, u_n) \in C^1(\bar{U}; \mathbb{R}^n)$  e se somarmos em  $j$  a expressão 2.5.5 para  $u = u_j$ , obtemos 2.5.4. Desta maneira, as duas fórmulas são equivalentes.

O teorema da divergência também pode ser interpretado como um teorema sobre interação por partes. De fato, podemos facilmente provar a seguinte consequência:

PROPOSIÇÃO 84. *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$  e  $f$  e  $g$  duas funções em  $C^1(\bar{U})$ . Logo*

$$(2.5.6) \quad \int_U \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g(x) dx = - \int_U f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial U} f(x) g(x) \nu_i(x) dS(x),$$

em que  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$  é a normal a  $\partial U$  no ponto  $x$  e que aponta para fora de  $U$ .

DEMONSTRAÇÃO. Basta aplicar a equação 2.5.5 para  $u(x) = f(x)g(x)$ . De fato, neste caso temos

$$\int_U \frac{\partial}{\partial x_j} (f(x)g(x)) dx = \int_{\partial U} f(x)g(x) \nu_j(x) dS(x).$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (f(x)g(x)) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)g(x) + f(x) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x),$$

o resultado segue facilmente.  $\square$

OBSERVAÇÃO 85. A fórmula acima é a versão  $n$ -dimensional da fórmula

$$\int_a^b \frac{df}{dx}(x)g(x) dx = - \int_a^b f(x) \frac{dg}{dx}(x) dx + f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

OBSERVAÇÃO 86. Se assumirmos a validade da fórmula 2.5.6 para todas as funções  $f$  e  $g$  em  $C^1(\bar{U})$ , então, dada uma função  $u = (u_1, \dots, u_n) \in C^1(\bar{U}; \mathbb{R}^n)$ , podemos colocar  $g = 1$ ,  $f = u_i$  e obter

$$\int_U \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial U} u_i(x) \nu_i(x) dS(x).$$

Novamente, somando em  $i$ , reobtemos o Teorema da divergência. Desta maneira, o Teorema da divergência equivale a validade da fórmula para todas as funções  $f$  e  $g$  em  $C^1(\bar{U})$ .

É interessante notar que as fórmulas (2.5.4), (2.5.5) e (2.5.6) são todas equivalentes, ou seja, uma implica a outra.

**2.5.2. Fórmulas de Green.** Algumas consequências simples e importantes do teorema da divergência são as chamadas fórmulas de Green. Elas serão bastante usadas a partir daqui.

PROPOSIÇÃO 87. *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$  e  $f, g \in C^2(\bar{U})$ . Logo as seguintes igualdades são válidas:*

- 1)  $\int_U \Delta f(x) dx = \int_{\partial U} \frac{\partial f}{\partial \nu}(x) dS(x)$ .
- 2) *Primeira identidade de Green:*

$$\int_U \nabla f(x) \cdot \nabla g(x) dx = - \int_U f(x) \Delta g(x) dx + \int_{\partial U} f(x) \frac{\partial g}{\partial \nu}(x) dS(x).$$

- 3) *Segunda identidade de Green:*

$$\int_U (f(x) \Delta g(x) - g(x) \Delta f(x)) dx = \int_{\partial U} \left( f(x) \frac{\partial g}{\partial \nu}(x) - g(x) \frac{\partial f}{\partial \nu}(x) \right) dS(x).$$

Aqui  $\frac{\partial f}{\partial \nu}$  indica a derivada direcional na direção  $\nu$ , que é a normal que aponta para fora de  $\partial U$ . Em livros de cálculo, geralmente só se define derivadas direcionais de pontos dentro de conjuntos abertos. Aqui estamos usando a notação para um ponto  $x \in \partial U$ . Assim, a derivada direcional deve ser entendida como

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x) = \nabla f(x) \cdot \nu(x),$$

em que  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ ,  $x \in \partial U$ , corresponde a (única) extensão contínua da função  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  em  $\bar{U}$ . A nomenclatura primeira e segunda identidade foi retirada do livro do Strauss.

DEMONSTRAÇÃO. 1) Basta observar que

$$\int_U \Delta f(x) dx = \int_U \nabla \cdot \nabla f(x) dx \stackrel{(1)}{=} \int_{\partial U} \nabla f(x) \cdot \nu(x) dS(x) \stackrel{(2)}{=} \int_{\partial U} \frac{\partial f}{\partial \nu}(x) dS(x).$$

Em (1) usamos o teorema da divergência e em (2) usamos a definição de  $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ .

2) Inicialmente, observamos que (verifique!)

$$\nabla \cdot (f \nabla g) = f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g.$$

Assim

$$\begin{aligned} \int_U \nabla f(x) \cdot \nabla g(x) dx &= - \int_U f(x) \Delta g(x) dx + \int_U \nabla \cdot (f(x) \nabla g(x)) dx \\ &\stackrel{(1)}{=} - \int_U f(x) \Delta g(x) dx + \int_{\partial U} f(x) \nabla g(x) \cdot \nu(x) dx \\ &\stackrel{(2)}{=} - \int_U f(x) \Delta g(x) dx + \int_{\partial U} f(x) \frac{\partial g}{\partial \nu}(x) dS(x). \end{aligned}$$

Em (1) usamos o teorema da divergência e em (2) usamos a definição de derivada direcional em  $\partial U$ .

3) Usando o item 2, sabemos que

$$\int_U \nabla f(x) \cdot \nabla g(x) dx = - \int_U f(x) \Delta g(x) dx + \int_{\partial U} f(x) \frac{\partial g}{\partial \nu}(x) dS(x)$$

e

$$\int_U \nabla f(x) \cdot \nabla g(x) dx = - \int_U g(x) \Delta f(x) dx + \int_{\partial U} g(x) \frac{\partial f}{\partial \nu}(x) dS(x).$$

Assim, igualando as equações acima, obtemos

$$- \int_U f(x) \Delta g(x) dx + \int_{\partial U} f(x) \frac{\partial g}{\partial \nu}(x) dS(x) = - \int_U g(x) \Delta f(x) dx + \int_{\partial U} g(x) \frac{\partial f}{\partial \nu}(x) dS(x).$$

Isto conclui o resultado.  $\square$

**Referências:**

Evans  
 Strauss  
 Elon

**2.6. Teorema de Liouville**

Uma consequência simples das propriedades de funções harmônicas e de (2.5.5) é o teorema de Liouville.

TEOREMA 88. *Seja  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função harmônica e limitada. Logo  $u$  é a função constante.*

DEMONSTRAÇÃO. Sabemos que, como  $u$  é harmônica, então  $u$  é  $C^\infty$  pelo Teorema 52. Pelo Teorema de Schwarz, temos

$$\Delta \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) (x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta u(x) = 0.$$

Assim, a função  $\frac{\partial u}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  também é harmônica para todo  $i$ . Pela fórmula do valor médio, temos

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \int_{B(x,R)} \frac{\partial u}{\partial x_i}(y) dy = \frac{1}{|B(x,R)|} \int_{B(x,R)} \frac{\partial u}{\partial x_i}(y) dy \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{|B(x,R)|} \int_{\partial B(x,R)} u(y) \nu_i(y) dS(y),$$

em que usamos a Equação (2.5.5) em (1). Sabemos que existe uma constante  $C > 0$  tal que  $|u(y)| \leq C$  para todo  $y \in \mathbb{R}^n$ . Assim,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| &\leq \frac{1}{|B(x,R)|} \int_{\partial B(x,R)} |u(y) \nu_i(y)| dS(y) \\ &\leq C \frac{1}{|B(x,R)|} \int_{\partial B(x,R)} dS(y) = C \frac{|\partial B(x,R)|}{|B(x,R)|} \\ &= C \frac{R^{n-1} |\partial B(x,1)|}{R^n |B(x,1)|} = \left( C \frac{|\partial B(x,1)|}{|B(x,1)|} \right) \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Como isto vale para todo  $R$ , temos

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \left( C \frac{|\partial B(x,1)|}{|B(x,1)|} \right) \frac{1}{R} = 0.$$

Concluimos que as derivadas de  $u$  são nulas. Portanto  $u$  é uma função constante, já que o conjunto  $\mathbb{R}^n$  é conexo.  $\square$

**2.6.1. Exercícios.**

EXERCÍCIO 89. Se  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto, for uma função harmônica, então mostre que  $\partial^\alpha u : U \rightarrow \mathbb{R}$  também é harmônica, para todo  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ .

EXERCÍCIO 90. Se  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  for uma função harmônica para a qual existe  $C > 0$  tal que  $|u(x)| \leq C(1 + |x|)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , então mostre  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  são funções limitadas (Dica: siga o argumento do teorema de Liouville). Conclua que existem constantes  $a_0, a_1, \dots, a_n$  tais que

$$u(x) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + a_0.$$

EXERCÍCIO 91. Generalize o exercício anterior: Mostre que se  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  for uma função harmônica para a qual existem constantes  $C > 0$  e  $N \in \mathbb{N}_0$  tais que  $|u(x)| \leq C(1 + |x|)^N$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , então  $u$  é um polinômio.

(Dica1: Use o argumento do Teorema de Liouville com  $R = |x|$ , para  $|x| \geq 1$ , para mostrar que se  $|u(x)| \leq C(1 + |x|)^N$ , então  $\left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| \leq C(1 + |x|)^{N-1}$ .)

(Dica2: suponha que  $\partial^\alpha u(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e todo  $|\alpha| = M$ . Use a fórmula de Taylor para provar que  $u$  é um polinômio.)

EXERCÍCIO 92. (Outra demonstração do Teorema de Liouville. Folland Teorema 2.16) Seja  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $R > |x|$  e  $D$  o conjunto  $(B(x, R) \setminus B(0, R)) \cup (B(0, R) \setminus B(x, R))$ .

- i) Mostre que se  $y \in D$ , então  $R - |x| < |y| < R + |x|$ .  
 ii) Mostre que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{(R + |x|)^n - (R - |x|)^n}{R^n} = 0.$$

iii) Suponha que  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função harmônica e limitada. Use a fórmula do valor médio  $u(x) = \int_{B(x, R)} u(y) dy$  e  $u(0) = \int_{B(0, R)} u(y) dy$  e conclua que

$$|u(x) - u(0)| = \left| \int_{B(x, R)} u(y) dy - \int_{B(0, R)} u(y) dy \right| = \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{B(x, R)} u(y) dy - \int_{B(0, R)} u(y) dy \right| \stackrel{(1)}{=} 0.$$

A igualdade (1) é a único ponto que é preciso mostrar. Para isto, use i) e ii).

iv) Conclua que vale o teorema de Liouville.

### Referências:

Evans  
 Folland

## 2.7. Representação de uma função de classe $C^2$ (Aula do dia 16 de setembro)

Uma consequência da segunda identidade de Green é a possibilidade de representação de uma função de classe  $C^2$  através de uma integral. Aqui e adiante, sempre usaremos a seguinte notação: Se  $g : K \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e limitada definida sobre o conjunto  $K$ , então

$$\|g\|_{L^\infty(K)} := \sup_{x \in K} |g(x)|.$$

TEOREMA 93. Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , um aberto limitado de classe  $C^1$  e  $u \in C^2(\bar{U})$ . Logo para todo  $x \in U$ , temos

$$(2.7.1) \quad u(x) = \int_{\partial U} \left( \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) u(y) \right) dS(y) - \int_U \Phi(y-x) \Delta u(y) dy.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $x \in U$  e  $\bar{B}(x, \epsilon) \subset U$ . Vamos definir  $V_\epsilon := U \setminus B(x, \epsilon)$ . Logo  $V_\epsilon$  também é um aberto limitado de classe  $C^1$ . Assim, concluímos pela segunda identidade de Green que

$$\int_{V_\epsilon} (u(y) \Delta \Phi(y-x) - \Phi(y-x) \Delta u(y)) dy = \int_{\partial V_\epsilon} \left( u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) - \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right) dS(y).$$

Note que  $\nu$  é sempre a normal que aponta para fora de  $V_\epsilon$ .

A Equação (2.7.1) será obtida tomando o limite  $\epsilon \rightarrow 0$  na expressão acima.

Antes disso, observamos que  $\Delta \Phi(y-x) = 0$  para  $y \neq x$ . Como este é sempre o caso em  $V_\epsilon$ , temos

$$- \int_{V_\epsilon} \Phi(y-x) \Delta u(y) dy = \int_{\partial V_\epsilon} \left( u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) - \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right) dS(y).$$

Como  $\partial V_\epsilon = \partial U \cup \partial B(x, \epsilon)$ , concluímos que

$$\begin{aligned} & \int_{\partial B(x, \epsilon)} \left( u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) - \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right) dS(y) \\ &= \int_{\partial U} \left( \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) \right) dS(y) - \int_{V_\epsilon} \Phi(y-x) \Delta u(y) dy. \end{aligned}$$

Assim, para terminar a demonstração basta provar que

i)  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{V_\epsilon} \Phi(y-x) \Delta u(y) dy = \int_U \Phi(y-x) \Delta u(y) dy$ .

ii)  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(x, \epsilon)} \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) dS(y) = 0$ .

iii)  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(x, \epsilon)} u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) dS(y) = u(x)$ .

Vamos provar por etapa:

**Demonstração de i)**

Basta observar que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{V_\epsilon} \Phi(y-x) \Delta u(y) dy &= \int_U \Phi(y-x) \Delta u(y) dy \\ - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{B(x,\epsilon)} \Phi(y-x) \Delta u(y) dy &= \int_U \Phi(y-x) \Delta u(y) dy, \end{aligned}$$

pois

$$\left| \int_{B(x,\epsilon)} \Phi(y-x) \Delta u(y) dy \right| \leq \|\Delta u\|_{L^\infty(B(x,\epsilon))} \int_{B(x,\epsilon)} |\Phi(y-x)| dy.$$

A expressão acima vai a zero, já que  $y \mapsto \Phi(y-x)$  é uma função integrável. De fato,

$$\int_{B(x,\epsilon)} \Phi(y-x) dy \stackrel{(1)}{=} \int_0^\epsilon \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Phi(r) r^{n-1} dr dS(z) = |\mathbb{S}^{n-1}| \int_0^\epsilon \Phi(r) r^{n-1} dr = \begin{cases} \int_0^\epsilon r \ln(r) dr, & n = 2 \\ \frac{1}{n-2} \int_0^\epsilon r dr, & n > 2 \end{cases},$$

em ambos os casos, vemos que o limite as expressões vão a zero quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Em (1) usamos o item 3 do Lema 37.

**Demonstração de ii)**

Para  $n = 2$ , temos

$$\int_{\partial B(x,\epsilon)} \Phi(y-x) dS(y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(0,\epsilon)} \ln(|x|) dS(y) = -\epsilon \ln(\epsilon).$$

Para  $n \geq 3$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(x,\epsilon)} \Phi(y-x) dS(y) &= \int_{\partial B(0,\epsilon)} \frac{1}{n(n-2) |B(0,1)| |x|^{n-2}} dS(y) \\ &= \frac{1}{n(n-2) |B(0,1)|} \frac{1}{\epsilon^{n-2}} \epsilon^{n-1} |\mathbb{S}^{n-1}| \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{(n-2)} \epsilon. \end{aligned}$$

Em (1), usamos que  $n |B(0,1)| = |\mathbb{S}^{n-1}|$ , de acordo com o item 4 do Lema 37 com  $x = 0$  e  $r = 1$ . Assim

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B(x,\epsilon)} \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) dS(y) \right| &= \left| \int_{\partial B(x,\epsilon)} \Phi(y-x) \nabla u(y) \cdot \nu(y) dS(y) \right| \\ &\leq \|\nabla u(y)\|_{L^\infty(\partial B(x,\epsilon))} \int_{\partial B(x,\epsilon)} |\Phi(y-x)| dS(y). \\ &\leq \begin{cases} \frac{1}{(n-2)} \|\nabla u(y)\|_{L^\infty(\partial B(x,\epsilon))} \epsilon & , n > 2 \\ \|\nabla u(y)\|_{L^\infty(\partial B(x,\epsilon))} \epsilon \ln \epsilon & , n = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Acima usamos a desigualdade de Cauchy-Schwartz:

$$\nabla u(y) \cdot \nu(y) \leq \|\nabla u(y)\| \|\nu(y)\| = \|\nabla u(y)\|.$$

Vemos facilmente que o limite vai a zero quando  $\epsilon \rightarrow 0$  para  $n \geq 2$ .

**Demonstração de iii)**

Vemos que

$$\int_{\partial B(x,\epsilon)} u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) dS(y) \stackrel{(1)}{=} \int_{\partial B(x,\epsilon)} u(y) dS(y) = \int_{\partial B(x,\epsilon)} (u(y) - u(x)) dS(y) + u(x).$$

Em (1), usamos 2.5.2. O sinal positivo em (1) aparece devido à direção da normal: A normal que aponta para fora de  $V_\epsilon$  aponta para dentro de  $B(x,\epsilon)$ .

Como

$$\left| \int_{\partial B(x,\epsilon)} (u(x) - u(y)) dS(y) \right| \leq \int_{\partial B(x,\epsilon)} |u(x) - u(y)| dS(y) \leq \|u(x) - u(\cdot)\|_{L^\infty(\partial B(x,\epsilon))}$$

e  $u$  é contínua (aqui usamos  $u(x) - u(\cdot)$  para denotar a função  $y \in \partial B(x, \epsilon) \mapsto u(x) - u(\cdot)$ , ou seja, o ponto indica a variável que está sendo tomado o sup), concluímos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|u(x) - u(\cdot)\|_{L^\infty(\partial B(x, \epsilon))} = 0$$

e que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(x, \epsilon)} u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y - x) dS(y) = u(x).$$

□

### 2.7.1. Exercícios.

EXERCÍCIO 94. (Strauss, exercício 3 da seção 7.2: Outra demonstração da fórmula do valor médio) Seja  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto, uma função harmônica. Seja  $x \in U$  e  $r > 0$  tal que  $\overline{B(x, r)} \subset U$ . Use a fórmula 2.7.1 para  $U = \overline{B(x, r)}$  e mostre que a fórmula do valor médio vale.

EXERCÍCIO 95. (Strauss, exercício 2 da seção 7.2) Seja  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  tal que  $\phi(x) = 0$  para  $|x| \geq R$ , em que  $R$  é uma constante. Mostre que

$$\phi(0) = -\frac{1}{4\pi} \int_U \frac{1}{|x|} \Delta \phi(x) dx,$$

em que  $U \subset \mathbb{R}^3$  é qualquer aberto limitado de classe  $C^1$  que contém a bola  $\overline{B(0, R)}$ .

#### Referências:

Evans  
Strauss

## Distribuições

### 3.1. Motivação

Como podemos interpretar a solução fundamental da equação de Laplace? Vamos nesta seção buscar uma interpretação. Os cálculos nessa seção **não** serão feitos de forma rigorosa.

A solução fundamental  $\Phi$  aparece em diversos contextos físicos. Em três dimensões, ela é dada por

$$\Phi(x) = \frac{1}{n(n-2)|B(0,1)|} \frac{1}{|x|^{n-2}} \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{3(3-2)\frac{4}{3}\pi} \frac{1}{|x|^{3-2}} = \frac{1}{4\pi|x|}.$$

Usamos em (1) que a bola de raio  $r$  em dimensão 3 tem volume  $\frac{4}{3}\pi r^3$ . Em particular,  $|B(0,1)| = \frac{4}{3}\pi$ . Lembramos de dois exemplos em que esta expressão ocorre:

- (1) Na teoria da gravitação de Newton, o potencial gravitacional  $\varphi_g$  de um corpo localizado em  $(0,0,0)$  com massa  $m$  é dado por

$$(3.1.1) \quad \varphi_g(x) = -\frac{Gm}{|x|} = -4\pi Gm\Phi(x).$$

Assim, a solução fundamental é igual a  $-\frac{\varphi_g(x)}{4\pi Gm}$ , em que  $\varphi_g(x)$  é o potencial gravitacional gerado por uma massa  $m$  concentrada na origem.

- (2) Na teoria do eletromagnetismo, o potencial elétrico  $\varphi_e$  de um corpo localizado em  $(0,0,0)$  com carga  $q$  é dado por

$$\varphi_e(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|x|} = \frac{q}{\epsilon_0}\Phi(x).$$

Assim, a solução fundamental é igual a  $\frac{\epsilon_0\varphi_e(x)}{q}$ , em que  $\varphi_e(x)$  é o potencial elétrico gerado por uma carga  $q$  concentrada na origem.

Vimos no começo do estudo de funções harmônicas que os potenciais elétrico e gravitacional satisfazem as equações abaixo:

$$(3.1.2) \quad \Delta\varphi_g(x) = 4\pi G\rho_g(x) \text{ e } \Delta\varphi_e(x) = -\frac{\rho_e(x)}{\epsilon_0},$$

em que  $\rho_g$  é a densidade de massa e  $\rho_e$  é a densidade de carga. Quem seriam então as funções  $\rho_g$  e  $\rho_e$ ?

Vamos considerar a função  $\rho_g$ , já que o argumento para  $\rho_e$  é igual. Para  $x \neq (0,0,0)$ , sabemos que  $\Delta\Phi(x) = 0$ . Logo a função  $\rho_g$  deve ser igual a 0 para  $x \neq 0$ . Por outro lado, suponha que valesse o teorema da divergência na bola  $B(0,1)$  para função  $\Phi$  (Não vale! A função  $\Phi$  não é  $C^1$ !). Logo teríamos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_g dx &\stackrel{(1)}{=} \int_{B(0,1)} \rho_g dx \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{4\pi G} \int_{B(0,1)} \Delta\varphi_g(x) dx \stackrel{(3)}{=} -\frac{1}{4\pi G} \int_{B(0,1)} 4\pi Gm\Delta\Phi(x) dx \\ &= -m \int_{B(0,1)} \Delta\Phi(x) dx = -m \int_{B(0,1)} \nabla \cdot \nabla\Phi(x) dx \stackrel{(4)}{=} -m \int_{\partial B(0,1)} \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(x) dx \stackrel{(5)}{=} m. \end{aligned}$$

Em (1) usamos que  $\rho_g(x)$  deve ser igual a zero fora da origem. Em particular,  $\rho_g(x) = 0$  para  $x \notin B(0,1)$ . Em (2), usamos a equação (3.1.2). Em (3), usamos (3.1.1). Em (4) usamos (não pode!) o teorema da divergência. Por fim, em (5), usamos (2.5.3).

Assim a função  $\rho_g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  deve ser igual a zero fora da origem e tal que  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_g dx = m$ .

Isto nos motiva a definir “a função” delta de Dirac. A função delta de Dirac  $\delta_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que  $\delta_0(x) = 0$  para  $x \neq 0$  e  $\int_{\mathbb{R}^n} \delta_0(x) dx = 1$ . Se uma tal função existisse, teríamos

$$\rho_g(x) = m\delta_0(x) \text{ e } \Delta\varphi_g(x) = 4\pi Gm\delta_0(x).$$

Ou seja, a função delta de Dirac  $\delta_0$  representa a densidade de massa quando a massa total do sistema é igual a 1 e está concentrada na origem.

Da mesma forma, usando o potencial elétrico e o mesmo argumento acima, teríamos

$$\rho_e(x) = q\delta_0(x) \text{ e } \Delta\varphi_e(x) = -\frac{q}{\epsilon_0}\delta_0(x).$$

Ou seja, a função delta de Dirac representa aqui a densidade de carga quando toda a carga total do sistema é igual a 1 e está concentrada na origem.

Por fim, pelas contas acima, vemos que a solução fundamental  $\Phi$  deveria ser tal que

$$-\Delta\Phi(x) = \delta_0(x).$$

Infelizmente uma função como a delta de Dirac não existe e as contas acima não podem ser feitas de forma rigorosa, não como feito acima pelo menos. Algumas referências ainda assumem que  $\delta_0(0) = \infty$ , mas isso não ajuda em nada. Mesmo usando a teoria de integração de Lebesgue e a reta estendida  $[0, \infty]$ , a integral de uma tal função sempre seria igual a zero.

Mas vamos insistir um pouco mais. Suponha que a tal função delta de Dirac existisse. O que aconteceria se integrássemos  $\delta_0(x)f(x)$ , em que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua? Bom, teríamos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)f(x)dx = \int_{\{0\}} \delta(x)f(x)dx = \int_{\{0\}} \delta(x)f(0)dx = f(0) \int_{\{0\}} \delta(x)dx = f(0) \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)dx = f(0),$$

em que usamos que a integral em  $\mathbb{R}^n$  é igual a integral em  $\{0\}$ , já que  $\delta_0(x) = 0$  para  $x \neq 0$ . **Não tente justificar a conta acima!!!** É uma baboseira mesmo. No entanto, serve para motivar uma definição rigorosa da “função” delta de Dirac. Vemos acima que ela leva funções contínuas  $f$  nos números reais  $f(0)$ . Podemos, portanto, definir deltas de Dirac como funcionais lineares. Isto será justificado através da teoria das distribuições.

Esta teoria surgiu nos anos 40 e foi desenvolvida pelo francês Laurent Schwarz, que ganhou a medalha Fields com isso. Os resultados desta teoria apresentados nestas notas, aqui desenvolvidos muito rapidamente, são provavelmente os resultados mais recentes que serão vistos nesse curso.

#### Referências:

Para o potencial elétrico e gravitacional veja o capítulo 6 de

Tom W. B. Kibble, Classical Mechanics, Imperial College Press.

Para a história da Teoria das Distribuições veja o capítulo 6 de

L. Schwartz, A Mathematician Grappling with His Century. Birkhäuser, 2001.

### 3.2. Voltando ao rigor matemático

Agora vamos parar com as tais contas sem rigor da seção passada e começar a fazer a teoria de forma séria. Antes de mais nada, vamos definir um conceito que será bastante importante: o de suporte de uma função.

DEFINIÇÃO 96. Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua. O suporte de  $f$  é o conjunto em  $U$  definido da seguinte maneira

$$\text{supp}(f) = \overline{U \cap \{x \in U; f(x) \neq 0\}}.$$

Lembrando que o conjunto  $U \cap \{x \in U; f(x) \neq 0\}$  pode ser definido também como o fecho de  $\{x \in U; f(x) \neq 0\}$  em  $U$  (veja o livro do Elon, Análise 2, pra mais detalhes sobre as definições).

EXEMPLO 97. Considere a função  $f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 1 - 2x$ , se  $x < \frac{1}{2}$ , e  $f(x) = 0$ , se  $x \geq \frac{1}{2}$ . Logo  $\{x \in U; f(x) \neq 0\} = ]0, \frac{1}{2}[$  e

$$\text{supp}(f) = ]0, \frac{1}{2}[\cap]0, 1[ = [0, \frac{1}{2}]\cap]0, 1[ = ]0, \frac{1}{2}].$$

Observe que o suporte não é compacto.

A definição é mais simples do que parece e podemos mostrar as seguintes equivalências (verifique! É apenas um exercício de topologia de  $\mathbb{R}^n$ ):

PROPOSIÇÃO 98. *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função e  $X \subset U$ . Logo as seguintes afirmações são equivalentes:*

- a)  $X = \text{supp}(f)$ .
- b)  $x \in X$  se, e somente se, existe uma sequência  $(x_n)$  em  $U$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  e  $f(x_n) \neq 0$ .
- c)  $X = (\cup \{A \subset U; A \text{ é um conjunto aberto e } f|_A = 0\})^c$ , ou seja,  $X$  é o complementar do maior aberto em  $U$  dentro do qual  $f$  se anula.

Usando o conceito de suporte de uma função, podemos definir classes de funções de suporte compacto em um aberto. Esses conjuntos de funções são muito úteis.

DEFINIÇÃO 99. Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto. A classe de funções  $C_c^k(U)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ , chamada de classe das funções  $C^k$  de suporte compacto, consiste no conjunto de todas as funções  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$  cujo o suporte  $\text{supp}(f)$  é um conjunto compacto.

EXEMPLO 100. Um exemplo de função em  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  é dado por  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definido da forma abaixo:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{R^2 - |x|^2}}, & |x| < R \\ 0, & |x| \geq R \end{cases}.$$

Neste caso,  $\text{supp}(f) = \overline{B(0, R)}$ .

Podemos ver facilmente que  $C_c^k(U)$  é um espaço vetorial. Além disso, uma função  $f \in C_c^k(U)$  sempre pode ser estendida a uma função  $\tilde{f} \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$  da seguinte forma:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in U \\ 0, & x \notin U \end{cases}.$$

Neste caso, é fácil verificar que  $\text{supp}(f) = \text{supp}(\tilde{f})$ . Além disso,  $\tilde{f}$  é uma função  $C^k$ , já que  $K^c \cup U = \mathbb{R}^n$ ,  $f|_{K^c} = 0$  é  $C^k$ ,  $f|_U$  é  $C^k$  e  $K^c$  e  $U$  são abertos. (Lembramos que a propriedade de uma função ser  $C^k$  é uma propriedade local: basta verificar em abertos cuja união é igual a todo o conjunto onde a função está definida).

No conjunto  $C_c^\infty(U)$ , podemos definir a seguinte noção de convergência:

DEFINIÇÃO 101. Seja  $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$  uma sequência em  $C_c^\infty(U)$  e  $\phi \in C_c^\infty(U)$ . Dizemos que  $\lim_{j \rightarrow \infty} \phi_j = \phi$  em  $C_c^\infty(U)$  se

- 1)  $\exists K \subset U$  compacto tal que  $\text{supp} \phi_j \subset K$ , para todo  $j \in \mathbb{N}_0$  e  $\text{supp} \phi \subset K$ .
- 2)  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\partial^\alpha(\phi_j - \phi)\|_{L^\infty(U)} = 0$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ .

Lembramos que se  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, então  $\|g\|_{L^\infty(U)} := \sup_{x \in U} |g(x)|$ . Assim, a propriedade 2) nos diz que as derivadas de  $\phi_j$  convergem uniformemente para as derivadas de  $\phi$ .

Com isto, podemos finalmente definir o que são distribuições num aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ .

DEFINIÇÃO 102. Uma distribuição  $u \in \mathcal{D}'(U)$  é um funcional linear contínuo em  $C_c^\infty(U)$ , ou seja, uma distribuição é uma função  $u : C_c^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

- 1)  $u$  é linear: Para todo  $\phi$  e  $\psi$  em  $C_c^\infty(U)$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , temos

$$u(\phi + \psi) = u(\phi) + u(\psi) \text{ e } u(\alpha\phi) = \alpha u(\phi).$$

- 2)  $u$  é contínuo: Se  $\lim_{j \rightarrow \infty} \phi_j = \phi$  em  $C_c^\infty(U)$ , então

$$\lim_{j \rightarrow \infty} u(\phi_j) = u(\phi).$$

OBSERVAÇÃO 103. As distribuições são usualmente definidas como funcionais contínuos sobre os complexos, isto é,  $u : C_c^\infty(U) \rightarrow \mathbb{C}$ , em que  $C_c^\infty(U)$  são consideradas como funções com valores complexos. Em muitas situações, os números complexos ajudam muito. Veremos um exemplo disso ao estudar a transformada de Fourier. Aqui optamos por trabalhar apenas nos reais. No entanto, observamos que toda a teoria desenvolvida aqui se estende para funções e distribuições com valores complexos de maneira trivial.

É interessante observar que as distribuições generalizam de certa forma as funções. Vamos ver como isto ocorre na proposição seguinte:

PROPOSIÇÃO 104. *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f \in C(U)$ . Logo podemos definir  $T_f : C_c^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$  da seguinte forma*

$$T_f(\phi) = \int_U f(x)\phi(x)dx.$$

*O funcional linear  $T_f$  é uma distribuição. Além disso, a aplicação dada por  $f \in C(U) \mapsto T_f \in \mathcal{D}'(U)$  é injetora. Assim, toda função contínua é associada a uma, e somente uma, distribuição. Com esta identificação, podemos considerar o conjunto  $C(U)$  como um subconjunto de  $\mathcal{D}'(U)$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Vamos inicialmente provar que  $T_f$  é uma distribuição. De fato, temos que  $T_f$  está bem definida, já que

$$T_f(\phi) = \int_U f(x)\phi(x)dx = \int_{\text{supp}\phi} f(x)\phi(x)dx$$

e a integral acima existe, pois é uma integral de uma função contínua sobre um compacto (Aqui vemos a importância de  $\phi$  ter suporte compacto!).

A função  $T_f$  é linear, ou seja,

$$T_f(\phi + \psi) = T_f(\phi) + T_f(\psi) \text{ e } T_f(\alpha\phi) = \alpha T_f(\phi),$$

para todas as função  $\phi$  e  $\psi$  em  $C_c^\infty(U)$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . (É fácil! Segue diretamente da linearidade da integral. Verifique).

A função  $T_f$  é contínua. De fato, seja  $(\phi_j)$  uma sequência em  $C_c^\infty(U)$  que converge para  $\phi \in C_c^\infty(U)$ . Logo existe um compacto  $K \subset U$  tal que  $\text{supp}\phi_j \subset K$ , para todo  $j \in \mathbb{N}_0$ , e  $\text{supp}\phi \subset K$ . Além disso,  $\phi_j$  converge uniformemente para  $\phi$  (assim como todas as suas derivadas). Portanto

$$\begin{aligned} |T_f(\phi) - T_f(\phi_j)| &= |T_f(\phi - \phi_j)| = \left| \int_U f(x)(\phi_j(x) - \phi(x)) dx \right| \\ &\leq \int_K |f(x)| |\phi_j(x) - \phi(x)| dx \stackrel{(1)}{\leq} \left( \sup_{x \in K} |\phi_j(x) - \phi(x)| \right) \int_K |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Em (1), assim como em muitas outras passagens, estamos usando que se  $f$  e  $g$  forem contínuas e maiores ou iguais a 0 em um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$ , então sempre vale

$$\int_A f(x)g(x)dx \leq \left( \sup_{x \in A} f(x) \right) \int_A g(x)dx.$$

A última expressão vai a zero. De fato, pela definição de convergência em  $C_c^\infty(U)$ , a sequência de funções  $(\phi_j)$  converge uniformemente para  $\phi$  sobre o compacto  $K$ . Logo  $\lim_{j \rightarrow \infty} (\sup_{x \in K} |\phi_j(x) - \phi(x)|) = 0$ . Note que as derivadas de  $(\phi_j)$  também devem convergir uniformemente para as respectivas derivadas de  $\phi$ , de acordo com a nossa noção de convergência, mas aqui este fato não é necessário. Concluimos que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} T_f(\phi_j) = T_f(\phi).$$

Por fim, vamos mostrar que  $f \mapsto T_f$  é injetora. Suponha que  $T_f = T_g$ , em que  $f$  e  $g$  pertencem a  $C(U)$ . Logo

$$T_f(\phi) = T_g(\phi), \forall \phi \in C_c^\infty(U).$$

Assim

$$(3.2.1) \quad \int_U (f(x) - g(x)) \phi(x) dx = 0, \forall \phi \in C_c^\infty(U).$$

Se existe  $x_0 \in U$  tal que  $f(x_0) > g(x_0)$ , então existe uma bola  $\overline{B(x_0, \epsilon)} \subset U$  tal que  $f(x) - g(x) > 0$  para todo  $x \in \overline{B(x_0, \epsilon)}$ , pela continuidade das funções  $f$  e  $g$ . Seja  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\epsilon^2 - |x - x_0|^2}}, & |x - x_0| < \epsilon \\ 0, & |x - x_0| \geq \epsilon \end{cases}$$

Logo  $\phi \in C_c^\infty(U)$ . Como a função  $x \in B(x_0, \epsilon) \mapsto (f(x) - g(x)) \phi(x)$  é estritamente positiva e contínua, temos

$$\int_U (f(x) - g(x)) \phi(x) dx = \int_{B(x_0, \epsilon)} (f(x) - g(x)) \phi(x) dx > 0.$$

Isto é uma contradição com 3.2.1. Logo  $f(x_0) \leq g(x_0)$ . Porém se  $f(x_0) < g(x_0)$ , o mesmo argumento acima também nos leva a um absurdo. Concluimos desta forma que  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in U$ .  $\square$

**OBSERVAÇÃO 105.** A proposição acima pode ser generalizada para funções localmente integráveis. Lembramos que  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é localmente integrável se, e somente se,  $f$  é mensurável<sup>1</sup> e tal que

$$\int_K |f(x)| dx < \infty,$$

para todo conjunto compacto  $K \subset U$ . O conjunto dessas funções é usualmente denotado por  $L_{\text{loc}}^1(U)$  (após a identificação por funções iguais em quase todo o ponto, para quem já estudou a teoria de Lebesgue).

Um exemplo é a distribuição associada a função característica de um conjunto  $V \subset U$ . Seja  $\chi_V : U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\chi_V(x) = 1$ , se  $x \in V$ , e igual a 0, se  $x \in U \setminus V$ . Assim podemos associar a distribuição  $T_{\chi_V} : C_c^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$T_{\chi_V}(\phi) = \int_U \chi_V(x) \phi(x) dx = \int_V \phi(x) dx.$$

Pode-se provar continuidade de maneira semelhante ao feito na Proposição 104.

Por fim, observamos que nem todas as distribuições são definidas através de uma função. Aqui finalmente poderemos definir de forma precisa o delta de Dirac.

**EXEMPLO 106.** O Delta de Dirac: A distribuição  $\delta_{x_0} : C_c^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$  definida abaixo é chamada de delta de Dirac centrada em  $x_0$ :

$$\delta_{x_0}(\phi) = \phi(x_0), \forall \phi \in C_c^\infty(U).$$

De fato, a função é linear (verifique!) e contínua, pois se uma sequência  $(\phi_j)$  de  $C_c^\infty(U)$  converge para uma função  $\phi \in C_c^\infty(U)$ , então a sequência converge uniformemente. Logo também converge pontualmente. Assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{x_0}(\phi_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_j(x_0) = \phi(x_0) = \delta_{x_0}(\phi).$$

**EXEMPLO 107.** O Delta numa superfície: Seja  $S \subset U$  uma superfície de classe  $C^1$  (por exemplo, se  $n = 3$ , então  $S$  pode ser uma superfície de duas dimensões ou uma curva de uma dimensão). Definimos

$$\delta_S(\phi) = \int_S \phi dS.$$

<sup>1</sup>Caso nunca tenha estudado integração de Lebesgue, pense em termos de funções Riemann integráveis

A função acima é linear (verifique!) e contínua. De fato, se uma sequência  $(\phi_j)$  de  $C_c^\infty(U)$  converge para uma função  $\phi \in C_c^\infty(U)$ , então a sequência converge uniformemente e todas elas têm suporte sobre um mesmo compacto  $K \subset U$ . Assim

$$|\delta_S(\phi_j) - \delta_S(\phi)| \leq \int_{S \cap K} |\phi_j - \phi| dS \rightarrow 0.$$

Exemplos desta distribuições são funções do tipo  $\delta_{\mathbb{S}^2} : C_c^\infty(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\delta_{]0,1[ \times \{0\} \times \{0\}} : C_c^\infty(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$\delta_{\mathbb{S}^2}(\phi) = \int_{\mathbb{S}^2} \phi(x) dS(x) \text{ e } \delta_{]0,1[ \times \{0\} \times \{0\}}(\phi) = \int_0^1 \phi(x, 0, 0) dx.$$

O interessante é que, ao contrário das funções, podemos definir a noção de derivadas de qualquer ordem para uma distribuição. Assim, uma função contínua pode não ter derivadas “clássicas” (no sentido usual), mas sempre terá derivadas no sentido de distribuições. Esse fato é bastante útil no estudo de Equações Diferenciais Parciais.

### 3.2.1. Derivadas de distribuições (Aula do dia 18 de setembro).

DEFINIÇÃO 108. Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  e  $u \in \mathcal{D}'(U)$ . Definimos a distribuição  $\partial^\alpha u \in \mathcal{D}'(U)$ , chamada de derivada da distribuição  $u$  de ordem  $\alpha$ , da seguinte forma:

$$\partial^\alpha u(\phi) = (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \phi),$$

em que usamos a notação  $\partial^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$ .

A consistência da definição precisa ser verificada, ou seja, precisamos verificar que se  $u$  é uma distribuição, então  $\partial^\alpha u$  também é. A linearidade segue fácil, já que tanto  $u : C_c^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$  quanto  $\partial^\alpha : C_c^\infty(U) \rightarrow C_c^\infty(U)$  são lineares e a composição de funções lineares também é linear. Para verificar continuidade, observamos que se  $(\phi_j)$  converge para  $\phi$  em  $C_c^\infty(U)$ , então  $(\partial^\alpha \phi_j)$  converge para  $\partial^\alpha \phi$  em  $C_c^\infty(U)$ . De fato, os suportes de  $\partial^\alpha \phi_j$  e  $\partial^\alpha \phi$  estão contidos nos suportes de  $\phi_j$  e  $\phi$  para todo  $j$ . Além disso, a convergência uniforme das derivadas de  $\phi$  implica a convergência uniforme de  $\partial^\alpha \phi$  e de suas derivadas.

EXEMPLO 109. Seja  $\delta_0 : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  o delta de Dirac. Logo temos

$$\partial^\alpha \delta_{x_0}(\phi) = (-1)^{|\alpha|} \delta_{x_0}(\partial^\alpha \phi) = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \phi(x_0).$$

EXEMPLO 110. Seja  $f \in C^1(]0, 1[)$  e  $\phi \in C_c^\infty(]0, 1[)$ . Assim, existe  $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$  tal que  $\phi(x) = 0$  se  $x \leq \epsilon$  ou  $x \geq 1 - \epsilon$ . Portanto, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} T_f(\phi) &= -T_f\left(\frac{d\phi}{dx}\right) = -\int_0^1 f(x) \frac{d\phi}{dx}(x) dx = -\int_\epsilon^{1-\epsilon} f(x) \frac{d\phi}{dx}(x) dx \\ &= -f(x)\phi(x)|_\epsilon^{1-\epsilon} + \int_\epsilon^{1-\epsilon} \frac{df}{dx}(x)\phi(x) dx \\ &= -f(1-\epsilon)\phi(1-\epsilon) + f(\epsilon)\phi(\epsilon) + \int_\epsilon^{1-\epsilon} \frac{df}{dx}(x)\phi(x) dx \\ &= \int_0^1 \frac{df}{dx}(x)\phi(x) dx = T_{\frac{df}{dx}}(\phi). \end{aligned}$$

Concluimos que a derivada de  $T_f$  é a distribuição associada a  $\frac{df}{dx}$ . Neste sentido, a derivada de distribuições e funções coincide, quando a função tiver derivadas. Note como o sinal “-” foi importante na definição de derivada de distribuição. Ele aparece para cancelar o sinal da derivação por partes.

EXEMPLO 111. Definimos a função  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Essa é a chamada função de Heaviside. Neste caso, temos  $\frac{d}{dx}T_H = \delta_0$ . Para provar isso, consideremos  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ . Logo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}T_H(\phi) &= T_H\left(-\frac{d\phi}{dx}\right) = -\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\frac{d\phi}{dx}(x)dx = -\int_0^{\infty} \frac{d\phi}{dx}(x)dx \\ &= -\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{d\phi}{dx}(x)dx = -\lim_{R \rightarrow \infty} (\phi(R) - \phi(0)) = \phi(0) = \delta_0(\phi). \end{aligned}$$

EXEMPLO 112. Seja  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in ]0, 1[$ . Suponha que  $f : [0, x_0[ \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f : ]x_0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  sejam contínuas e os limites laterais  $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x)$  existam (note que o valor de  $f(x_0)$  pouco importa!). Logo a derivada de  $T_f$  no sentido de distribuições é igual a

$$T_{\chi_{[0, x_0[} \frac{df}{dx}} + T_{\chi_{]x_0, 1]} \frac{df}{dx}} + \left( \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right) \delta_{x_0},$$

em que  $\chi_I$  é a função característica do intervalo  $I$  (igual a 1 em  $I$  e a 0 em  $[0, 1] \setminus I$ ).

Vamos provar este resultado, consideremos  $\phi \in C_c^\infty(]0, 1[)$ . Logo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}T_f(\phi) &= -T_f\left(\frac{d\phi}{dx}\right) = -\int_0^1 f(x)\frac{d\phi}{dx}(x)dx = -\int_0^{x_0} f(x)\frac{d\phi}{dx}(x)dx - \int_{x_0}^1 f(x)\frac{d\phi}{dx}(x)dx \\ &= -f(x)\phi(x)|_0^{x_0} + \int_0^{x_0} \frac{df}{dx}(x)\phi(x)dx - f(x)\phi(x)|_{x_0}^1 + \int_{x_0}^1 \frac{df}{dx}(x)\phi(x)dx \\ &= -\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)\phi(x) + \int_0^{x_0} \frac{df}{dx}(x)\phi(x)dx + \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)\phi(x) + \int_{x_0}^1 \frac{df}{dx}(x)\phi(x)dx \\ &= -\phi(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) + \int_0^{x_0} \frac{df}{dx}(x)\phi(x)dx + \phi(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) + \int_{x_0}^1 \frac{df}{dx}(x)\phi(x)dx \\ &= \phi(x_0) \left( \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right) + \int_0^{x_0} \frac{df}{dx}(x)\phi(x)dx + \int_{x_0}^1 \frac{df}{dx}(x)\phi(x)dx \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right) \delta_{x_0}(\phi) + T_{\chi_{[0, x_0[} \frac{df}{dx}}(\phi) + T_{\chi_{]x_0, 1]} \frac{df}{dx}}(\phi). \end{aligned}$$

Nós vimos que quando a função é  $C^1$  num intervalo de  $\mathbb{R}$ , então a derivada clássica coincide com a derivada no sentido de distribuições. Vamos mostrar que isto ocorre em geral. Para tanto, vamos primeiro provar um lema simples.

LEMA 113. *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $K \subset U$  um compacto. Logo existe uma função  $\chi \in C_c^\infty(U)$  tal que  $\chi$  se anula numa vizinhança de  $K$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $r = d(K, U^c)$ . Como  $K \subset \mathbb{R}^n$  é um compacto,  $U^c$  é um fechado e  $K \cap U^c = \emptyset$ , concluímos que  $r > 0$ . Seja  $V = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, K) < \frac{r}{2}\}$ . Logo  $V \subset U$ , pela definição de  $r$ . De fato, se existisse  $y \in V \setminus U$ , então a distância de  $K$  e  $U^c$  seria menor do que  $\frac{r}{2}$ , o que é um absurdo.

Seja  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  definida por

$$\phi(x) = \begin{cases} ce^{\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases},$$

em que  $c > 0$  é dado por

$$c = \left( \int_{B(0,1)} e^{\frac{1}{1-|x|^2}} dx \right)^{-1},$$

ou seja,  $\int_{\mathbb{R}^n} \phi dx = 1$ . A função característica de  $V$  e a função  $\chi_V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\chi_V(x) = \begin{cases} 1, & x \in V \\ 0, & x \notin V \end{cases}.$$

Usando as funções  $\phi$  e  $\chi_V$  acima, definimos  $\chi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\chi(x) = \left(\frac{3}{r}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \chi_V(y) \phi\left(3\left(\frac{x-y}{r}\right)\right) dy = \left(\frac{3}{r}\right)^n \int_V \phi\left(3\left(\frac{x-y}{r}\right)\right) dy.$$

Logo  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . De fato, temos uma integral sobre um compacto e uma função  $C^\infty$  em  $x$ . Assim, podemos derivar simplesmente passando a derivada para dentro:

$$\partial_x^\alpha \chi(x) = \partial_x^\alpha \left[ \left(\frac{3}{r}\right)^n \int_V \phi\left(3\left(\frac{x-y}{r}\right)\right) dy \right] = \left(\frac{3}{r}\right)^{|\alpha|+n} \int_V (\partial_x^\alpha \phi)\left(3\left(\frac{x-y}{r}\right)\right) dy.$$

(Podemos provar a segunda igualdade acima usando diretamente a definição de derivada parcial e indução finita em  $|\alpha|$ ).

Observamos o suporte de  $y \mapsto \phi\left(3\left(\frac{x-y}{r}\right)\right)$  é igual a  $\overline{B(x, \frac{r}{3})}$ , já que  $\phi\left(3\left(\frac{x-y}{r}\right)\right) \neq 0$  se, e somente se,  $\left|3\left(\frac{x-y}{r}\right)\right| < 1$ , isto é,  $|x-y| < \frac{r}{3}$ .

Agora observamos que se  $d(x, K) < \frac{r}{6}$  e  $|y-x| < \frac{r}{3}$ , temos que

$$d(y, K) \leq d(y, x) + d(x, K) < \frac{r}{3} + \frac{r}{6} = \frac{r}{2}.$$

Assim, se  $d(x, K) < \frac{r}{6}$ , o suporte de  $y \mapsto \phi\left(3\left(\frac{x-y}{r}\right)\right)$  está contido em  $V$ . Portanto, a função  $y \mapsto \phi\left(3\left(\frac{x-y}{r}\right)\right)$  é igual a zero fora de  $V$ . Assim,

$$\chi(x) = \left(\frac{3}{r}\right)^n \int_V \phi\left(3\left(\frac{x-y}{r}\right)\right) dy = \left(\frac{3}{r}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \phi\left(3\left(\frac{x-y}{r}\right)\right) dy \stackrel{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(z) dz = 1,$$

em (1), fizemos  $z = 3\left(\frac{x-y}{r}\right)$  e  $dz = \left(\frac{3}{r}\right)^n dy$ . Concluimos, assim, que  $\chi$  é igual a um numa vizinhança aberto de  $K$  dada por  $\{x \in \mathbb{R}^n; d(x, K) < \frac{r}{6}\}$ .

Por outro lado, se  $d(x, K) > \frac{5r}{6}$  e  $|y-x| < \frac{r}{3}$ , temos que

$$d(y, K) > d(x, K) - d(x, y) > \frac{5r}{6} - \frac{r}{3} = \frac{r}{2}.$$

Assim, o suporte de  $y \mapsto \phi\left(3\left(\frac{x-y}{r}\right)\right)$  está contido em  $V^c$ , o complemento de  $V$ . Portanto, a função  $y \mapsto \phi\left(3\left(\frac{x-y}{r}\right)\right)$  é igual a zero fora de  $V^c$ . Assim,

$$\chi(x) = \left(\frac{3}{r}\right)^n \int_V \phi\left(3\left(\frac{x-y}{r}\right)\right) dy = \left(\frac{3}{r}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} 0 dy = 0.$$

Isto nos mostra que o suporte de  $\chi$  está contido em  $\{x \in \mathbb{R}^n; d(x, K) \leq \frac{5r}{6}\}$  que é compacto (é limitado e fechado) e contido em  $U$ , já que a distância dos pontos a  $K$  é menor do que  $r$ .  $\square$

**TEOREMA 114.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto,  $f \in C^m(U)$  e  $\phi \in C_c^\infty(U)$ . Logo*

$$\int_U f(x) \partial^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U \partial^\alpha f(x) \phi(x) dx,$$

para todo  $|\alpha| \leq m$ . Em particular,  $\partial^\alpha T_f = T_{\partial^\alpha f}$ .

**DEMONSTRAÇÃO.** Vamos provar apenas para  $|\alpha| = 1$ . O resultado geral segue por indução.

Seja  $K := \text{supp } \phi \subset U$  e  $\chi \in C_c^\infty(U)$  uma função tal que  $\chi(x) = 1$  num aberto que contém  $K$ . Assim

$$\int_U f(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) dx = \int_U \chi(x) f(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) dx.$$

Como  $\phi$  e  $\chi f$  têm suporte compacto, podemos estender essas funções a zero a funções definidas em todo  $\mathbb{R}^n$ . Continuaremos denotando esta extensão por  $\phi$  e  $\chi f$ . Seja  $B(0, R)$  com  $R$  grande tal que

$U \subset B(0, R)$ . Logo

$$\begin{aligned}
& \int_U \chi(x) f(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) dx = \int_{B(0, R)} \chi(x) f(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) dx \\
& \stackrel{(1)}{=} - \int_{B(0, R)} \frac{\partial}{\partial x_j} (\chi(x) f(x)) \phi(x) dx + \int_{\partial B(0, R)} \chi(x) f(x) \phi(x) \nu_j(x) dS(x) \\
& \stackrel{(2)}{=} - \int_{B(0, R)} \frac{\partial \chi}{\partial x_j}(x) f(x) \phi(x) dx - \int_{B(0, R)} \chi(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \phi(x) dx \\
& \stackrel{(3)}{=} - \int_{B(0, R)} \chi(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \phi(x) dx \stackrel{(4)}{=} - \int_{B(0, R)} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \phi(x) dx \\
& \stackrel{(5)}{=} - \int_U \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \phi(x) dx.
\end{aligned}$$

Em (1), usamos integração por partes: Equação (2.5.6). Em (2) usamos que  $\chi$  se anula em  $\partial B(0, R)$ , já que seu suporte está em  $U \subset B(0, R)$ . Em (3), usamos que  $\chi$  é igual a 1 num aberto que contém o suporte de  $\phi$ , logo  $\frac{\partial \chi}{\partial x_j}$  é igual a 0 neste mesmo aberto. Em (4) usamos novamente que  $\chi$  é igual a 1 no suporte de  $\phi$ . Por fim, em (6) usamos que  $\phi$  se anula fora de  $U$ .

Assim, vemos que uma derivada passa para o outro lado com um sinal. Logo

$$\frac{\partial}{\partial x_j} T_f(\phi) = -T_f \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) = - \int_U f(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) dx = \int_U \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \phi(x) dx = T_{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\phi).$$

O caso geral segue facilmente por indução.  $\square$

**PROPOSIÇÃO 115.** (*Teorema de Schwarz para distribuições*) Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $u \in \mathcal{D}'(U)$ . Logo a ordem das derivações produzem a mesma distribuição, isto é, para qualquer  $k$  e  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ , temos

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_{\sigma(1)}} \dots \partial x_{i_{\sigma(k)}}},$$

em que  $\sigma : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$  é uma permutação qualquer (uma função bijetora).

**DEMONSTRAÇÃO.** A demonstração segue do Teorema de Schwarz para funções  $C^\infty$ . Vamos mostrar para duas derivadas. O caso geral segue por indução.

Seja  $\varphi \in C_c^\infty(U)$ . Logo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\varphi) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}(\varphi) = - \frac{\partial u}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \\
&= u \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} \right) = u \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right) \\
&= - \frac{\partial u}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(\varphi).
\end{aligned}$$

$\square$

**3.2.2. Multiplicação de funções  $C^\infty$  e distribuições.** Podemos em diversas situações multiplicar distribuições por funções. Em particular, dado  $g$  uma função  $C^\infty$  e  $u$  uma distribuição, é sempre possível definir a distribuição  $gu$ .

**DEFINIÇÃO 116.** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto,  $u \in \mathcal{D}'(U)$  e  $g \in C^\infty(U)$ . Então definimos a distribuição  $gu \in \mathcal{D}'(U)$  da seguinte maneira:

$$gu(\varphi) = u(g\varphi).$$

**PROPOSIÇÃO 117.** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto,  $u \in \mathcal{D}'(U)$  e  $g \in C^\infty(U)$ . Então a distribuição acima está bem definida.

DEMONSTRAÇÃO. Para mostrar que  $gu$  está bem definida, observamos primeiramente que se  $\varphi \in C_c^\infty(U)$ , então  $g\varphi \in C_c^\infty(U)$ . Logo  $u(g\varphi)$  faz sentido.

Agora observamos que  $gu$  é linear. De fato, temos

$$\begin{aligned} gu(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) &= u(g(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2)) = u(\alpha g\varphi_1 + \beta g\varphi_2) \\ &= \alpha u(g\varphi_1) + \beta u(g\varphi_2) = \alpha gu(\varphi_1) + \beta gu(\varphi_2). \end{aligned}$$

Por fim, vamos provar que  $gu$  é contínua. De fato, se  $(\varphi_j)$  é uma sequência em  $C_c^\infty(U)$  que converge para  $\varphi$  em  $C_c^\infty(U)$ , então, pela regra de Leibniz, temos

$$\begin{aligned} \partial^\alpha(g\varphi_j) - \partial^\alpha(g\varphi) &= \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta g \partial^{\alpha-\beta} \varphi_j - \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta g \partial^{\alpha-\beta} \varphi \\ &= \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta g (\partial^{\alpha-\beta} \varphi_j - \partial^{\alpha-\beta} \varphi). \end{aligned}$$

Logo se  $K \subset U$  for um compacto que contém o suporte de todas as funções  $\varphi_j$  e  $\varphi$ , temos que

$$\|\partial^\alpha(g\varphi_j) - \partial^\alpha(g\varphi)\|_{L^\infty(U)} \leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|\partial^\beta g\|_{L^\infty(K)} \|\partial^{\alpha-\beta} \varphi_j - \partial^{\alpha-\beta} \varphi\|_{L^\infty(U)}.$$

Como

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\partial^{\alpha-\beta} \varphi_j - \partial^{\alpha-\beta} \varphi\|_{L^\infty(U)} = 0,$$

concluimos que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\partial^\alpha(g\varphi_j) - \partial^\alpha(g\varphi)\|_{L^\infty(U)} = 0.$$

Assim, a sequência  $(g\varphi_j)$  converge para  $g\varphi$  em  $C_c^\infty(U)$ . Desta maneira,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} gu(\varphi_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} u(g\varphi_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} u(g\varphi) = gu(\varphi).$$

□

Vamos ver alguns exemplos usando o delta de Dirac:

EXEMPLO 118. Seja  $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Logo  $x\delta_0 = 0$ . De fato, se  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , então

$$x\delta_0(\varphi) = \delta_0(x\varphi) = 0\varphi(0).$$

EXEMPLO 119. Seja  $\delta'_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Logo  $x\delta'_0 = \delta_0$ . De fato, se  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , então

$$\begin{aligned} x\delta'_0(\varphi) &= \delta'_0(x\varphi) = \left. \frac{d}{dx} (x\varphi(x)) \right|_{x=0} = \varphi(x) + x\varphi'(x)|_{x=0} \\ &= \varphi(0) + 0\varphi'(0) = \varphi(0) = \delta_0(\varphi). \end{aligned}$$

Por fim, é interessante saber como a multiplicação funciona com distribuições definidas por funções.

PROPOSIÇÃO 120. *Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua, então  $gT_f = T_{gf}$ .*

A proposição acima pode ser interpretada da seguinte forma: Ela diz que se a distribuição for associada com a função  $f$ , então a multiplicação por uma função  $g$  de classe  $C^\infty$  coincide com a multiplicação usual de funções. De fato, a distribuição resultante é exatamente aquela que corresponde a multiplicação entre as funções.

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $\varphi \in C_c^\infty(U)$ . Logo

$$gT_f(\varphi) = T_f(g\varphi) = \int f(x)g(x)\varphi(x)dx = T_{gf}(\varphi).$$

Assim,  $gT_f = T_{gf}$ . □

OBSERVAÇÃO 121. O fato de que  $\partial^\alpha T_f = T_{\partial^\alpha f}$  e  $gT_f = T_{gf}$  não é uma coincidência. A multiplicação e a derivação foram definidas da forma que essas relações valham.

**3.2.3. Convergência de Distribuições.** Por fim, vamos definir convergência de distribuições, que será útil também mais para frente.

DEFINIÇÃO 122. Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $(u_j)$  uma sequência de distribuições em  $\mathcal{D}'(U)$  e  $u \in \mathcal{D}'(U)$ . Dizemos que  $\lim_{j \rightarrow \infty} u_j = u$  em  $\mathcal{D}'(U)$  se para todo  $\phi \in C_c^\infty(U)$ , o seguinte limite é válido:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} u_j(\phi) = u(\phi).$$

EXEMPLO 123. Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  e  $(f_j)$  uma sequência de funções contínuas em  $U$ . Se esta sequência converge para uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uniformemente sobre compactos, então  $T_{f_j}$  converge para  $T_f$  no sentido de distribuições.

De fato, se  $\phi \in C_c^\infty(U)$ , então  $K := \text{supp}\phi$  é um compacto e  $K \subset U$ . Assim

$$\begin{aligned} T_{f_j}(\phi) &= \int_U f_j(x)\phi(x)dx = \int_U (f_j(x) - f(x))\phi(x)dx + \int_U f(x)\phi(x)dx \\ &= \int_K (f_j(x) - f(x))\phi(x)dx + \int_U f(x)\phi(x)dx. \end{aligned}$$

Agora basta observar que

$$\int_K |(f_j(x) - f(x))\phi(x)| dx \leq \|f_j - f\|_{L^\infty(K)} \int_K |\phi(x)| dx \rightarrow 0.$$

Assim,  $\lim_{j \rightarrow \infty} T_{f_j}(\phi) = T_f(\phi)$ .

EXEMPLO 124. Seja  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Consideremos a sequência  $f_j = \frac{1}{|B(x_0, \frac{1}{j})|} \chi_{B(x_0, \frac{1}{j})}$ , em que  $\chi$  indica a função característica. Logo  $T_{f_j}$  converge para  $\delta_{x_0}$ . (Note que  $T_{f_j}(\phi) = \int_{B(x_0, \frac{1}{j})} \phi(x)dx$  é a média nas bolas).

De fato, se  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , então

$$\begin{aligned} T_{f_j}(\phi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|B(x_0, \frac{1}{j})|} \chi_{B(x_0, \frac{1}{j})}(x)\phi(x)dx = \frac{1}{|B(x_0, \frac{1}{j})|} \int_{B(x_0, \frac{1}{j})} \phi(x)dx \\ &= \frac{1}{|B(x_0, \frac{1}{j})|} \int_{B(x_0, \frac{1}{j})} (\phi(x) - \phi(x_0)) dx + \phi(x_0) \frac{1}{|B(x_0, \frac{1}{j})|} \int_{B(x_0, \frac{1}{j})} dx \\ &= \frac{1}{|B(x_0, \frac{1}{j})|} \int_{B(x_0, \frac{1}{j})} (\phi(x) - \phi(x_0)) dx + \phi(x_0). \end{aligned}$$

Basta agora observar que

$$\frac{1}{|B(x_0, \frac{1}{j})|} \left| \int_{B(x_0, \frac{1}{j})} (\phi(x) - \phi(x_0)) dx \right| \leq \|\phi - \phi(x_0)\|_{L^\infty(B(x_0, \frac{1}{j}))} \rightarrow 0, j \rightarrow \infty,$$

em que usamos a continuidade de  $\phi$ .

Assim,  $\lim_{j \rightarrow \infty} T_{f_j}(\phi) = \delta_{x_0}(\phi)$ .

EXEMPLO 125. Seja  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Consideremos a sequência de distribuições  $T_j(\phi) = \int_{\partial B(x_0, \frac{1}{j})} \phi(x) dS(x)$ . Logo  $T_j$  converge para  $\delta_{x_0}$ .

A demonstração é idêntica a do exemplo anterior. Vamos fazer só para deixar completo. Seja  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , então

$$\begin{aligned} T_{f_j}(\phi) &= \frac{1}{\left| \partial B(x_0, \frac{1}{j}) \right|} \int_{\partial B(x_0, \frac{1}{j})} \phi(x) dS(x) \\ &= \frac{1}{\left| \partial B(x_0, \frac{1}{j}) \right|} \int_{\partial B(x_0, \frac{1}{j})} (\phi(x) - \phi(x_0)) dS(x) + \phi(x_0) \frac{1}{\left| \partial B(x_0, \frac{1}{j}) \right|} \int_{\partial B(x_0, \frac{1}{j})} dS(x) \\ &= \frac{1}{\left| \partial B(x_0, \frac{1}{j}) \right|} \int_{\partial B(x_0, \frac{1}{j})} (\phi(x) - \phi(x_0)) dS(x) + \phi(x_0). \end{aligned}$$

Basta agora ver que

$$\frac{1}{\left| \partial B(x_0, \frac{1}{j}) \right|} \left| \int_{\partial B(x_0, \frac{1}{j})} (\phi(x) - \phi(x_0)) dS(x) \right| \leq \|\phi - \phi(x_0)\|_{L^\infty(\partial B(x_0, \frac{1}{j}))} \rightarrow 0, j \rightarrow \infty,$$

em que usamos novamente a continuidade de  $\phi$ .

Assim,  $\lim_{j \rightarrow \infty} T_{f_j}(\phi) = \delta_{x_0}(\phi)$ .

**OBSERVAÇÃO 126.** A notação  $T_f$  para denotar a distribuição associada a função  $f$  não é usada em geral. Como a associação entre funções (contínuas ou localmente integráveis) é injetora, então usamos a notação  $f$  para indicar tanto a função como a distribuição associada.

### Referências:

Grubb

Strauss

### 3.2.4. Exercícios.

**EXERCÍCIO 127.** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $(u_j)$  uma sequência de distribuições em  $\mathcal{D}'(U)$  e  $u \in \mathcal{D}'(U)$ . Suponha que  $\lim_{j \rightarrow \infty} u_j = u$  em  $\mathcal{D}'(U)$ .

i) Mostre que  $\lim_{j \rightarrow \infty} \partial^\alpha u_j = \partial^\alpha u$  para todo  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ .

ii) Mostre que se  $g \in C^\infty(U)$ , então  $\lim_{j \rightarrow \infty} g u_j = g u$ .

**EXERCÍCIO 128.** (Grubb) Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$ . Definimos  $\chi_U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\chi_U(x) = 1$ , se  $x \in U$ , e  $\chi_U(x) = 0$ , se  $x \notin U$ . Seja  $T_{\chi_U} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  a distribuição dada por

$$T_{\chi_U}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_U(x) \varphi(x) dx = \int_U \varphi(x) dx.$$

Mostre que

$$-\Delta T_{\chi_U}(\varphi) = \int_{\partial U} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dS(x).$$

**EXEMPLO 129.** (Grubb) Seja  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Mostre que se  $\delta_0(\varphi) = 0$ , então  $\varphi \delta_0 = 0$  como distribuição em  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

**EXEMPLO 130.** (Grubb) Seja  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ .

a) Mostre que existem constantes  $c_0$  e  $c_1$  tais que a identidade vale

$$f \delta'_0 = c_0 \delta_0 + c_1 \delta'_0.$$

b) Para  $k \in \mathbb{N}_0$ , mostre que existem constantes  $c_{k,j} \in \mathbb{R}$  tais que

$$f \frac{d^k}{dx^k} \delta_0 = \sum_{j=0}^k c_{k,j} \frac{d^j}{dx^j} \delta_0.$$

**EXERCÍCIO 131.** Seja  $f \in C(\mathbb{R})$ . Definimos  $f_t \in C(\mathbb{R})$  por  $f_t(x) = f(t+x)$ . Mostre que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_{f_t} - T_f}{t} = \frac{d}{dt} T_f$  em  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . (Aqui,  $T_g$  é a distribuição  $T_g(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \varphi(x) dx$ ).

EXERCÍCIO 132. Para cada  $a \in \mathbb{R}$ , definimos a função delta de Dirac  $\delta_a : C_c^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  centrada em  $a$  por  $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$ . Mostre que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\delta_t - \delta_0}{t} = \delta'_0$ .

EXERCÍCIO 133. (VASY CAP. 5.5) Mostre que a única solução de  $\frac{du}{dx} = 0$  é uma constante, quando  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

( $u' = 0$  significa que  $u(\phi') = 0$  para todo  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ . Estamos pedindo para mostrar que nesse caso existe uma constante  $c \in \mathbb{C}$  tal que  $u(\phi) = T_c(\phi) = c \int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx$ , para todo  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ . Para tanto, mostre que  $\phi = \psi'$ , com  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  se, e somente se,  $\int \phi dx = 0$ . Considere  $\phi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  tal que  $\int \phi_0 dx = 1$ . Escreva  $\phi(x) = (\phi(x) - \phi_0(x) \int \phi dx) + \phi_0(x) \int \phi dx$  e tente concluir o resultado dessa expressão.)

EXERCÍCIO 134. (VASY CAP. 5.9) Seja  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 1+x, & -1 < x < 0 \\ 1-x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}.$$

Assim,  $\psi \geq 0$ ,  $\int \psi dx = 1$  e  $\psi(x) = 0$  se  $|x| \geq 1$ . Considere  $\psi_j(x) = j\psi(jx)$ , para  $j \in \mathbb{N}$ .

a) Mostre que  $\lim_{j \rightarrow \infty} \psi_j = \delta$  em  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

b) Seja  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  tal que  $\phi(x) = 1$  se  $|x| \leq 1$ . Mostre que  $\int \psi_j^2 \phi dx$  não converge. Conclua que  $\psi_j^2$  não converge para nenhuma distribuição.

c) Conclua que não existe uma extensão contínua da função  $Q : C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$  dada por  $Q(f) = f^2$  para  $Q : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , no sentido que leva sequências de distribuições convergentes em distribuições convergentes. Assim, não podemos multiplicar distribuições em geral.

## Equação de Poisson

### 4.1. Definição geral de solução fundamental e a equação de Poisson em $\mathbb{R}^n$

Com o que desenvolvemos sobre teoria das distribuições anteriormente, vamos agora dar a definição geral de solução fundamental.

DEFINIÇÃO 135. Um **operador diferencial com coeficientes constantes**  $P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ ,  $a_\alpha \in \mathbb{R}$  para  $|\alpha| \leq m$ , é uma transformação linear  $P(\partial) : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  definida por

$$P(\partial)u = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha},$$

em que a derivada é entendida no sentido de distribuições. Uma distribuição  $u$  é chamada de **solução fundamental** do operador  $P(\partial)$  se satisfizer  $P(\partial)u = \delta_0$ .

Usando a nossa definição de derivação de distribuições, uma solução fundamental  $u$  do operador  $P(\partial)$  será tal que para todo  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , a seguinte relação é válida:

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}(\phi) = \delta_0(\phi) \iff \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha u \left( \frac{\partial^\alpha \phi}{\partial x^\alpha} \right) = \phi(0).$$

Em particular, se  $u = T_g$ , em que  $g$  é uma função contínua ou localmente integrável, então  $u$  será uma solução fundamental se, e somente se,

$$\sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \frac{\partial^\alpha \phi}{\partial x^\alpha}(x) dx = \phi(0), \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

No caso do Laplaciano, por exemplo, uma função localmente integrável  $g$  é uma solução fundamental do operador  $-\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_i^2$  se, e somente se,

$$-\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2}(x) dx = \phi(0) \iff -\int_{\mathbb{R}^n} g(x) \Delta \phi(x) dx = \phi(0),$$

para toda a função  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Aqui claro que estamos identificando  $g$  com a distribuição  $T_g$ . Vamos mostrar a seguir que, com essa definição, a solução fundamental canônica do Laplaciano é, de fato, uma solução fundamental no sentido que acabamos de definir.

TEOREMA 136. *A função  $\Phi$  dada na Definição 76 é uma solução fundamental de menos o laplaciano  $-\Delta$ . Mais precisamente, se  $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ , então*

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) \Delta f(x) dx = f(0).$$

*Em particular, a igualdade acima vale para toda  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Assim, temos  $-\Delta \Phi = \delta_0$ , em que identificamos  $\Phi$  com a distribuição  $T_\Phi$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Vamos provar o caso para dimensões maiores ou iguais a 2. O caso  $n = 1$  deixaremos como exercício.

Começaremos dividindo a integral em duas:

$$\int \Phi(x)\Delta f(x)dx = \int_{B(0,\epsilon)} \Phi(y)\Delta f(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\epsilon)} \Phi(y)\Delta f(y)dy,$$

em que  $0 < \epsilon < 1$ .

Agora observamos que

$$\left| \int_{B(0,\epsilon)} \Phi(y)\Delta f(y)dy \right| \leq \|\Delta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0,\epsilon)} \Phi(y)dy \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0.$$

A última passagem pode ser justificada da seguinte maneira:

Se  $n \geq 3$ , então

$$\int_{B(0,\epsilon)} \Phi(y)dy \stackrel{(1)}{=} C \int_0^\epsilon \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} r^{2-n} r^{n-1} dS(y) \right) dr = C |\mathbb{S}^{n-1}| \frac{\epsilon^2}{2} \rightarrow 0, \text{ se } \epsilon \rightarrow 0$$

em que usamos o item 3 do Lema 37 em (1).

Se  $n = 2$ , então para  $\epsilon < \frac{1}{e}$ , temos

$$\int_{B(0,\epsilon)} \Phi(y)dy \stackrel{(1)}{=} C \int_0^\epsilon \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \ln(r) r dS(y) \right) dr \leq C |\mathbb{S}^{n-1}| \ln(\epsilon) \epsilon^2 \rightarrow 0, \text{ se } \epsilon \rightarrow 0$$

em que usamos o item 3 do Lema 37 em (1) e o fato de que  $r \ln(r) < \epsilon \ln(\epsilon)$ , já que  $r \mapsto r \ln(r)$  é uma função crescente para  $r < \frac{1}{e}$  e, portanto,

$$\int_0^\epsilon \ln(r) r dr < \ln(\epsilon) \epsilon \int_0^\epsilon dr = \ln(\epsilon) \epsilon^2.$$

Vamos então estudar o limite do último termo da Equação.

Sabemos que existe  $R > 1$  tal que  $\text{supp} f \subset B(0, R)$ , já que  $f$  tem suporte compacto. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\epsilon)} \Phi(y)\Delta f(y)dy &= \int_{B(0,R) \setminus B(0,\epsilon)} \Phi(y)\Delta f(y)dy \\ &\stackrel{(1)}{=} \int_{B(0,R) \setminus B(0,\epsilon)} (\Phi(y)\Delta f(y)dy - f(y)\Delta \Phi(y)) dy \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_{\partial(B(0,R) \setminus B(0,\epsilon))} \left( \Phi(x) \frac{\partial f}{\partial \nu}(x) - f(x) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(x) \right) dS(x) \\ &\stackrel{(3)}{=} \int_{\partial B(0,\epsilon)} \left( \Phi(x) \frac{\partial f}{\partial \nu}(x) - f(x) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(x) \right) dS(x) \end{aligned}$$

Em (1) usamos que  $\Delta \Phi(y) = 0$  para  $y \neq 0$ . Em (2) usamos a segunda identidade de Green. Em (3), usamos que  $\partial(B(0,R) \setminus B(0,\epsilon)) = \partial B(0,R) \cup \partial B(0,\epsilon)$  e que  $f$  se anula numa vizinhança de  $\partial B(0,R)$ . Logo  $f$  e  $\frac{\partial f}{\partial \nu}$  é igual a zero em  $\partial B(0,R)$ .

Note que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left| \int_{\partial B(0,\epsilon)} \Phi(x) \frac{\partial f}{\partial \nu}(x) dS(x) \right| = 0,$$

pois

$$\left| \int_{\partial B(0,\epsilon)} \Phi(x) \frac{\partial f}{\partial \nu}(x) dS(x) \right| \leq \|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\partial B(0,\epsilon)} \Phi(x) dS(x) \rightarrow 0, \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0^+,$$

já que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \nu}(x) \right| = |\nabla f(x) \cdot \nu(x)| \leq \|\nabla f(x)\| \|\nu(x)\| = \|\nabla f(x)\|$$

e, para  $n \geq 3$ , temos

$$\left| \int_{\partial B(0, \epsilon)} \Phi(x) dS(x) \right| \leq \frac{C}{\epsilon^{n-2}} |\partial B(0, \epsilon)| = \frac{C}{\epsilon^{n-2}} |\partial B(0, 1)| \epsilon^{n-1} = \epsilon \rightarrow 0, \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Para  $n = 2$ , temos

$$\left| \int_{\partial B(0, \epsilon)} \Phi(x) dS(x) \right| \leq C \ln \epsilon |\partial B(0, \epsilon)| = C |\partial B(0, 1)| \epsilon \ln \epsilon \rightarrow 0, \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Por fim,

$$\int_{\partial B(0, \epsilon)} f(x) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(x) dS(x) \stackrel{(1)}{=} \int_{\partial B(0, \epsilon)} f(x) dS(x) \rightarrow f(0).$$

Usamos em (1) a Equação 2.5.2 tomando atenção com o sinal, já que a normal  $\nu$  acima aponta para fora de  $B(0, R) \setminus B(0, \epsilon)$ , ou seja, para dentro de  $B(0, \epsilon)$ .  $\square$

O interessante da solução fundamental é que ela nos dá naturalmente uma forma de encontrar soluções do problema de Poisson em  $\mathbb{R}^n$ , conforme a proposição abaixo.

**TEOREMA 137.** *Seja  $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$  e considere o problema de Poisson*

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

*Logo uma solução deste problema é dada pela função*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy.$$

**DEMONSTRAÇÃO.** Basta observar que

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy \stackrel{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f(x-y) dy,$$

em que fizemos a mudança de variável  $\tilde{y} = x - y$  e depois chamamos  $\tilde{y}$  por  $y$ . Agora observamos que

$$\Delta u(x) = \Delta \left( \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f(x-y) dy \right) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \Delta f(x-y) dy \stackrel{(1)}{=} -f(x-0) = -f(x),$$

em (1) estamos usando o Teorema 136 para a função  $y \mapsto f(x-y)$ .

O que precisamos justificar é a passagem das derivadas para dentro da integral. Isto pode ser feito usando diretamente a definição de derivada.

Vamos mostrar aqui o caso de uma derivada. Seja  $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ , em que o 1 só aparece na  $i$ -ésima casa. Usaremos a fórmula:

$$f(a+h) - f(a) = \int_0^1 \frac{d}{d\theta} (f(a+\theta h)) d\theta = h \int_0^1 f'(a+\theta h) d\theta,$$

em que  $f \in C^1([a, a+h])$ . Aplicando essa fórmula, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f(x-y) dy \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h} dy \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+h\theta e_i-y) d\theta dy \right). \end{aligned}$$

Agora observamos que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+h\theta e_i-y) d\theta dy - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \int_0^1 \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+h\theta e_i-y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y) \right) d\theta dy. \end{aligned}$$

Como  $f$  tem suporte compacto e  $f$  é de classe  $C^2$ , então  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  é uniformemente contínuo. Logo, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $|h| < \delta$ , então

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + h\theta e_i - y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y) \right| < \epsilon.$$

Além disso, para  $x$  fixo,  $\theta \in [0, 1]$  e para todo  $h$  pequeno, a função

$$y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + h\theta e_i - y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y)$$

se anula fora de um compacto  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Assim, temos

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \int_0^1 \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + h\theta e_i - y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y) \right) d\theta dy \right| \\ &= \int_K \Phi(y) \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + h\theta e_i - y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y) \right| d\theta dy \cdot \\ &\leq \int_K \Phi(y) \int_0^1 \epsilon d\theta dy = \epsilon \int_K \Phi(y) dy. \end{aligned}$$

Como  $\epsilon$  é um número qualquer, concluímos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + h\theta e_i - y) d\theta dy \right) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y) dy.$$

Isto conclui a demonstração de que podemos passar a derivada para dentro da integral. Para passar duas derivadas, é só repetir o argumento.  $\square$

Expressões como a integral  $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y)f(y)dy$  aparecem inúmeras vezes no estudo de equações diferenciais: elas são chamadas de convolução. Faremos um estudo mais detalhado da convolução quando formos estudar a transformada de Fourier.

#### 4.1.1. Exercícios.

EXERCÍCIO 138. (FOLLAND 2.C.2) Sabemos que para  $n \geq 3$ , a função  $\Phi(x) = \frac{|x|^{2-n}}{(n-2)n|B(0,1)|}$  é a solução fundamental canônica de  $-\Delta$ . Note que para  $n = 1$ , temos  $\Phi(x) = -\frac{|x|}{2}$ . Esta é a chamada solução fundamental canônica em  $\mathbb{R}^1$ .

a) Mostre que  $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) \frac{d^2 f}{dx^2}(x) dx = -f(0)$ , para toda função  $f \in C_c^2(\mathbb{R})$ . (Interpretamos isso como  $-\frac{d^2}{dx^2}\Phi = \delta$ ).

b) Conclua que  $u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x - y)f(y)dy$  é a única solução limitada (módulo constantes) da equação  $-\frac{d^2 u}{dx^2}(x) = f(x)$ ,  $f \in C_c^2(\mathbb{R})$

#### Referências:

Evans  
Folland

## 4.2. Problema de Poisson em abertos de $U \subset \mathbb{R}^n$ (Aula do dia 23 de setembro)

Vimos anteriormente que podemos encontrar soluções da equação de Poisson em  $\mathbb{R}^n$  através de uma integral: a convolução (conceito que iremos estudar com calma mais para frente) da solução fundamental com a função  $-\Delta u$ , veja o Teorema 137.

Nesta seção, vamos procurar uma representação integral da solução do problema de Poisson em um aberto limitado. Aqui não vamos provar existência de soluções em um aberto  $U$  em geral. Apenas vamos mostrar que, caso a solução exista, ela pode ser escrita como uma determinada integral. Esta integral será usada, então, para provar existências de soluções em dois domínios simples: semiplanos e bolas.

Consideremos um aberto limitado  $U \subset \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ . Vamos estudar a equação de Poisson com condições de Dirichlet:

$$(4.2.1) \quad \begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x), & x \in U \\ u(x) &= g(x), & x \in \partial U \end{aligned} .$$

Nestas condições, vimos que toda função  $u \in C^2(\bar{U})$  pode ser escrita como

$$u(x) = \int_{\partial U} \left( \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) \right) dS(y) - \int_U \Phi(y-x) \Delta u(y) dy.$$

Assim, se  $u \in C^2(\bar{U})$  é uma solução da equação de Poisson 4.2.1,  $f \in C(\bar{U})$  e  $g \in C(\partial U)$ , então  $u$  pode ser escrita como

$$(4.2.2) \quad u(x) = \int_{\partial U} \left( \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - g(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) \right) dS(y) + \int_U \Phi(y-x) f(y) dy.$$

Note, no entanto, que a equação acima não é satisfatória. O lado direito depende de  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ , que não é um dado do problema com condições de Dirichlet. Vamos então procurar uma representação de  $u$  que não dependa de  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ . Para tanto, definiremos as funções de Green.

Suponha que, para cada  $x \in U$ , exista uma função  $\phi^x \in C^2(\bar{U})$  tal que

$$\begin{aligned} \Delta \phi^x(y) &= 0, & y \in U \\ \phi^x(y) &= \Phi(y-x), & y \in \partial U \end{aligned} .$$

Neste caso, podemos aplicar a segunda identidade de Green para as funções  $\phi^x$  e  $u$  e concluir que

$$\int_U (\phi^x(y) \Delta u(y) - u(y) \Delta \phi^x(y)) dy = \int_{\partial U} \left( \phi^x(y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial \phi^x}{\partial \nu}(y) \right) dS(y).$$

Como  $\Delta \phi^x = 0$ ,  $\phi^x(y) = \Phi(y-x)$ ,  $u|_{\partial U} = g$  e  $-\Delta u = f$ , concluímos que

$$\int_{\partial U} \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) dS(y) = - \int_U \phi^x(y) f(y) dy + \int_{\partial U} g(y) \frac{\partial \phi^x}{\partial \nu}(y) dS(y).$$

Assim, conseguimos eliminar o termo com  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  da Equação (4.2.2), obtendo, assim,

$$\begin{aligned} u(x) &= - \int_U \phi^x(y) f(y) dy + \int_{\partial U} g(y) \frac{\partial \phi^x}{\partial \nu}(y) dS(y) - \int_{\partial U} g(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) dS(y) + \int_U \Phi(y-x) f(y) dy \\ &= - \int_U (\phi^x(y) - \Phi(y-x)) f(y) dy + \int_{\partial U} \left( \frac{\partial \phi^x}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) \right) g(y) dS(y) \\ &= - \int_U (\phi^x(y) - \Phi(y-x)) f(y) dy + \int_{\partial U} \frac{\partial}{\partial \nu_y} (\phi^x(y) - \Phi(y-x)) g(y) dS(y). \end{aligned}$$

Finalmente, a expressão acima nos mostra uma representação integral para a função  $u$  em termos dos dados do problema: as funções  $g$  e  $f$ . A fórmula obtida nos motiva a definir a função de Green como faremos a seguir.

**DEFINIÇÃO 139.** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$ . Uma função de Green em  $U$  é uma função  $G : (U \times \bar{U}) \setminus D \rightarrow \mathbb{R}$ , em que  $D = \{(x, y) \in U \times U; x = y\}$ , dada por

$$G(x, y) = \Phi(y-x) - \phi^x(y), \quad (x, y) \in (U \times \bar{U}) \setminus D := \{(x, y) \in U \times \bar{U}; x \neq y\},$$

em que  $\phi^x \in C^2(\bar{U})$  é uma função tal que

$$\begin{aligned} \Delta \phi^x(y) &= 0, & y \in U \\ \phi^x(y) &= \Phi(y-x), & y \in \partial U \end{aligned} .$$

Note que não provamos a existência da função de Green. Para tanto, deveríamos mostrar a existência da função  $\phi^x \in C^2(\bar{U})$  para cada  $x \in U$ . Vamos mostrar isto apenas em casos muito particulares. Para quem se interessar, uma demonstração de que a função  $\phi^x$ , e, portanto, a função de Green existe, pode ser encontrada no Folland sobre a condição de que  $U \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto de classe  $C^\infty$ .

Vamos resumir a nossa discussão anterior no seguinte resultado, que provamos anteriormente nas nossas contas.

**TEOREMA 140.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$ . Suponha que exista uma função de Green  $G : (U \times \bar{U}) \setminus D \rightarrow \mathbb{R}$ . Logo se  $u \in C^2(\bar{U})$  for uma solução do problema*

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x), & x \in U \\ u(x) &= g(x), & x \in \partial U \end{aligned} ,$$

em que  $f \in C(\bar{U})$  e  $g \in C(\partial U)$ , então  $u$  é dado por

$$u(x) = \int_U G(x, y) f(y) dy - \int_{\partial U} \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y) g(y) dS(y).$$

Antes de estudar propriedades e exemplos, observamos a relação entre a definição da função de Green e a teoria das distribuições. Para cada  $x \in U$  fixo, a função  $y \in U \mapsto G(x, y)$  é localmente integrável. Logo podemos associar uma distribuição em  $\mathcal{D}'(U)$  a essa função e derivar em  $y$  no sentido de distribuições.

O que podemos verificar é que, para  $x \in U$  fixo,

$$(4.2.3) \quad \Delta_y G(x, y) = \Delta_y (\Phi(y - x) - \phi^x(y)) = \Delta_y \Phi(y - x) - \Delta_y \phi^x(y) = -\delta_x.$$

ou seja, para todo  $\phi \in C_c^\infty(U)$ , temos

$$-\Delta_y G(x, y)(\phi) = \delta_x(\phi) \iff -G(x, y)(\Delta_y \phi) = -\delta_x(\phi) \iff -\int_U G(x, y) \Delta \phi(y) dy = \phi(x).$$

Na Expressão 4.2.3 usamos que  $\Delta \phi^x(y) = 0$  para todo  $y \in U$ . A expressão  $\Delta_y \Phi(y - x)$  deve ser interpretada da seguinte forma: associamos à função  $y \in U \mapsto \Phi(y - x)$  a distribuição  $T_{\Phi(\cdot - x)}$  dada por

$$T_{\Phi(\cdot - x)}(\varphi) = \int_U \Phi(y - x) \varphi(y) dy \stackrel{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y - x) \varphi(y) dy, \quad \varphi \in C_c^\infty(U),$$

em que em (1) estamos apenas fazendo a extensão usual de  $\varphi$  para uma função em  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  dizendo que  $\varphi(y) = 0$  para  $y \in U^c$ .

Logo  $\Delta_y \Phi(y - x)$  é interpretado como a distribuição  $\Delta T_{\Phi(\cdot - x)}$  (o  $x$  está sempre fixo). Pela definição de derivação de distribuições, para cada  $\varphi \in C_c^\infty(U)$ , temos

$$\begin{aligned} \Delta T_{\Phi(\cdot - x)}(\varphi) &= T_{\Phi(\cdot - x)}(\Delta \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y - x) \Delta \varphi(y) dy \\ &\stackrel{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y) \Delta \varphi(y) dy \stackrel{(2)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \Delta \varphi(x - y) dy \\ &\stackrel{(3)}{=} -\varphi(x - 0) = -\varphi(x) = -\delta_x(\varphi). \end{aligned}$$

Em (1) usamos que  $\Phi(x) = \Phi(-x)$ , já que a solução fundamental depende apenas de  $|x|$ . Em (2) fizemos a mudança de coordenadas  $\tilde{y} = x - y$  e depois chamamos  $\tilde{y}$  de  $y$ . Em (3), usamos o Teorema 136 aplicado na função  $y \mapsto \Delta \varphi(x - y)$ . Isto termina a demonstração de 4.2.3.

Além dessa relação no sentido de distribuições, observamos que, para  $y \in \partial U$ , temos

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \phi^x(y) = \Phi(y - x) - \Phi(y - x) = 0.$$

Concluimos que, para cada  $x \in U$ , a função de Green deve satisfazer

$$\begin{aligned} -\Delta_y G(x, y) &= \delta_x, & \text{em } U \\ G(x, y) &= 0, & \text{para } y \in \partial U \end{aligned} .$$

Uma interpretação para a função de Green é que ela representa, a não ser por multiplicação por constantes físicas, o potencial elétrico gerado por uma carga no ponto  $x \in U$  e que se anula em  $\partial U$ . Isto é semelhante a interpretação dada à solução fundamental. A diferença é que agora a carga está confinada numa região limitada  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Por fim, antes de começarmos os exemplos, vamos provar a seguinte propriedade de simetria da função de Green.

**TEOREMA 141.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado em  $\mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  para o qual existe uma função de Green. Logo, para todo  $x, y \in U$ ,  $x \neq y$ , temos que  $G(x, y) = G(y, x)$ .*

**DEMONSTRAÇÃO.** Fixamos  $x, y \in U$  com  $x \neq y$ . Vamos definir  $v : U \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $w : U \setminus \{y\} \rightarrow \mathbb{R}$  da seguinte forma

$$v(z) = G(x, z) \text{ e } w(z) = G(y, z).$$

Assim, vemos que  $\Delta v = 0$  em  $U \setminus \{x\}$  e  $\Delta w = 0$  em  $U \setminus \{y\}$ . Além disso,  $v|_{\partial U} = w|_{\partial U} = 0$ .

Vamos definir  $V_\epsilon := U \setminus (B(x, \epsilon) \cup B(y, \epsilon))$ , em que  $\epsilon > 0$  é tal que  $\overline{B(x, \epsilon)} \cap \overline{B(y, \epsilon)} = \emptyset$  e  $\overline{B(x, \epsilon)} \cup \overline{B(y, \epsilon)} \subset U$ . Aplicando a segunda identidade de Green em  $v$  e  $w$  em  $V_\epsilon$ , concluímos que

$$\int_{\partial V_\epsilon} \left( v(z) \frac{\partial w}{\partial \nu}(z) - w(z) \frac{\partial v}{\partial \nu}(z) \right) dS(z) = \int_{V_\epsilon} (v(z) \Delta w(z) - w(z) \Delta v(z)) dz = 0,$$

pois  $\Delta w = \Delta v = 0$  em  $V_\epsilon$ . Note que  $\partial V_\epsilon = \partial U \cup \partial B(x, \epsilon) \cup \partial B(y, \epsilon)$ . Logo

$$\begin{aligned} & \int_{\partial U} \left( v(z) \frac{\partial w}{\partial \nu}(z) - w(z) \frac{\partial v}{\partial \nu}(z) \right) dS(z) + \int_{\partial B(x, \epsilon)} \left( v(z) \frac{\partial w}{\partial \nu}(z) - w(z) \frac{\partial v}{\partial \nu}(z) \right) dS(z) \\ & + \int_{\partial B(y, \epsilon)} \left( v(z) \frac{\partial w}{\partial \nu}(z) - w(z) \frac{\partial v}{\partial \nu}(z) \right) dS(z) = 0. \end{aligned}$$

Como  $v$  e  $w$  são iguais a zero em  $\partial U$ , concluímos que

$$\int_{\partial B(x, \epsilon)} \left( v(z) \frac{\partial w}{\partial \nu}(z) - w(z) \frac{\partial v}{\partial \nu}(z) \right) dS(z) = \int_{\partial B(y, \epsilon)} \left( w(z) \frac{\partial v}{\partial \nu}(z) - v(z) \frac{\partial w}{\partial \nu}(z) \right) dS(z).$$

Como a relação acima vale para todo  $\epsilon > 0$ , então também teremos uma igualdade quando tomarmos o limite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Abaixo, vamos mostrar que tomar esses limites nos leva a conclusão de que  $w(x) = v(y)$  e, por consequência, à demonstração do Teorema.

Faremos a análise quando  $\epsilon \rightarrow 0$  apenas na bola  $\partial B(x, \epsilon)$ , já que para  $\partial B(y, \epsilon)$  basta trocar os papéis de  $v$  e  $w$ .

Primeiro, observamos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B(x, \epsilon)} v \frac{\partial w}{\partial \nu} dS(z) \right| & \leq |\partial B(x, \epsilon)| \|v\|_{L^\infty(\partial B(x, \epsilon))} \|\nabla w\|_{L^\infty(\partial B(y, \epsilon))} \\ & \leq |\mathbb{S}^{n-1}| \epsilon^{n-1} \|v\|_{L^\infty(\partial B(x, \epsilon))} \|\nabla w\|_{L^\infty(\partial B(y, \epsilon))}. \end{aligned}$$

Note que  $w$  é  $C^1$  em  $B(x, \epsilon)$  para  $\epsilon$  pequeno. Logo  $\|\nabla w\|_{L^\infty(\partial B(y, \epsilon))}$  é uniformemente limitado para  $\epsilon$  pequeno (Diremos que  $\|\nabla w\|_{L^\infty(\partial B(y, \epsilon))} \leq D_1$ ). O termo  $\|v\|_{L^\infty(\partial B(x, \epsilon))}$  é mais delicado. Ele pode ser analisado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^\infty(\partial B(x, \epsilon))} & = \|G(x, \cdot)\|_{L^\infty(\partial B(x, \epsilon))} = \|\Phi(x - \cdot) - \phi^x(\cdot)\|_{L^\infty(\partial B(x, \epsilon))} \\ & \leq \|\Phi(x - \cdot)\|_{L^\infty(\partial B(x, \epsilon))} + \|\phi^x(\cdot)\|_{L^\infty(\partial B(x, \epsilon))}. \end{aligned}$$

Note que  $\|\phi^x(\cdot)\|_{L^\infty(\partial B(x, \epsilon))}$  é uniformemente limitado para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno (diremos que  $\|\phi^x(\cdot)\|_{L^\infty(\partial B(x, \epsilon))} \leq D_2$ ) e  $\|\Phi(x - \cdot)\|_{L^\infty(\partial B(x, \epsilon))} = C\epsilon^{2-n}$ , se  $n > 2$  e igual a  $C \ln \epsilon$ , se  $n = 2$ , em que  $C$  é uma constante dada pela Definição 76. Assim, temos

$$\left| \int_{\partial B(x, \epsilon)} v \frac{\partial w}{\partial \nu} dS(z) \right| \leq \begin{cases} |\mathbb{S}^{n-1}| \epsilon^{n-1} D_1 (C\epsilon^{2-n} + D_2) = |\mathbb{S}^{n-1}| D_1 (C\epsilon + D_2\epsilon^{n-1}), & n > 2 \\ |\mathbb{S}^{n-1}| \epsilon D_1 (C \ln \epsilon + D_2) = |\mathbb{S}^{n-1}| D_1 (C \epsilon \ln \epsilon + D_2\epsilon), & n = 2 \end{cases}.$$

De qualquer maneira, o limite vai a zero, quando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Agora vamos estudar o termo  $w \frac{\partial v}{\partial \nu}$ . Temos

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(x, \epsilon)} w \frac{\partial v}{\partial \nu} dS(z) &= \int_{\partial B(x, \epsilon)} w(z) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_z}(z-x) dS(z) - \int_{\partial B(x, \epsilon)} w(z) \frac{\partial \phi^x}{\partial \nu_z}(z) dS(z) \\ &\stackrel{(1)}{=} \int_{\partial B(x, \epsilon)} w(z) dS(z) - \int_{\partial B(x, \epsilon)} w(z) \frac{\partial \phi^x}{\partial \nu}(z) dS(z). \end{aligned}$$

Em (1), usamos Equação (2.5.2).

Note que

$$\left| \int_{\partial B(x, \epsilon)} w(z) \frac{\partial \phi^x}{\partial \nu}(z) dS(z) \right| \leq \|w\|_{L^\infty(\partial B(x, \epsilon))} \|\nabla \phi^x\|_{L^\infty(\partial B(x, \epsilon))} |\mathbb{S}^{n-1}| \epsilon^{n-1}.$$

Como  $w$  e  $\phi^x$  são limitados em  $B(x, \epsilon)$  para  $\epsilon$  pequeno, concluímos que a expressão acima vai a zero quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(x, \epsilon)} w(z) dS(z) &= \int_{\partial B(x, \epsilon)} (w(z) - w(x)) dS(z) + \int_{\partial B(x, \epsilon)} w(x) dS(z) \\ &= \int_{\partial B(x, \epsilon)} (w(z) - w(x)) dS(z) + w(x). \end{aligned}$$

Como  $w$  é contínua em  $B(x, \epsilon)$ , concluímos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\partial B(x, \epsilon)} (w(z) - w(x)) dS(z) \right| \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|w(\cdot) - w(x)\|_{L^\infty(\partial B(x, \epsilon))} = 0,$$

em que  $\|w(\cdot) - w(x)\|_{L^\infty(\partial B(x, \epsilon))} := \sup_{y \in \partial B(x, \epsilon)} |w(y) - w(x)|$ .

Juntando tudo, concluímos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(x, \epsilon)} \left( v(z) \frac{\partial w}{\partial \nu}(z) - w(z) \frac{\partial v}{\partial \nu}(z) \right) dS(z) = -w(x).$$

O mesmo argumento trocando  $v$  com  $w$  e  $x$  com  $y$  nos leva a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(y, \epsilon)} \left( w(z) \frac{\partial v}{\partial \nu}(z) - v(z) \frac{\partial w}{\partial \nu}(z) \right) dS(z) = -v(y).$$

Concluímos assim que

$$G(y, x) = w(x) = v(y) = G(x, y).$$

□

**COROLÁRIO 142.** *A função de Green pode ser estendida a uma função  $G : (\overline{U} \times \overline{U}) \setminus \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , em que  $\overline{D} = \{(x, y) \in \overline{U} \times \overline{U}; x = y\}$ , tal que*

$$G(x, y) = G(y, x).$$

**DEMONSTRAÇÃO.** Sabemos que  $G : (U \times \overline{U}) \setminus D \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que  $G(x, y) = G(y, x)$  para  $x, y$  em  $U$  tais que  $x \neq y$ . Vamos agora definir  $G(x, y) = 0$ , para todo  $x \in \partial U$ ,  $y \in \overline{U}$  com  $x \neq y$ .

Neste caso, se  $x \neq y$ , temos os seguintes casos:

- 1) Se  $x \in U$  e  $y \in U$ , então já sabemos que  $G(x, y) = G(y, x)$ , pelo Teorema 4.2.
- 2) Se  $x \in U$  e  $y \in \partial U$ , então temos  $G(x, y) = 0$ . Pela nossa definição da extensão de  $G$ , temos  $G(y, x) = 0$  também.
- 3) Se  $x \in \partial U$  e  $y \in \overline{U}$ , então já definimos a extensão de  $G$  como sendo  $G(x, y) = 0$ . Se  $y \in \partial U$ , então, pela nossa definição da extensão de  $G$ , temos  $G(y, x) = 0$  também. Se  $y \in U$ , então  $G(y, x) = 0$ , pela definição de função de Green.

Assim, em todos os casos, a extensão da função de Green definida em  $(\overline{U} \times \overline{U}) \setminus \overline{D}$  satisfaz  $G(x, y) = G(y, x)$ . □

**Referências:**

Evans  
Folland

**4.3. Exemplos de funções de Green**

**4.3.1. Função de Green na bola.** Vamos agora achar explicitamente a função de Green na bola  $B(0, 1)$  para dimensões  $n \geq 2$ . Para tanto, usaremos o conceito de ponto dual.

DEFINIÇÃO 143. Seja  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $n \geq 2$ , então  $\tilde{x} = \frac{x}{|x|^2}$  é chamado de ponto dual de  $x$  com respeito a  $\partial B(0, 1)$ .

Note que  $x$  e  $\tilde{x}$  têm o mesmo sentido e direção. Além disso,  $x \cdot \tilde{x} = 1$ .

DEFINIÇÃO 144. Seja  $x \in B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . Vamos definir  $\phi^x : \overline{B(0, 1)} \rightarrow \mathbb{R}$  da seguinte forma:  
1) Para  $x \neq 0$ , a função  $\phi^x : \overline{B(0, 1)} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por

$$\phi^x(y) = \Phi(|x|(y - \tilde{x})) = \Phi\left(|x|\left(y - \frac{x}{|x|^2}\right)\right).$$

2) Para  $x = 0$ , a função  $\phi^0 : \overline{B(0, 1)} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por

$$\phi^0(y) = \begin{cases} 0, & n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)|B(0,1)|}, & n \geq 3 \end{cases}.$$

PROPOSIÇÃO 145. Para todo  $x \in B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , a função  $\phi^x : \overline{B(0, 1)} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz

$$\begin{cases} \Delta \phi^x(y) = 0, & y \in B(0, 1) \\ \phi^x(y) = \Phi(y - x), & y \in \partial B(0, 1) \end{cases}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Vamos considerar primeiro  $x \neq 0$ .

Derivando uma vez  $\phi^x$ , obtemos

$$\frac{\partial \phi^x}{\partial y_i}(y) = \frac{\partial}{\partial y_i} [\Phi(|x|(y - \tilde{x}))] = |x| \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}(|x|(y - \tilde{x})).$$

Com mais uma derivação, chegamos a

$$\frac{\partial^2 \phi^x}{\partial y_i^2}(y) = |x|^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_i^2}(|x|(y - \tilde{x})).$$

Logo

$$\Delta \phi^x(y) = |x|^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_i^2}(|x|(y - \tilde{x})) = 0,$$

pois se  $x \in B(0, 1) \setminus \{0\}$ , então  $\tilde{x} \in \overline{B(0, 1)}^c$  e, portanto,  $y \neq \tilde{x}$ .

Agora seja  $y \in \partial B(0, 1)$  e  $x \in B(0, 1) \setminus \{0\}$ . Então vemos que

$$\begin{aligned} (4.3.1) \quad |x|^2 |y - \tilde{x}|^2 &= |x|^2 \left( |y|^2 - 2y \cdot \tilde{x} + |\tilde{x}|^2 \right) = |x|^2 \left( |y|^2 - 2 \frac{y \cdot x}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^2} \right) \\ &= |x|^2 |y|^2 - 2y \cdot x + 1 \stackrel{(1)}{=} |x|^2 - 2y \cdot x + |y|^2 = |y - x|^2. \end{aligned}$$

Em (1), usamos que  $|y| = 1$ .

Assim, se  $y \in \partial B(0, 1)$  e  $x \in B(0, 1) \setminus \{0\}$ , temos, para  $n = 2$ , que

$$\phi^x(y) = \Phi(|x|(y - \tilde{x})) = -\frac{1}{2\pi} \ln(|x||y - \tilde{x}|) = -\frac{1}{2\pi} \ln(|y - x|) = \Phi(y - x).$$

Para  $n > 2$ , temos que

$$\begin{aligned}\phi^x(y) &= \Phi(|x|(y - \tilde{x})) = \frac{1}{n(n-2)|B(0,1)|} ||x|(y - \tilde{x})|^{2-n} \\ &= \frac{1}{n(n-2)|B(0,1)|} |y-x|^{2-n} = \Phi(y-x).\end{aligned}$$

Logo  $\phi^x$  satisfaz as propriedades desejadas.

Agora vamos considerar  $x = 0$ .

É claro que  $\Delta\phi^0 = 0$ , pois  $\phi^0$  é uma função constante.

Além disso, se  $n = 2$  e  $y \in \partial B(0,1)$ , temos

$$\phi^0(y) = 0 = -\frac{1}{2\pi} \ln(|y|) = \Phi(y).$$

Se  $n > 2$  e  $y \in \partial B(0,1)$ , temos

$$\phi^0(y) = \frac{1}{n(n-2)|B(0,1)|} = \frac{1}{n(n-2)|B(0,1)|} \frac{1}{|y|^{n-2}} = \Phi(y).$$

□

Usando a função  $\phi^x$ , podemos definir a função de Green para a bola, seguindo a teoria geral em  $U$ :

DEFINIÇÃO 146. A função de Green para a bola unitária em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , é a função

$$G : \left\{ (x, y) \in \overline{B(0,1)} \times \overline{B(0,1)}, x \neq y \right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

definida da seguinte forma:

i) Para  $x \in \partial B(0,1)$ , temos  $G(x, y) = 0$ .

ii) Para  $x \in B(0,1) \setminus \{0\}$ , temos  $G(x, y) = \Phi(y-x) - \phi^x(y) = \Phi(y-x) - \Phi(|x|(y-\tilde{x}))$ .

iii) Para  $x = 0$ , temos:

Para  $n = 2$ ,  $G(x, y) = \Phi(y) - \phi^0(y) = -\frac{1}{2\pi} \ln(|y|)$ .

Para  $n > 2$ ,  $G(x, y) = \Phi(y) - \phi^0(y) = \frac{1}{n(n-2)|B(0,1)|} \left( \frac{1}{|y|^{n-2}} - 1 \right)$ .

Por fim, vamos aplicar a fórmula do Teorema 140 no estudo da equação de Poisson na bola. A fórmula se torna:

$$u(x) = - \int_{\partial B(0,1)} u(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) dS(y) - \int_{B(0,1)} G(x, y) \Delta u(y) dS(y).$$

Para tanto, vamos calcular  $\frac{\partial G}{\partial \nu}$ . Temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial y_i}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y_i} (\Phi(x-y) - \Phi(|x|(y-\tilde{x}))) = \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}(y-x) - |x| \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}(|x|(y-\tilde{x})) \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{n|B(0,1)|} \frac{x_i - y_i}{|y-x|^n} + |x| \frac{1}{n|B(0,1)|} \frac{|x|(y_i - \tilde{x}_i)}{|x|^n |y-\tilde{x}|^n} \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{n|B(0,1)|} \frac{x_i - y_i}{|y-x|^n} + \frac{1}{n|B(0,1)|} \frac{(|x|^2 y_i - x_i)}{|y-x|^n} \\ &= \frac{1}{n|B(0,1)|} \frac{1}{|y-x|^n} (x_i - y_i + |x|^2 y_i - x_i) \\ &= \frac{1}{n|B(0,1)|} \frac{(|x|^2 - 1) y_i}{|y-x|^n}.\end{aligned}$$

Em (1), usamos  $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x) = -\frac{1}{n|B(0,1)|} \frac{x_i}{|x|^n}$ , o que é verdade para  $n \geq 2$ . Em (2) usamos a Equação 4.3.1. No ponto  $y \in \partial B(0,1)$ , a normal que aponta para fora de  $B(0,1)$  é justamente  $\nu(y) = y$ . Assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) &= \langle \nabla G(x, y), \nu(y) \rangle = \left\langle \frac{1}{n|B(0,1)|} \frac{(|x|^2 - 1)}{|y-x|^n} y, y \right\rangle \\ &= \frac{1}{n|B(0,1)|} \frac{(|x|^2 - 1)}{|y-x|^n} \langle y, y \rangle = -\frac{1}{n|B(0,1)|} \frac{(1 - |x|^2)}{|y-x|^n}. \end{aligned}$$

Podemos resumir esses resultados no seguinte Teorema:

**TEOREMA 147.** *Seja  $f \in C(\overline{B(0,1)})$  e  $g \in C(\partial B(0,1))$ . Logo se  $u \in C^2(\overline{B(0,1)})$  for solução do problema abaixo:*

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x), & x \in B(0,1) \\ u(x) &= g(x), & x \in \partial B(0,1) \end{aligned} \quad ,$$

então  $u$  é dado por

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{B(0,1)} G(x, y) f(y) dy - \int_{\partial B(0,1)} \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y) g(y) dS(y) \\ &= \int_{B(0,1)} [\Phi(y-x) - \Phi(|x|(y-\tilde{x}))] f(y) dy \\ &\quad + \frac{1}{n|B(0,1)|} \int_{\partial B(0,1)} \frac{(1 - |x|^2)}{|y-x|^n} g(y) dS(y). \end{aligned}$$

Note que a expressão acima não mostra a existência de solução. Isto pode ser delicado. De fato, não é verdade que para toda função contínua  $f \in \overline{B(0,1)}$  sempre vai existir uma função  $u \in C^2(B(0,1))$  tal que  $-\Delta u(x) = f(x)$ , para todo  $x \in B(0,1)$ . No entanto, quando  $f = 0$ , podemos provar o seguinte Teorema:

**TEOREMA 148.** *Seja  $g \in C(\partial B(0,1))$ . Logo a função  $u : B(0,1) \rightarrow \mathbb{R}$  definida abaixo*

$$u(x) = \frac{1}{n|B(0,1)|} \int_{\partial B(0,1)} \frac{(1 - |x|^2)}{|y-x|^n} g(y) dS(y)$$

é tal que:

- 1) A função  $u$  pertence a  $C^\infty(B(0,1))$
- 2) A função  $u$  é harmônica:  $\Delta u(x) = 0$  para todo  $x \in B(0,1)$ .
- 3) Para todo  $x_0 \in \partial B(0,1)$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in B(0,1)} u(x) = g(x_0).$$

Em particular, a função  $u$  definida acima pertence a  $C^2(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$ , pois tem extensão contínua em  $\partial B(0,1)$ , pelo item 3. Esta extensão  $u : \overline{B(0,1)} \rightarrow \mathbb{R}$  (note que continuamos a usar a mesma letra  $u$  para facilitar) é tal que  $u|_{\partial B(0,1)} = g$ . A função  $u$  é, portanto, a única (pelo princípio do máximo) solução do problema abaixo:

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0, & x \in B(0,1) \\ u(x) &= g(x), & x \in \partial B(0,1) \end{aligned} \quad .$$

Antes de provar este Teorema, vamos analisar a expressão para  $n = 2$ .

**EXEMPLO 149.** Para  $n = 2$ , obtemos

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(0,1)} \frac{(1 - x_1^2 - x_2^2)}{|(y_1 - x_1, y_2 - x_2)|^2} g(y) dS(y).$$

Usando coordenadas polares  $x_1 = r \cos(\theta)$  e  $x_2 = r \sin(\theta)$  e definindo  $v(r, \theta) = u(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ , temos

$$v(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{|(\cos(t) - r \cos(\theta), \sin(t) - r \sin(\theta))|^2} g(\cos(t), \sin(t)) dt.$$

Note que

$$\begin{aligned} & |(\cos(t) - r \cos(\theta), \sin(t) - r \sin(\theta))|^2 \\ &= (\cos(t) - r \cos(\theta))^2 + (\sin(t) - r \sin(\theta))^2 \\ &= \cos^2(t) - 2r \cos(t) \cos(\theta) + r^2 \cos^2(\theta) + \sin^2(t) - 2r \sin(t) \sin(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) \\ &= 1 - 2r(\cos(t) \cos(\theta) + \sin(t) \sin(\theta)) + r^2 \\ &= 1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$v(r, \theta) = \frac{(1 - r^2)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(\cos(t), \sin(t))}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2} dt.$$

Observamos também que resultado que obtivemos pode ser usado para resolver o problema numa bola de raio  $r > 0$  através de uma mudança de variável. Consideremos o problema

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0, & x \in B(0, r) \\ u(x) &= g(x), & x \in \partial B(0, r) \end{aligned}.$$

Se  $u \in C^2(B(0, r)) \cap C(\overline{B(0, r)})$  é uma solução do problema acima, então  $v(x) = u(rx)$  é solução

$$\begin{aligned} \Delta v(x) &= 0, & x \in B(0, 1) \\ v(x) &= h(x), & x \in \partial B(0, 1) \end{aligned},$$

em que  $h(x) = g(rx)$ . Logo  $v$  é dado por

$$v(x) = \frac{1}{n |B(0, 1)|} \int_{\partial B(0, 1)} \frac{(1 - |x|^2)}{|y - x|^n} h(y) dS(y).$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} u(x) &= v\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{n |B(0, 1)|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{(1 - |\frac{x}{r}|^2)}{|y - \frac{x}{r}|^n} g(ry) dS(y) \\ &= \frac{1}{n |B(0, 1)| r^{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{(1 - |\frac{x}{r}|^2)}{|y - \frac{x}{r}|^n} g(ry) r^{n-1} dS(y) \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{n |B(0, 1)| r^{n-1}} \int_{\partial B(0, r)} \frac{(1 - |\frac{x}{r}|^2)}{|\frac{y}{r} - \frac{x}{r}|^n} g(y) dS(y) \\ &= \frac{r}{n |B(0, 1)|} \int_{\partial B(0, r)} \frac{(1 - \frac{1}{r^2} |x|^2)}{|y - x|^n} g(y) dS(y) \\ &= \frac{(r^2 - |x|^2)}{n |B(0, 1)| r} \int_{\partial B(0, r)} \frac{1}{|y - x|^n} g(y) dS(y) \end{aligned}$$

em (1) usamos o item 1 do Lema 37. A função  $K : B(0, r) \times \partial B(0, r) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$K(x, y) = \frac{r^2 - |x|^2}{n |B(0, 1)| r} \frac{1}{|y - x|^n}$$

é chamada de **Kernel de Poisson** da bola  $B(0, r)$ .

Vamos agora demonstrar o Teorema 148:

DEMONSTRAÇÃO. 1) Podemos verificar que

$$\partial_x^\alpha \left( \int_{\partial B(0,1)} \frac{(1-|x|^2)}{|y-x|^n} g(y) dS(y) \right) = \int_{\partial B(0,1)} \partial_x^\alpha \left( \frac{(1-|x|^2)}{|y-x|^n} \right) g(y) dS(y).$$

Isto pode ser provado observando que estamos integrando uma função contínua sobre o compacto  $\partial B(0,1)$  e  $C^\infty$  na variável  $x$ . A demonstração de que podemos derivar passando a derivada para dentro da integral é feita de forma semelhante ao que foi feito na demonstração do Teorema 137.

2) Como

$$\Delta \left( \int_{\partial B(0,1)} \frac{(1-|x|^2)}{|y-x|^n} g(y) dS(y) \right) = \int_{\partial B(0,1)} \Delta \left( \frac{(1-|x|^2)}{|y-x|^n} \right) g(y) dS(y),$$

basta provar que  $\Delta \left( \frac{(1-|x|^2)}{|y-x|^n} \right) = 0$ . Isto é verdadeiro, pois

$$\partial_{x_j} \left( \frac{(1-|x|^2)}{|y-x|^n} \right) = \frac{-2x_j}{|y-x|^n} - n \frac{(1-|x|^2)(x_j - y_j)}{|y-x|^{n+2}} =$$

e

$$\begin{aligned} \partial_{x_j}^2 \left( \frac{(1-|x|^2)}{|y-x|^n} \right) &= \frac{-2}{|y-x|^n} + 2n \frac{x_j(x_j - y_j)}{|y-x|^{n+2}} + 2n \frac{x_j(x_j - y_j)}{|y-x|^{n+2}} \\ &\quad - n \frac{(1-|x|^2)}{|y-x|^{n+2}} + n(n+2) \frac{(1-|x|^2)(x_j - y_j)^2}{|y-x|^{n+4}} \\ &= \frac{-2}{|y-x|^n} + 4n \frac{x_j(x_j - y_j)}{|y-x|^{n+2}} - n \frac{(1-|x|^2)}{|y-x|^{n+2}} \\ &\quad + n(n+2) \frac{(1-|x|^2)(x_j - y_j)^2}{|y-x|^{n+4}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Delta \left( \frac{(1-|x|^2)}{|y-x|^n} \right) &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{-2}{|y-x|^n} + 4n \frac{x_j(x_j - y_j)}{|y-x|^{n+2}} - n \frac{(1-|x|^2)}{|y-x|^{n+2}} \right. \\ &\quad \left. + n(n+2) \frac{(1-|x|^2)(x_j - y_j)^2}{|y-x|^{n+4}} \right) \\ &= \frac{-2n}{|y-x|^n} + 4n \frac{x \cdot (x - y)}{|y-x|^{n+2}} - n^2 \frac{(1-|x|^2)}{|y-x|^{n+2}} + (n^2 + 2n) \frac{(1-|x|^2)}{|y-x|^{n+2}} \\ &= \frac{-2n}{|y-x|^n} + 4n \frac{x \cdot (x - y)}{|y-x|^{n+2}} + 2n \frac{(1-|x|^2)}{|y-x|^{n+2}} \\ &= \frac{2n}{|y-x|^{n+2}} \left( -|y-x|^2 + 2x \cdot (x - y) + 1 - |x|^2 \right) \\ &= \frac{2n}{|y-x|^{n+2}} \left( -|y|^2 + 2y \cdot x - |x|^2 + 2|x|^2 - 2x \cdot y + 1 - |x|^2 \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Usamos na última igualdade que  $y \in \partial B(0, 1)$  e, portanto,  $|y| = 1$ .

3) Vamos dividir a demonstração em partes:

i) Se  $x_0 \in \partial B(0, 1)$  e  $V$  é uma vizinhança de  $x_0$ . Vamos mostrar que

$$(4.3.2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0, x \in B(0,1)} \frac{1}{n |B(0, 1)|} \int_{\partial B(0,1) \setminus V} \frac{(1 - |x|^2)}{|y - x|^n} dS(y) = 0.$$

De fato, se  $\overline{B(x_0, r)} \subset V$ , então a função  $\overline{B(x_0, r)} \times (\partial B(0, 1) \setminus V) \ni (x, y) \mapsto \frac{1}{|y - x|^n}$  é contínua no compacto  $\overline{B(x_0, r)} \times (\partial B(0, 1) \setminus V)$ . Logo é limitada: existe  $c > 0$  tal que  $\frac{1}{|y - x|^n} \leq c$  para todo  $(x, y) \in \overline{B(x_0, r)} \times (\partial B(0, 1) \setminus V)$ . Assim

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n |B(0, 1)|} \left| \int_{\partial B(0,1) \setminus V} \frac{(1 - |x|^2)}{|y - x|^n} dS(y) \right| \\ & \leq \frac{1}{n |B(0, 1)|} |\partial B(0, 1)| c (1 - |x|^2) \rightarrow 0, \text{ se } x \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

já que, se  $x \rightarrow x_0$ , então  $|x| \rightarrow |x_0| = 1$ .

ii) Se  $x \in B(0, 1)$ , então

$$\frac{1}{n |B(0, 1)|} \int_{\partial B(0,1)} \frac{(1 - |x|^2)}{|y - x|^n} dS(y) = 1.$$

De fato, sabemos que se  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é harmônica, então  $v$  satisfaz  $\Delta v(x) = 0$  para  $x \in B(0, 1)$  e assume valores iguais a  $v(x)$  em  $\partial B(0, 1)$  (isto é óbvio). Logo, usando o Teorema 147 para  $f = 0$  e  $g = v$ , temos para  $x \in B(0, 1)$ :

$$v(x) = \frac{1}{n |B(0, 1)|} \int_{\partial B(0,1)} \frac{(1 - |x|^2)}{|y - x|^n} v(y) dS(y).$$

Assim, para  $v = 1$ , obtemos a igualdade abaixo para todo  $x \in B(0, 1)$ :

$$(4.3.3) \quad 1 = \frac{1}{n |B(0, 1)|} \int_{\partial B(0,1)} \frac{(1 - |x|^2)}{|y - x|^n} dS(y).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
& |u(x) - g(x_0)| \\
& \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{n|B(0,1)|} \left| \int_{\partial B(0,1)} \frac{(1-|x|^2)}{|y-x|^n} (g(y) - g(x_0)) dS(y) \right| \\
& \leq \frac{1}{n|B(0,1)|} \int_{\partial B(0,1) \setminus V} \frac{(1-|x|^2)}{|y-x|^n} |g(y) - g(x_0)| dS(y) \\
& \quad + \frac{1}{n|B(0,1)|} \int_V \frac{(1-|x|^2)}{|y-x|^n} |g(y) - g(x_0)| dS(y) \\
& \leq \frac{1}{n|B(0,1)|} \int_{\partial B(0,1) \setminus V} \frac{(1-|x|^2)}{|y-x|^n} |g(y) - g(x_0)| dS(y) \\
& \quad + \frac{1}{n|B(0,1)|} \|g(\cdot) - g(x_0)\|_{L^\infty(V)} \int_V \frac{(1-|x|^2)}{|y-x|^n} dS(y) \\
& \stackrel{(2)}{\leq} 2 \|g\|_{L^\infty(\partial B(0,1))} \frac{1}{n|B(0,1)|} \int_{\partial B(0,1) \setminus V} \frac{(1-|x|^2)}{|y-x|^n} dS(y) \\
& \quad + \|g(\cdot) - g(x_0)\|_{L^\infty(V)}.
\end{aligned}$$

Em (1) e (2) usamos 4.3.3. Em particular, que  $g(x_0) = \left( \frac{1}{n|B(0,1)|} \int_{\partial B(0,1)} \frac{(1-|x|^2)}{|y-x|^n} dS(y) \right) g(x_0)$ .

Sabemos que  $g$  é contínua. Logo dado  $\epsilon > 0$ , podemos escolher uma vizinhança de  $V$  tal que  $\|g(\cdot) - g(x_0)\|_{L^\infty(V)} < \frac{\epsilon}{2}$ . Fixada essa vizinhança, vimos na Equação 4.3.2 que existe  $\delta > 0$  tal que se  $|x - x_0| < \delta$  e  $x \in B(0,1)$ , então

$$\frac{1}{n|B(0,1)|} \int_{\partial B(0,1) \setminus V} \frac{(1-|x|^2)}{|y-x|^n} dS(y) < \frac{\epsilon}{4 \|g\|_{L^\infty(\partial B(0,1))}}.$$

Assim, concluímos que se  $|x - x_0| < \delta$ ,  $x \in B(0,1)$ , temos

$$|u(x) - g(x_0)| < \epsilon.$$

□

### Referências:

Jürgen Jost  
 Evans  
 Folland

### 4.3.2. Exercícios.

EXERCÍCIO 150. Seja  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $r > 0$  e  $f : \partial B(x_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Considere o seguinte problema de Poisson em  $B(x_0, r)$ :

$$\begin{aligned}
\Delta u(x) &= 0, & x \in B(x_0, r) \\
u(x) &= f(x), & x \in \partial B(x_0, r)
\end{aligned}$$

Mostre que existe uma única função  $u \in C(\overline{B(x_0, r)}) \cap C^2(B(x_0, r))$  que resolve o problema acima. Esta função é dada por

$$u(x) = \int_{\partial B(x_0, R)} \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{|\partial B(0,1)| R |x - y|^n} f(y) dS(y).$$

(Dica: Considere a função  $v(x) = u(x_0 + rx)$  e aplique o Teorema 148)

EXERCÍCIO 151. Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto,  $x_0 \in U$  e  $r > 0$  tais que  $\overline{B(x_0, r)} \subset U$ . Mostre que se  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função harmônica, então

$$(4.3.4) \quad u(x) = \int_{\partial B(x_0, r)} \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{|\partial B(0, 1)| r |x - y|^n} u(y) dS(y).$$

Use a expressão acima para achar mais uma demonstração de que vale a fórmula do valor médio:  $u(x_0) = \int_{\partial B(x_0, r)} u(y) dS(y)$  para todo  $\overline{B(x_0, r)} \subset U$ .

EXERCÍCIO 152. (Folland ex.3 cap.2.H e Evans) Suponha que  $u : \overline{B(x_0, R)} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua, harmônica em  $B(0, R)$  e maior ou igual a zero. Mostre que se  $|x - x_0| = r < R$ , então

$$\frac{1 - \frac{r}{R}}{\left[1 + \left(\frac{r}{R}\right)\right]^{n-1}} u(x_0) \leq u(x) \leq \frac{1 + \frac{r}{R}}{\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)\right]^{n-1}} u(x_0).$$

EXERCÍCIO 153. Use a expressão do exercício anterior e mostre que se  $u : \overline{B(0, R)} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua, harmônica em  $B(0, R)$  e positiva, então mostre que para todo  $x \in B(0, R)$ , temos

$$\frac{1 - \frac{|x|}{R}}{\left[1 + \left(\frac{|x|}{R}\right)\right]^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq \frac{1 - \frac{|x|}{R}}{\left[1 - \left(\frac{|x|}{R}\right)\right]^{n-1}} u(0).$$

Usando a expressão acima, prove que toda função  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  harmônica e estritamente positiva é constante. Este resultado também é chamado por algumas referências de Teorema de Liouville. (Dica: O que ocorre quando tomamos  $R$  muito grande?)

EXERCÍCIO 154. Usando a expressão do exercício anterior, prove que toda função  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  harmônica e estritamente positiva é constante. Este resultado também é chamado por algumas referências de Teorema de Liouville. (Dica: O que ocorre quando tomamos  $R$  muito grande?)

EXERCÍCIO 155. Se  $n = 2$ , mostre que se  $u \in C^2(B(0, 1)) \cap C(\overline{B(0, 1)})$  é uma função harmônica em  $B(0, 1)$ , então

$$u(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2} u(\cos(t), \sin(t)) dt,$$

Mostre também que  $\frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t) + r^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikt}$ .

**4.3.3. Função de Green no semiplano**  $\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \times ]0, \infty[$ . Vamos começar definindo a reflexão para construir a função de Green. Ela fará o papel análogo ao dual de  $x$  visto no caso da bola  $B(0, 1)$ .

DEFINIÇÃO 156. Seja  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ . A sua reflexão em relação a  $\partial \mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$  é definida como

$$\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n).$$

Com isto, poderemos definir  $\phi^x$  da seguinte forma:

DEFINIÇÃO 157. Seja  $x \in \mathbb{R}_+^n$ . Definimos  $\phi^x : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\phi^x(y) = \Phi(y - \tilde{x}) = \Phi(y_1 - x_1, \dots, y_{n-1} - x_{n-1}, y_n + x_n).$$

Vamos mostrar que  $\phi^x$  é o corretor que queremos. De fato, temos

$$\Delta \phi^x(y) = \Delta \Phi(y_1 - x_1, \dots, y_{n-1} - x_{n-1}, y_n + x_n) = 0,$$

se  $y \in \mathbb{R}_+^n$ , já que  $y_n + x_n > 0$  e, portanto,  $y - \tilde{x} \neq 0$ . Além disso, para  $y \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ , temos

$$\phi^x(y) = \Phi(y_1 - x_1, \dots, y_{n-1} - x_{n-1}, x_n) = \Phi(y_1 - x_1, \dots, y_{n-1} - x_{n-1}, -x_n) = \Phi(y - x),$$

já que  $\Phi(x)$  depende só de  $|x|$ . Usando a função  $\phi^x$ , podemos definir a função de Green da seguinte forma:

DEFINIÇÃO 158. A função de Green em  $\mathbb{R}_+^n$  é a função  $G : \{(x, y) \in \overline{\mathbb{R}_+^n} \times \overline{\mathbb{R}_+^n}; x \neq y\} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida como

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi(y - \tilde{x}).$$

Vamos aplicar a fórmula:

$$u(x) = - \int_{\partial U} u(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) dS(y) - \int_U G(x, y) \Delta u(y) dS(y).$$

Nesse caso, temos que a normal é definida como  $\nu = (0, \dots, 0, -1)$ . Logo devemos calcular  $\frac{\partial G}{\partial y_n}$  para conhecer  $\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y)$ . Vemos que

$$\frac{\partial G}{\partial y_n}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y_n} (\Phi(y - x) - \Phi(y - \tilde{x})) = \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(y - x) - \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(y - \tilde{x}).$$

Para  $n = 2$ , temos

$$\Phi(y) = -\frac{1}{2\pi} \ln |y| \implies \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{|y|} \frac{y_n}{|y|} = -\frac{1}{2\pi} \frac{y_n}{|y|^2}.$$

Para  $n > 2$ , temos

$$\Phi(y) = \frac{1}{n(n-2)|B(0,1)|} |y|^{2-n}.$$

Logo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(y) = \frac{1}{n(n-2)|B(0,1)|} (2-n) |y|^{1-n} \frac{y_n}{|y|} = -\frac{1}{n|B(0,1)|} \frac{y_n}{|y|^n}.$$

Assim, para  $n \geq 2$ , temos

$$\frac{\partial G}{\partial y_n}(x, y) = -\frac{1}{n|B(0,1)|} \left( \frac{y_n - x_n}{|y - x|^n} - \frac{y_n + x_n}{|y - \tilde{x}|^n} \right).$$

Se  $y \in \partial \mathbb{R}_+^n$ , então  $|y - x| = |y - \tilde{x}|$ . Assim,

$$\frac{\partial G}{\partial y_n}(x, y) = -\frac{1}{n|B(0,1)|} \left( \frac{-x_n}{|y - x|^n} - \frac{x_n}{|y - \tilde{x}|^n} \right) = \frac{2x_n}{n|B(0,1)||y - x|^n}.$$

Concluimos que

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) = -\frac{2x_n}{n|B(0,1)||y - x|^n}.$$

Usando esta expressão, podemos provar o seguinte Teorema, análogo ao Teorema 148.

TEOREMA 159. *Seja  $g : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e limitada. Logo a função  $u : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida abaixo*

$$u(x) = \frac{2x_n}{n|B(0,1)|} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{g(y)}{|y - x|^n} dy,$$

em que identificamos  $\mathbb{R}^{n-1}$  com  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ , é tal que:

- 1) A função  $u$  pertence a  $C^\infty(\mathbb{R}_+^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+^n)$
- 2) Temos  $\Delta u(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}_+^n$ .
- 3) Para todo  $x_0 \in \partial \mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in \mathbb{R}_+^n} u(x) = g(x_0).$$

## Referências:

Evans

**4.3.4. Exercícios.**

EXERCÍCIO 160. Estude a demonstração do Teorema 159. (Teorema 14 do capítulo 2 do Evans).

EXERCÍCIO 161. (FOLLAND 2.E.2) Mostre que a função de Green para  $-\frac{d^2}{dx^2}$  em  $]0, 1[$  é dada por

$$G(x, y) = \begin{cases} x(1-y), & x < y \\ y(1-x), & x > y \end{cases} .$$

Dica: Resolva

$$\begin{cases} \Delta \phi^x(y) = 0, & y \in U \\ \phi^x(y) = \Phi(y-x), & y \in \partial U \end{cases} ,$$

para o caso  $U = ]0, 1[$  e aplique a definição de função de Green dada em sala de aula. Note que  $\Phi$  é dado pelo Exercício 138.

EXERCÍCIO 162. (Evans Cap.2.9) Seja  $u$  a solução do problema:

$$\begin{aligned} \Delta u(x', x_n) &= 0, & (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times ]0, \infty[ \\ u(x', 0) &= g(x'), & x' \in \mathbb{R}^{n-1} \end{aligned}$$

dado pela fórmula de Poisson. Suponha que  $g$  seja contínuo e limitado e que  $g(x') = |x'|$  para  $|x'| \leq 1$ . Mostre que  $\nabla u(x)$  não é limitado próximo a 0. (Dica: Estime  $\frac{u(\lambda e_n) - u(0)}{\lambda}$ ).

**4.4. Consequências da fórmula de Poisson**

Vamos agora mostrar algumas consequências da fórmula de Poisson.

**4.4.1. Princípio de reflexão.** A primeira consequência que provaremos é o princípio da reflexão, análogo ao que é conhecido em análise de uma variável complexa. Vamos usar a seguinte notação para  $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$x = (x', x_n),$$

em que  $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$  e  $x_n \in \mathbb{R}$ . Assim, temos

TEOREMA 163. *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto tal que, se  $(x', x_n) \in U$ , então  $(x', -x_n) \in U$ . Considere-mos os seguintes conjuntos:*

$$U_0 = \{(x', x_n) \in U; x_n = 0\}$$

$$U_+ = \{(x', x_n) \in U; x_n > 0\}$$

$$U_- = \{(x', x_n) \in U; x_n < 0\}$$

*Seja  $u : U_0 \cup U_+ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que  $u|_{U_+} : U_+ \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^2$  e  $\Delta u(x) = 0$ , para todo  $x \in U_+$ . Se  $u(x) = 0$  para todo  $x \in U_0$ , então a função  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$  definida abaixo é harmônica:*

$$v(x', x_n) = \begin{cases} u(x', x_n), & x \in U_+ \\ 0, & x \in U_0 \\ -u(x', -x_n), & x \in U_- \end{cases} .$$

Note que, com as hipóteses acima,  $U_{\pm} = \{(x', -x_n); (x', x_n) \in U_{\mp}\}$ . A extensão acima é semelhante a uma extensão ímpar, que será vista mais à frente no curso.

DEMONSTRAÇÃO. Como  $u$  é contínua, então  $v$  também é contínua. De fato  $v|_{U_-}$  e  $v|_{U_+}$  são de classe  $C^2$ . Logo contínuas. Se  $x^0 = (x'^0, 0) \in U_0$ , então

$$\lim_{(x', x_n) \rightarrow (x'^0, 0), x_n > 0} v(x', x_n) = \lim_{(x', x_n) \rightarrow (x'^0, 0), x_n > 0} u(x', x_n) = u(x'^0, 0) = 0,$$

$$\lim_{(x', x_n) \rightarrow (x'^0, 0), x_n < 0} v(x', x_n) = \lim_{(x', x_n) \rightarrow (x'^0, 0), x_n < 0} u(x', -x_n) = \lim_{(x', x_n) \rightarrow (x'^0, 0), x_n > 0} -u(x'^0, 0) = 0,$$

pois  $u : U_0 \cup U_+ \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua.

Vemos facilmente que  $v|_{U_-}$  e  $v|_{U_+}$  são harmônicas. De fato,  $v|_{U_+}$  é harmônica, pois é igual a  $u$ . Para ver que  $v|_{U_-}$  é harmônica, considere  $x = (x', x_n) \in U_-$ . Logo

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x_n}(x', x_n) &= \frac{\partial}{\partial x_n}(-u(x', -x_n)) = \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', -x_n) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}(x', x_n) &= \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', -x_n) \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x', -x_n)\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta v(x', x_n) = \Delta(-u(x', -x_n)) = -\Delta u(x', -x_n) = 0.$$

Assim,  $v$  é harmônica em  $U_-$  e em  $U_+$ . Falta só entender o que ocorre em  $U_0$ .

Seja  $x_0 = (x'_0, 0) \in U_0$ ,  $x'_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ , e  $r > 0$  tal que  $\overline{B(x_0, r)} \subset U_0$ . Seja  $w : \overline{B(x_0, r)} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que  $u|_{B(x_0, r)}$  é de classe  $C^2$  e resolve

$$\begin{cases} \Delta w(x) = 0, & x \in B(x_0, r) \\ w(x) = v(x), & x \in \partial B(x_0, r) \end{cases}.$$

Sabemos que uma função  $w$  como essa existe, pelo Teorema 148. Além disso, ela é dada por

$$w(x) = \int_{\partial B(x_0, r)} \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{|\partial B(0, 1)| r |x - y|^n} v(y) dS(y).$$

Agora observamos que se  $x = (x', x_n) \in B(x_0, r)$  e  $y = (y', y_n) \in \partial B(x_0, r)$ , então

$$\begin{aligned}w(x', -x_n) &= \int_{\partial B(x_0, r)} \frac{r^2 - |(x, -x_n) - (x'_0, 0)|^2}{|\partial B(0, 1)| r |(x, -x_n) - (y', y_n)|^n} v(y', y_n) dS(y', y_n) \\ &= \int_{\partial B(x_0, r)} \frac{r^2 - |(x - x'_0, -x_n)|^2}{|\partial B(0, 1)| r |(x - y', -x_n - y_n)|^n} v(y', y_n) dS(y', y_n) \\ &= \int_{\partial B(x_0, r)} \frac{r^2 - |(x - x'_0, x_n)|^2}{|\partial B(0, 1)| r |(x - y', x_n + y_n)|^n} v(y', y_n) dS(y', y_n) \\ &\stackrel{(1)}{=} \int_{\partial B(x_0, r)} \frac{r^2 - |(x - x'_0, x_n)|^2}{|\partial B(0, 1)| r |(x - y', x_n - y_n)|^n} v(y', -y_n) dS(y', y_n) \\ &\stackrel{(2)}{=} - \int_{\partial B(x_0, r)} \frac{r^2 - |(x - x'_0, x_n)|^2}{|\partial B(0, 1)| r |(x - y', x_n - y_n)|^n} v(y', y_n) dS(y', y_n) \\ &\stackrel{(3)}{=} -w(x', x_n).\end{aligned}$$

Em (1), fizemos a mudança de variável  $y \mapsto -y$ . Em (2), usamos que  $v(y', -y_n) = -v(y', y_n)$ . Em (3), usamos novamente a fórmula de Poisson.

Em particular, concluímos que  $w(x', 0) = 0$ . Assim,  $w$  coincide com  $v$  em  $U_0 \cap B(x_0, r)$ . Vamos agora definir

$$B_+(x_0, r) = \{(x, x_n) \in B(x_0, r); x_n > 0\}$$

$$B_-(x_0, r) = \{(x, x_n) \in B(x_0, r); x_n < 0\}$$

Observamos, portanto, que tanto  $w$  como  $v$  satisfazem as equações abaixo:

$$\begin{cases} \Delta g(x) = 0, & (x', x_n) \in B_+(x_0, r) \\ g(x) = v(x), & (x', x_n) \in \partial B_+(x_0, r) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \Delta g(x) = 0, & (x', x_n) \in B_-(x_0, r) \\ g(x) = v(x), & (x', x_n) \in \partial B_-(x_0, r) \end{cases}.$$

Como ambas as funções pertencem a  $C(\overline{B_+(x_0, r)}) \cap C^2(B_+(x_0, r))$ , quando restritas a  $B_+(x_0, r)$ , e pertencem a  $C(\overline{B_-(x_0, r)}) \cap C^2(B_-(x_0, r))$ , quando restritas a  $B_-(x_0, r)$ , concluímos, pela unicidade do problema de Dirichlet (veja Proposição 59) que  $w = v$  tanto em  $B_+(x_0, r)$  como em  $B_-(x_0, r)$ . Desta maneira,  $w = v$  em  $B(x_0, r)$ . Como  $w$  é harmônica em  $B(x_0, r)$ , então  $v$  também é, pois é igual a  $w$ . Assim,  $v$  é de classe  $C^2$  em  $B(x_0, r)$  e é tal que  $\Delta v = \Delta w = 0$  em  $B(x_0, r)$ . Concluímos que  $v$  é harmônica numa vizinhança de cada ponto  $x_0$  em  $U_0$ .

Com isso, concluímos que  $v$  é harmônica em  $U = U_+ \cup U_- \cup U_0$ .  $\square$

### Referências:

Folland

Evans (mas o Evans deixa como exercício).

**4.4.2. Exercícios.** Abaixo, usaremos  $\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \times ]0, \infty[$  e  $\overline{\mathbb{R}_+^n} = \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty[$ .

EXERCÍCIO 164. Sejam  $f : \overline{\mathbb{R}_+^n} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e harmônica em  $\mathbb{R}_+^n$ . Mostre que se  $f$  for limitada e  $f(x', 0) = 0$ , então  $f$  é igual a zero em todo o ponto de  $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty[$ .

EXERCÍCIO 165. Sejam  $u : \overline{\mathbb{R}_+^n} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $v : \overline{\mathbb{R}_+^n} \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas, de classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}_+^n$  e tais que resolvem a equação abaixo:

$$\begin{aligned} \Delta u(x', x_n) &= f(x', x_n), & (x', x_n) \in \mathbb{R}_+^n \\ u(x', 0) &= g(x'), & x' \in \mathbb{R}^{n-1} \end{aligned}$$

em que  $f : \overline{\mathbb{R}_+^n} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas. Mostre que se  $u$  e  $v$  forem funções limitadas, então  $u = v$ . (Dica: faça  $u - v$ ).

**4.4.3. Remoção de singularidades.** Usando um argumento semelhante ao da reflexão, provamos que “singularidades podem ser removidas”, algo que pode ser deixado mais claro no enunciado abaixo.

TEOREMA 166. *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $x_0 \in U$ . Considere uma função  $u : U \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  harmônica tal que*

$$(4.4.1) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|u(x)|}{\ln(|x - x_0|)} &= 0, & n = 2 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0|^{n-2} |u(x)| &= 0, & n > 2 \end{aligned}$$

Então existe o limite  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$ , o limite é finito e a função  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$  dada abaixo é harmônica

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x \neq x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x), & x = x_0 \end{cases}.$$

Antes de provar o Teorema, vamos tentar entender melhor o enunciado. Observamos que  $\frac{1}{\ln(|x - x_0|)}$  e  $|x - x_0|^{n-2}$ ,  $n > 2$ , vão a zero. Assim, se  $u$  for limitada em uma bola  $B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$ , então as condições do teorema já são satisfeitas. Na verdade,  $u(x)$  pode até ir ao infinito quando  $x \rightarrow x_0$ , desde que mais lentamente do que  $\ln(|x - x_0|)$ , quando  $n = 2$ , e  $|x - x_0|^{2-n}$  quando  $n > 2$ .

O teorema é, portanto, surpreendente. De maneira informal, o que queremos dizer é que: Se  $u : U \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  é harmônica, então ou o limite  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$  existe ou a função “explode” rapidamente quando  $x \rightarrow x_0$ . Mais ainda: Se não explodir rapidamente, então a função  $u$  na verdade é a restrição de uma função harmônica em todo  $U$ . Isto justifica o nome remoção de singularidade: Uma função harmônica em  $U \setminus \{x_0\}$  também é harmônica em  $U$  (podemos remover a singularidade  $\{x_0\}$ ), desde que ela não exploda muito rápido em  $x_0$  (no sentido dos limites do enunciado do Teorema).

Podemos reconhecer facilmente as funções  $\ln(|x - x_0|)$  e  $|x - x_0|^{2-n}$  do teorema. Elas são, a menos de uma constante, iguais a solução fundamental do laplaciano. Assim, podemos reescrever o enunciado usando a notação “o-pequeno”<sup>1</sup>, definida abaixo:

<sup>1</sup>Lembramos que existe as notações “o-pequeno” (o minúscula) e “O-grande” (o maiúscula). O Apostol, volume 1, fala um pouco mais dessas notações. Apenas por curiosidade, a notação “O-grande” funciona da seguinte maneira: Sejam  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  funções não negativas. Dizemos que

$$f(x) = O(g(x)), \text{ para } x \in U$$

se existir uma constante  $C > 0$  tal que  $f(x) \leq Cg(x)$ , para todo  $x \in U$ .

Existem diversas variações dessas notações, mas todas contêm de certa forma a mesma ideia: O-grande quando uma função é menor do que uma constante vezes a outra e o-pequeno quando a divisão vai para zero. Observe que se  $f(x) = o(g(x))$  para  $x \rightarrow x_0$ , então  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ . Assim,  $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \epsilon$  para  $x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ , em que  $\delta > 0$  é uma constante. Portanto,  $|f(x)| < \epsilon |g(x)|$  para  $x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ , ou seja,  $f(x) = O(g(x))$  para  $x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ .

Concluímos que o-pequeno implica O-grande. Assim, exigir o-pequeno é mais do que exigir O-grande.

Dizemos que

$$f(x) = o(g(x)), \text{ para } x \rightarrow x_0$$

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Neste caso, as condições da Equação (4.4.1) são equivalentes a

$$u(x) = o(\Phi(x - x_0)),$$

em que  $\Phi$ , como sempre, é a solução fundamental do Laplaciano.

Vamos agora provar o Teorema. Os ingredientes serão: fórmula de Poisson, solução fundamental e princípio do máximo.

**DEMONSTRAÇÃO.** Considere  $r > 0$  tal que  $\overline{B(x_0, r)} \subset U$ . Como  $u|_{\partial B(x_0, r)} : \partial B(x_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, sabemos pelo Teorema 148 e 59 que existe uma única função  $w \in C(\overline{B(x_0, r)}) \cap C^2(B(x_0, r))$  tal que

$$\begin{aligned} \Delta w(x) &= 0, & x \in B(x_0, r) \\ w(x) &= u(x), & x \in \partial B(x_0, r) \end{aligned}$$

Se mostrarmos que  $w = u$  em  $B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$ , então concluiremos que o limite  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$  existe, já que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = w(x_0).$$

Além disso, a função  $v$  do enunciado é harmônica em  $U$ , já que  $u$  é harmônica em  $U \setminus \{x_0\}$  e coincide com  $v$  nesta região e  $w$  é harmônica em  $B(x_0, r)$  e coincide com  $v$  nesta região. Como  $U \setminus \{x_0\} \cup B(x_0, r) = U$ , isto encerra a demonstração.

Vamos agora provar que  $w = u$ . Para tanto, definimos a função  $g : \overline{B(x_0, r)} \setminus B(x_0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  da seguinte forma:

$$g(x) = w(x) - u(x) - \epsilon \left( \Phi(x - x_0) - \tilde{\Phi} \right),$$

em que  $\tilde{\Phi}$  é o valor de  $\Phi$  em qualquer ponto de  $\partial B(0, r)$  (Lembramos que a função  $\Phi$  é radial),  $0 < \delta < r$  e  $\epsilon > 0$  são constantes que serão determinadas a seguir. Observe que a função  $\Phi(x - x_0) - \tilde{\Phi}$  é sempre positiva, pela definição de  $\Phi$ , e é igual a zero quando  $x \in \partial B(x_0, r)$ .

Podemos escrever  $g$  também da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & w(x) - u(x) - \epsilon \left( \Phi(x - x_0) - \tilde{\Phi} \right) \\ &= \Phi(x - x_0) \left[ \frac{w(x)}{\Phi(x - x_0)} - \frac{u(x)}{\Phi(x - x_0)} - \epsilon \left( 1 - \frac{\tilde{\Phi}}{\Phi(x - x_0)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Note que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{w(x)}{\Phi(x - x_0)} - \frac{u(x)}{\Phi(x - x_0)} - \epsilon \left( 1 - \frac{\tilde{\Phi}}{\Phi(x - x_0)} \right) \right] = -\epsilon < 0.$$

Assim, fixando  $\delta > 0$  suficientemente pequeno, temos que  $g$  é negativa em  $\partial B(x_0, \delta)$ . Note que  $w$ ,  $u$  e  $\Phi$  são todas funções harmônicas em  $B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$  e contínuas em  $\overline{B(x_0, r)}$ . Portanto,  $g$  é contínua em  $\overline{B(x_0, r)} \setminus B(x_0, \delta)$  e harmônica no interior de  $\overline{B(x_0, r)} \setminus B(x_0, \delta)$  (que é igual a  $B(x_0, r) \setminus B(x_0, \delta)$ ). Assim, vale o princípio do máximo. Como  $g(x) = 0$  para  $x \in \partial B(x_0, r)$  (pois  $w(x) = u(x)$  e  $\Phi(x - x_0) = \tilde{\Phi}$  nesta região) e  $g(x) < 0$  para  $x \in \partial B(x_0, \delta)$ , o princípio do máximo nos diz que  $g(x) \leq 0$  para todo  $x \in \overline{B(x_0, r)} \setminus B(x_0, \delta)$ .

Como  $\delta > 0$  fixado pode ser arbitrariamente pequeno, concluímos que  $g(x) \leq 0$  para todo  $\overline{B(x_0, r)} \setminus \{x_0\}$ . Portanto,

$$w(x) - u(x) - \epsilon \left( \Phi(x - x_0) - \tilde{\Phi} \right) = g(x) \leq 0.$$

para todo  $x \in \overline{B(x_0, r)} \setminus \{x_0\}$ . Mas isto vale para todo  $\epsilon > 0$ . Assim, fixando  $x \in \overline{B(x_0, r)} \setminus \{x_0\}$  e tomando o limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , concluímos que

$$w(x) \leq u(x).$$

Se definirmos uma outra função  $\tilde{g} : \overline{B(x_0, r)} \setminus B(x_0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  trocando  $u$  com  $w$ , ou seja, da seguinte forma:

$$\tilde{g}(x) = u(x) - w(x) - \epsilon \left( \Phi(x - x_0) - \tilde{\Phi} \right)$$

e fizermos exatamente o mesmo argumento anterior, concluiríamos que  $u(x) \leq w(x)$ . Assim, devemos ter  $u = w$  em  $B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$ .  $\square$

### Referências:

Folland

Apostol

#### 4.4.4. Exercícios.

EXERCÍCIO 167. (Exemplo de Zaremba) Considere o seguinte problema de Dirichlet em  $U = B(0, 1) \setminus \{0\}$ :

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0, & x \in B(0, 1) \setminus \{0\} \\ u(x) &= g(x), & x \in \partial B(0, 1) \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

a) Mostre que se  $g \equiv 0$  e  $u_0 = 1$ , então não existe nenhuma função contínua  $u : \overline{B(0, 1)} \rightarrow \mathbb{R}$  que seja harmônica em  $B(0, 1) \setminus \{0\}$  e que resolva a equação acima.

b) Generalizando o item a), mostre que se  $g : \partial B(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, então existe uma função contínua  $u : \overline{B(0, 1)} \rightarrow \mathbb{R}$  que é harmônica em  $B(0, 1) \setminus \{0\}$  e que resolve a equação acima se, e somente se,  $u_0 = \int_{\partial B(0, 1)} g(x) dx$ . Neste caso, a função é harmônica em todo o aberto  $B(0, 1)$ .

**4.4.5. Analiticidade das funções harmônicas.** Nesta seção, definiremos que são funções reais analíticas e daremos uma demonstração de que toda função harmônica é real analítica.

Para deixar a apresentação mais breve, deixaremos algumas propriedades sobre as funções reais analíticas apenas enunciadas. Livros como o Fritz John provam partes dessas propriedades.

Antes de mais nada, recordaremos a série de Taylor e a fórmula do binômio generalizada:

PROPOSIÇÃO 168. *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e uma função  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ . Logo se  $x_0 \in U$ ,  $h \in \mathbb{R}^n$  e  $[x_0, h] := \{tx_0 + (1-t)h; t \in [0, 1]\} \subset U$ , então*

$$u(x_0 + h) = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha u(x_0) h^\alpha + \sum_{|\alpha|=N} \frac{N}{\alpha!} h^\alpha \int_0^1 (1-\theta)^{N-1} \partial^\alpha u(x_0 + \theta h) d\theta$$

PROPOSIÇÃO 169. *Para cada  $N \in \mathbb{N}_0$  e  $x_1, \dots, x_n$  em  $\mathbb{R}$ , temos que*

$$(x_1 + \dots + x_n)^N = \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} x^\alpha.$$

Um corolário importante é dado pela seguinte relação obtida considerando  $x_1 = \dots = x_n = 1$ :

$$(4.4.2) \quad n^N = \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \geq \sum_{|\alpha|=N} 1.$$

Essas fórmulas serão úteis a seguir.

DEFINIÇÃO 170. *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Dizemos que  $u$  é real analítica se para cada  $x_0 \in U$ , existe  $r > 0$  tal que  $\overline{B(x_0, r)} \subset U$  e uma sequência  $(c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0}$  de números reais tais que:*

- 1)  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|\alpha| \leq N} |c_\alpha| |h|^{|\alpha|} < \infty$ , para todo  $|h| < r$ .
- 2)  $u(x_0 + h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha h^\alpha$ , para todo  $|h| < r$ .

Tanto  $r$  como  $(c_\alpha)$  dependem em geral de  $x_0$ .

É fácil notar que o conjunto das funções reais analíticas forma um espaço vetorial. De fato, basta somar as séries para provar que a soma de funções reais analíticas é real analítica e multiplicar as séries por constantes para provar que a multiplicação de uma função real analítica por um escalar continua sendo real analítica.

EXEMPLO 171. Em  $\mathbb{R}$ , conhecemos diversas funções reais analíticas. Exemplos são as funções polinomiais (a série é finita neste caso), funções trigonométricas e a função exponencial. De fato, podemos definir as funções seno, cosseno e exponencial pelas suas séries de Taylor.

EXEMPLO 172. Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa. Logo  $\operatorname{Re}(f)$  e  $\operatorname{Im}(f) : U \rightarrow \mathbb{R}$  são funções reais analíticas, em que identificamos  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{R}^2$ . De fato, pela teoria das funções de uma variável complexa, para cada  $z_0 \in U$ , existe  $r > 0$  tal que  $\overline{B(z_0, r)} \subset U$  e

$$f(z_0 + h) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{d^j f}{dz^j}(z_0) h^j,$$

em que a série converge absolutamente em  $\overline{B(z_0, r)}$ . Assim, se  $z_0 = (x_0, y_0)$  e  $h = (h_1, h_2)$ , temos

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{d^j f}{dz^j}(x_0, y_0) (h_1 + ih_2)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \frac{1}{j!} \frac{d^j f}{dz^j}(x_0, y_0) i^{k-j} h_1^k h_2^{j-k}.$$

Logo

$$\operatorname{Re}f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \frac{1}{j!} \operatorname{Re} \left( \frac{d^j f}{dz^j}(x_0, y_0) i^{k-j} \right) h_1^k h_2^{j-k}.$$

A série acima converge para  $\operatorname{Re}f(x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ . Além disso, a convergência é uniforme para  $|h| < \frac{r}{2}$ . De fato,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \frac{1}{j!} \left| \operatorname{Re} \left( \frac{d^j f}{dz^j}(x_0, y_0) i^{k-j} \right) h_1^k h_2^{j-k} \right| \\ & \leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \left| \frac{d^j f}{dz^j}(x_0, y_0) \right| \frac{1}{j!} |h_1|^k |h_2|^{j-k} \\ & = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left| \frac{d^j f}{dz^j}(x_0, y_0) \right| (|h_1| + |h_2|)^j \\ & \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left| \frac{d^j f}{dz^j}(x_0, y_0) \right| |2h|^j < \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left| \frac{d^j f}{dz^j}(x_0, y_0) \right| r^j < \infty. \end{aligned}$$

O mesmo pode ser feito para  $\operatorname{Im}f$ .

O item 1) da definição acima garante que a série

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|\alpha| \leq N} c_{\alpha} h^{\alpha} := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N \sum_{|\alpha|=j} c_{\alpha} h^{\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=j} c_{\alpha} h^{\alpha}$$

é absolutamente convergente. Logo ela converge para cada  $|h| < r$ . O item 2) nos diz que ela converge justamente para  $u(x_0 + h)$ . Às vezes, o item 2) é expresso como

$$u(x_0 + h) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0} c_{\alpha} h^{\alpha},$$

já que a soma  $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=j}$  percorre todos os  $\alpha \in \mathbb{N}_0$ . (Como a série converge absolutamente, não precisamos nem nos preocupar com qual ordem somamos os termos  $c_{\alpha} h^{\alpha}$ . O argumento é semelhante ao de séries de uma variável real encontrado no Elon, curso de análise volume 1).

PROPOSIÇÃO 173. *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real analítica. Assim temos as seguintes propriedades:*

1) *Para cada  $x_0$ , considere  $0 < r < d(x_0, U^c)$  e  $(c_\alpha)$  tais que as propriedades 1) e 2) da Definição 170 sejam satisfeitas. Se  $0 < \tilde{r} < r$ , então a série  $\sum_{j=0}^N \sum_{|\alpha|=j} c_\alpha h^\alpha$  e todas as suas derivadas convergem uniformemente para  $u$  e suas respectivas derivadas para  $x+h \in B(x, \tilde{r})$ . Assim, concluímos que  $u$  é uma função de classe  $C^\infty$  e*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in B(x_0, \tilde{r})} \left| \partial_x^\alpha u(x_0 + h) - \partial_h^\alpha \left( \sum_{j=0}^N \sum_{|\alpha|=j} c_\alpha h^\alpha \right) \right| \right) = 0.$$

2) *As constantes  $c_\alpha$  correspondentes ao ponto  $x_0$  são dadas por  $c_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \partial_x^\alpha u(x_0)$ . Assim, a série  $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0} c_\alpha h^\alpha$  corresponde a série de Taylor de  $u$ :*

$$u(x_0 + h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} \partial_x^\alpha u(x_0) h^\alpha.$$

A proposição acima garante que toda função real analítica é de classe  $C^\infty$ . No entanto, o inverso não é verdadeiro.

EXEMPLO 174. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}.$$

Já vimos que a função acima é  $C^\infty$ . Além disso, mostramos que  $\frac{d^j f}{dt^j}(0) = 0$  para todo  $j \in \mathbb{N}_0$ . Assim,

1) Para qualquer  $r > 0$ , a série  $\sum_{j=0}^\infty \frac{1}{j!} \frac{d^j f}{dt^j}(0) h^j$  converge absolutamente para qualquer  $|h| < r$ . De fato, todos os termos da série são iguais a zero!

2) Para qualquer  $h > 0$ , a série  $\sum_{j=0}^\infty \frac{1}{j!} \frac{d^j f}{dt^j}(0) h^j$  converge, mas não para  $f(h)$ , já que  $f(h) > 0$  e  $\sum_{j=0}^\infty \frac{1}{j!} \frac{d^j f}{dt^j}(0) h^j = 0$ .

Concluímos assim, que a função acima não é real analítica, já que as condições da definição não valem para o ponto zero. Note, no entanto, que como a exponencial e  $t \mapsto \frac{1}{t}$  são real analíticas para  $t > 0$ , a função  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  é real analítica (retirando o zero de  $\mathbb{R}$ ).

Em geral nenhuma função  $C^\infty$  de suporte compacto é real analítica. Isto é consequência da Proposição abaixo.

PROPOSIÇÃO 175. *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto conexo e  $u : U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função real analítica. Se existem  $C \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in U$  e  $r > 0$  tais que  $B(x_0, r) \subset U$  e  $u(x) = C$  para todo  $x \in B(x_0, r)$ , então  $u$  é a função identicamente igual a constante  $C$  em todo o aberto  $U$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Vamos definir  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$  por  $v(x) = u(x) - C$ . Logo  $v$  é real analítica, já que  $u$  e uma constante são funções reais analíticas. A função  $v$  é igual a zero em  $B(x_0, r)$ .

Agora vamos definir

$$\mathcal{C} := \{x \in U; \partial^\alpha v(x) = 0 \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}.$$

**O conjunto  $\mathcal{C}$  não é vazio.**

De fato,  $B(x_0, r) \subset \mathcal{C}$ , pois se  $v$  é igual a zero na bola  $B(x_0, r)$ , então todas as suas derivadas são nulas nessa bola.

**O conjunto  $\mathcal{C}$  é fechado em  $U$ .**

De fato, se  $(x_k)$  é uma sequência em  $\mathcal{C}$  que converge para  $x \in U$ , concluímos, pela continuidade das derivadas, que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \partial^\alpha v(x_k) = \partial^\alpha v(x) \implies \partial^\alpha v(x) = 0, \text{ pois } \partial^\alpha v(x_k) = 0, \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

**O conjunto  $\mathcal{C}$  é aberto em  $U$ .**

Neste momento, o fato de que  $v$  é real analítica é crucial. De fato, seja  $x \in \mathcal{C}$ , então, já que  $v$  é real analítica, existe  $r > 0$  tal que em  $B(x, r)$  temos

$$v(x+h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha v(x) h^\alpha = 0.$$

Logo em  $B(x, r)$ , a função  $v$  é igual a zero. Portanto, todas as suas derivadas também são iguais a zero. Logo  $B(x, r) \subset \mathcal{C}$ .

Como  $\mathcal{C}$  é aberto, fechado em  $U$  e não vazio, e como  $U$  é conexo, concluímos que  $\mathcal{C} = U$ . Em particular,  $v(x) = 0$  para todo  $x \in U$  e  $u(x) = C$  para todo  $x \in U$ .  $\square$

**COROLÁRIO 176.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $u \in C_c^\infty(U)$ . Se  $u$  for real analítica, então  $u$  é identicamente igual a zero.*

**DEMONSTRAÇÃO.** Vamos inicialmente supor que  $U$  é um conjunto conexo. Neste caso, como  $K := \text{supp } u$  é um compacto em  $U$ , concluímos que  $U \setminus K$  é um aberto não vazio. Logo dado  $x_0 \in U \setminus K$ , existe  $r > 0$  tal que  $u|_{B(x_0, r)} = 0$ . Pela Proposição 175, a função  $u$  é identicamente igual a zero em todo  $U$ .

Se  $U$  não for um conjunto conexo, então basta aplicar o argumento anterior para cada componente conexa de  $U$ .  $\square$

Um fato interessante e muito útil para verificar se as funções são reais analíticas é o seguinte:

**PROPOSIÇÃO 177.** *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  e  $V \subset \mathbb{R}^m$  abertos. Considere as funções  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g = (g_1, \dots, g_n) : V \rightarrow U$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Suponha que  $u$  e  $g_j : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , sejam todas reais analíticas. Logo a função  $u \circ g : V \rightarrow \mathbb{R}$  também é real analítica.*

Por fim, é interessante notar a seguinte caracterização de funções reais analíticas.

**PROPOSIÇÃO 178.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Logo  $u$  é real analítica se, e somente se,  $u$  é uma função  $C^\infty$  e para cada compacto  $K \subset U$ , existem constantes  $r_K > 0$  e  $C_K > 0$  tais que*

$$|\partial^\alpha u(x)| \leq C_K r_K^{|\alpha|} \alpha!,$$

para todo  $x \in K$  e para todo  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ .

Vamos agora usar todos esses fatos para demonstrar o principal teorema da seção:

**TEOREMA 179.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função harmônica. Logo  $u$  é uma função real analítica.*

**DEMONSTRAÇÃO.** Seja  $x_0 \in U$  e  $R > 0$  tal que  $\overline{B(x_0, R)} \subset U$ . Logo, pelo Teorema 148, sabemos que

$$u(x) = \int_{\partial B(x_0, R)} \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{|\partial B(0, 1)| R |x - y|^n} u(y) dS(y).$$

A função  $K : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $K(x, y) = \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{|\partial B(0, 1)| R |x - y|^n}$  é real analítica, pois é composição de funções reais analíticas (raiz quadrada, elevar ao quadrado, elevar a  $n$ -ésima potência, divisão e etc.). Logo para o compacto  $K := \overline{B(x_0, \frac{R}{2})} \times \partial B(x_0, R)$ , existe  $C_K > 0$  e  $r_K > 0$  tais que

$$(4.4.3) \quad |\partial_{x,y}^\alpha K(x, y)| \leq C_K r_K^{|\alpha|} \alpha!,$$

para todo  $(x, y) \in K$  e para todo  $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2n}$ .

Usando série de Taylor na variável  $x$ , temos, para  $|h| < R$ , que

$$\begin{aligned}
u(x_0 + h) &= \int_{\partial B(x_0, R)} K(x_0 + h, y) u(y) dS(y) \\
&\stackrel{(1)}{=} \int_{\partial B(x_0, R)} \left( \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} \partial_x^\alpha K(x_0, y) h^\alpha \right. \\
&\quad \left. + \sum_{|\alpha|=N} \frac{N}{\alpha!} h^\alpha \int_0^1 (1-\theta)^{N-1} \partial_x^\alpha K(x_0 + \theta h, y) d\theta \right) d\theta u(y) dS(y) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{|\alpha|=j} \left( \int_{\partial B(x_0, R)} \frac{1}{\alpha!} \partial_x^\alpha K(x_0, y) u(y) dS(y) \right) h^\alpha \\
&\quad + \sum_{|\alpha|=N} \frac{N}{\alpha!} h^\alpha \int_{\partial B(x_0, R)} \left( \int_0^1 (1-\theta)^{N-1} \partial_x^\alpha K(x_0 + \theta h, y) d\theta \right) u(y) dS(y).
\end{aligned}$$

Vamos agora mostrar que para  $r = \min \left\{ \frac{1}{2nr_k}, \frac{R}{2} \right\}$  e  $c_\alpha = \int_{\partial B(x_0, R)} \frac{1}{\alpha!} \partial_x^\alpha K(x_0, y) u(y) dS(y)$ , temos todas as propriedades da Definição 170. Para tanto, iremos, a partir de agora, sempre assumir que  $|h| < r$ .

**Propriedade 1) da Definição 170:**

Para provar a convergência absoluta da série, seguimos os seguintes passos:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{|\alpha|=j} \left| \left( \int_{\partial B(x_0, R)} \frac{1}{\alpha!} \partial_x^\alpha K(x_0, y) u(y) dS(y) \right) \right| |h^\alpha| \\
&\leq \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{|\alpha|=j} \left( \int_{\partial B(x_0, R)} \frac{1}{\alpha!} |\partial_x^\alpha K(x_0, y)| |u(y)| dS(y) \right) |h|^{|\alpha|} \\
&\stackrel{(1)}{\leq} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} C_K \alpha! r^{|\alpha|} \|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, R))} |\partial B(x_0, R)| \left( \frac{1}{2nr_k} \right)^{|\alpha|} \\
&\leq C_K \|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, R))} |\partial B(x_0, R)| \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{|\alpha|=j} \left( \frac{1}{2nr_k} \right)^j \\
&\stackrel{(2)}{\leq} C_K \|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, R))} |\partial B(x_0, R)| \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{2^j} < \infty
\end{aligned}$$

Em (1) usamos a Equação 4.4.3 e  $|h| \leq \frac{1}{2nr_k}$ . Em (2), usamos a Equação 4.4.2.

**Propriedade 2) da Definição 170:**

Para provar a convergência da série, basta mostrar que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|\alpha|=N} \frac{N}{\alpha!} h^\alpha \int_{\partial B(x_0, R)} \left( \int_0^1 (1-\theta)^{N-1} \partial_x^\alpha K(x_0 + \theta h, y) d\theta \right) u(y) dS(y) = 0.$$

De fato, temos

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{|\alpha|=N} \frac{N}{\alpha!} h^\alpha \int_{\partial B(x_0, R)} \left( \int_0^1 (1-\theta)^{N-1} \partial_x^\alpha K(x_0 + \theta h, y) d\theta \right) u(y) dS(y) \right| \\
& \stackrel{(1)}{\leq} \sum_{|\alpha|=N} \frac{N}{\alpha!} |h|^{|\alpha|} |\partial B(x_0, R)| C_K \alpha! r_K^{|\alpha|} \|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, R))} \\
& \leq C_K |\partial B(x_0, R)| N \|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, R))} \sum_{|\alpha|=N} (|h| r_k)^{|\alpha|} \\
& \stackrel{(2)}{\leq} C_K |\partial B(x_0, R)| N \left( \frac{1}{2n} \right)^N \|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, R))} \sum_{|\alpha|=N} 1 \\
& \stackrel{(3)}{\leq} C_K |\partial B(x_0, R)| N \left( \frac{1}{2} \right)^N \|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, R))}
\end{aligned}$$

Novamente, em (1) usamos a Equação 4.4.3 que é válida, pois  $x_0 + \theta h \in B(x_0, \frac{R}{2})$ . Em (2) usamos que  $|h| \leq \frac{1}{2nr_k}$ . Em (3), usamos a Equação 4.4.2. Como  $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^N N = 0$ , obtemos o resultado.  $\square$

Vamos tentar interpretar uma das consequências desse teorema. Suponha que um corpo seja representado por um conjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$  conexo. Se este corpo estiver em equilíbrio térmico, então a sua temperatura é uma função harmônica  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Assim, pelo Teorema 179, a temperatura é uma função real analítica.

Concluimos assim, que se existe uma bola  $B(x_0, r) \subset U$  na qual a temperatura é constante, então a temperatura será constante em todo aberto  $U$ , pelo Teorema 175. Portanto, ou a temperatura “está sempre mudando em  $U$ ” (não é constante em nenhuma bola aberta dentro de  $U$ ) ou a temperatura é constante em  $U$ .

#### Referências:

Fritz John  
Folland

### 4.5. Princípio variacional

Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$ . Vamos considerar novamente o seguinte problema de Poisson com condições de Dirichlet:

$$(4.5.1) \quad \begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x), & x \in U \\ u(x) &= g(x), & x \in \partial U \end{aligned} ,$$

em que  $f \in C(\bar{U})$  e  $g \in C(\partial U)$ .

Vamos começar com uma nova demonstração de unicidade do problema acima.

**TEOREMA 180.** *Existe no máximo uma solução  $u \in C^2(\bar{U})$  do problema acima.*

Note que o Teorema acima não prova existência de soluções. Apenas unicidade, caso existam. O problema de existência é delicado. Podemos sim afirmar que existe uma função que pode ser considerada uma solução do problema acima, mas essa função não precisa necessariamente estar em  $C^2(\bar{U})$ . Por essa razão, ao discutir soluções somos levados a considerar outras funções e distribuições como funções Hölder contínuas e espaços de Sobolev, que não serão tratadas neste livro.

**DEMONSTRAÇÃO.** Suponha que  $u$  e  $\bar{u}$  sejam soluções do problema e pertençam a  $C^2(\bar{U})$ . Seja  $w := u - \bar{u}$ . Logo

$$\begin{aligned} -\Delta w(x) &= -\Delta u(x) + \Delta \bar{u}(x) = f(x) - f(x) = 0, & x \in U \\ w(x) &= u(x) - \bar{u}(x) = g(x) - g(x) = 0, & x \in \partial U \end{aligned} .$$

Lembramos que a primeira identidade de Green nos diz que se  $v_1$  e  $v_2$  pertencem a  $C^2(\bar{U})$ , então

$$\int_U \nabla v_1(x) \cdot \nabla v_2(x) dx = - \int_U v_1(x) \Delta v_2(x) dx + \int_{\partial U} v_1(x) \frac{\partial v_2}{\partial \nu}(x) dS(x).$$

Assim, para  $v_1 = v_2 = w$ , temos

$$\int_U |\nabla w(x)|^2 dx = - \int_U w(x) \Delta w(x) dx + \int_{\partial U} w(x) \frac{\partial w}{\partial \nu}(x) dS(x) = 0.$$

Como  $x \mapsto |\nabla w(x)|^2$  é uma função contínua e positiva cuja integral é igual a zero, concluímos que  $\nabla w(x) = 0$  para todo  $x \in U$ . Assim,  $w$  é uma constante em cada componente conexa de  $U$ . Como  $w(x) = 0$  para  $x \in \partial U$ , concluímos que  $w \equiv 0$  e, portanto,  $u = \bar{u}$ .  $\square$

**OBSERVAÇÃO 181.** A demonstração acima é uma alternativa da prova de unicidade que foi dada usando o princípio do máximo. No entanto, aqui assumimos mais regularidade de  $U$  do que antes: agora precisamos que  $U$  seja de classe  $C^2$ . Também exigimos mais regularidade de  $u$  do que antes: aqui precisamos que  $u \in C^2(\bar{U})$ , ou seja, que as derivadas de ordem menor ou igual a 2 tenham extensões contínuas em  $\bar{U}$ . Na demonstração de unicidade anterior, assumimos apenas que  $u \in C(\bar{U}) \cap C^2(U)$ , ou seja, não exigíamos extensões contínuas das derivadas de  $u$ .

A demonstração acima mostra a importância de integrais do tipo

$$\int_U |\nabla u(x)|^2 dx$$

para o estudo do Laplaciano. O estudo dessas integrais nos leva ao princípio de Dirichlet:

**TEOREMA 182.** (*Princípio de Dirichlet*) Considere a função  $\mathcal{I} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  definida em

$$\mathcal{A} = \{u \in C^2(\bar{U}); u|_{\partial U} = g\}$$

e dada como

$$\mathcal{I}(u) = \int_U \left( \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - u(x)f(x) \right) dx.$$

- 1) Se  $u \in C^2(\bar{U})$  é uma solução de 4.5.1, então  $\mathcal{I}(u) = \min_{w \in \mathcal{A}} \mathcal{I}(w)$ .
- 2) Se  $u \in \mathcal{A}$  é tal que  $\mathcal{I}(u) = \min_{w \in \mathcal{A}} \mathcal{I}(w)$ , então  $u$  é uma solução de 4.5.1.

**OBSERVAÇÃO 183.** Atenção! Acima nada é dito sobre a existência do mínimo! Assim, o princípio acima não pode ser usado para provar a existência. É possível, no entanto, trabalhar com outras classes de funções (espaços de Sobolev) e usar funções semelhantes a  $\mathcal{I}$  para provar existência de soluções.

**DEMONSTRAÇÃO.** 1) Suponha que  $u \in C^2(\bar{U})$  seja uma solução de 4.5.1. Logo se  $w \in \mathcal{A}$ , então  $u(x) - w(x) = 0$  para  $x \in \partial U$  e

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(1)}{=} \int_U (-\Delta u(x) - f(x)) (u(x) - w(x)) dx \\ &= \int_U -\Delta u(x) (u(x) - w(x)) - f(x) (u(x) - w(x)) dx \\ &\stackrel{(2)}{=} - \int_{\partial U} (u(x) - w(x)) \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} dS(x) + \int_U \nabla u(x) \cdot (\nabla u(x) - \nabla w(x)) - f(x) (u(x) - w(x)) dx \\ &\stackrel{(3)}{=} \int_U \nabla u(x) \cdot (\nabla u(x) - \nabla w(x)) - f(x) (u(x) - w(x)) dx. \end{aligned}$$

Em (1) usamos que  $-\Delta u(x) = f(x)$ . Em (2) usamos a primeira identidade de Green. Em (3) usamos que  $u(x) = w(x)$  em  $\partial U$ . Assim, temos

$$\begin{aligned} & \int_U \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) - f(x)u(x) dx \\ &= \int_U \nabla u(x) \cdot \nabla w(x) - f(x)w(x) dx \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \frac{1}{2} \int_U |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_U |\nabla w(x)|^2 dx - \int_U f(x)w(x) dx. \end{aligned}$$

Em (1), usamos que

$$\nabla u(x) \cdot \nabla w(x) \stackrel{(1)}{\leq} |\nabla u(x)| |\nabla w(x)| \stackrel{(2)}{\leq} \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + \frac{1}{2} |\nabla w(x)|^2,$$

em que (1) usamos Cauchy-Schwartz e em (2) usamos que

$$(a - b)^2 \geq 0 \iff a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \iff ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Portanto, temos

$$\int_U \left( \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - f(x)u(x) \right) dx \leq \int_U \left( \frac{1}{2} |\nabla w(x)|^2 dx - f(x)w(x) \right) dx.$$

Logo

$$\mathcal{I}(u) \leq \mathcal{I}(w),$$

para todo  $w \in \mathcal{A}$ . Assim,  $u$  é o mínimo valor de  $\mathcal{I}$ .

2) Seja  $v \in C_c^2(U)$  e  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $h(t) = \mathcal{I}(u + tv)$ . Por hipótese  $u$  é um mínimo de  $\mathcal{I}$ . Vemos que  $u + tv \in \mathcal{A}$ , já que  $v$  se anula em  $\partial U$ , por ter suporte compacto em  $U$ , e  $u$  ser igual a  $w$ , por pertencer a  $\mathcal{A}$ . Assim, concluímos que

$$h(0) = \mathcal{I}(u) \leq \mathcal{I}(u + tv) = h(t).$$

Assim, vemos que 0 é um ponto de mínimo local (e global) de  $h$ . Se  $h$  for derivável, isto implica que  $\frac{dh}{dt}(0) = 0$ . Note que

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{I}(u + tv) = \int_U \left( \frac{1}{2} |\nabla(u(x) + tv(x))|^2 - (u(x) + tv(x))f(x) \right) dx \\ &= \int_U \left( \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + \frac{1}{2} t^2 |\nabla v(x)|^2 + t \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) - u(x)f(x) - tv(x)f(x) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} t^2 \int_U |\nabla v(x)|^2 dx + t \int_U (\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - v(x)f(x)) dx + \frac{1}{2} \int_U |\nabla u(x)|^2 dx - \int_U u(x)f(x) dx. \end{aligned}$$

A função  $h$  é um polinômio. Logo ela é de classe  $C^\infty$ . Calculando sua derivada, obtemos

$$\frac{dh}{dt}(t) = \int_U \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + t |\nabla v(x)|^2 - v(x)f(x) dx$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt}(0) &= \int_U (\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) - v(x)f(x)) dx \\ &\stackrel{(1)}{=} - \int_U (\Delta u(x) + f(x)) v(x) dx + \int_{\partial U} v(x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) dS(x) \\ &\stackrel{(2)}{=} - \int_U (\Delta u(x) + f(x)) v(x) dx. \end{aligned}$$

Em (1) usamos a primeira identidade de Green. Em (2) usamos que  $v$  tem suporte compacto em  $U$ . Logo  $v$  se anula em  $\partial U$ .

Concluimos que, se  $u$  é o mínimo, então

$$\int_U (\Delta u(x) + f(x)) v(x) dx = 0,$$

para todo  $v \in C_c^\infty(U)$ , ou seja,  $\Delta u + f$  é igual a zero no sentido de distribuições. Como  $\Delta u + f$  é contínua, concluimos que  $-\Delta u = f$ . Como  $u \in \mathcal{A}$ , temos que  $u(x) = g(x)$  para todo  $x \in \partial U$ . Assim, temos que  $u$  é solução de 4.5.1.  $\square$

**Referências:**

Evans

## Transformada de Fourier

### 5.1. Motivação

Uma importante ferramenta no estudo de equações diferenciais parciais é a transformada de Fourier. Vamos motivá-la através de um problema simples.

Seja  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  um polinômio que não se anula, ou seja,

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha x^\alpha \text{ e } P(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

em que  $a_\alpha \in \mathbb{C}$ . Assim, dado  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , vamos supor que queremos resolver a seguinte equação

$$P(x)u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Esta equação é trivial! De fato,  $u$  será dado por

$$u(x) = P(x)^{-1}f(x).$$

Agora vamos considerar uma equação diferencial com coeficientes constantes

$$(5.1.1) \quad P(D)u(x) = f(x),$$

em que  $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ . Assim, vemos que  $P(\partial)$  é um “polinômio” nas derivadas. Portanto, ingenuamente poderíamos dizer que

$$u(x) = P(D)^{-1}f(x).$$

Mas afinal, o que quer dizer  $P(D)^{-1}$ ?

Um exemplo bem simples é dado por  $P(D) = I - \Delta$ . Neste caso, para resolver

$$u(x) - \Delta u(x) = f(x),$$

devemos achar

$$u(x) = (I - \Delta)^{-1}f(x).$$

O que veremos a seguir é uma forma de transformar  $P(D)$  em um polinômio. Com isto, conseguiremos interpretar  $P(D)^{-1}$  e resolver a Equação (5.1.1). O que permitirá fazer essa transformação é justamente a transformada de Fourier.

#### Referências para todo o capítulo:

Evans  
 Folland (EDP e o livro de Fourier Analysis)  
 Grubb  
 Djairo

### 5.2. Definição de Transformada de Fourier

Vamos agora definir a transformada de Fourier. Para tanto vamos usar uma classe de funções que permite fazer os cálculos com tranquilidade (podemos derivar, passar derivadas para dentro de integrais e etc). Usaremos a classe de Schwartz (o mesmo Schwartz das distribuições! De fato, essas classes de funções permitem estender para determinadas distribuições os conceitos que veremos).

Note que ao trabalhar com transformada de Fourier, iremos trabalhar com funções com valores complexos. Isso torna o estudo muito mais fácil, mesmo quando estamos interessados apenas em equações com coeficientes reais.

DEFINIÇÃO 184. O conjunto  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  das funções de Schwartz corresponde ao conjunto das funções  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $C^\infty$  tais que

$$\|x^\alpha \partial^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty,$$

para todo  $\alpha$  e  $\beta$  em  $\mathbb{N}_0^n$ .

É fácil observar que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  é um espaço vetorial complexo. De fato, se  $f_1$  e  $f_2$  pertencem a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  e  $\alpha$  e  $\beta$  são números complexos, então

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x))| \\ & \leq |\alpha| \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f_1(x)| + |\beta| \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f_2(x)| < \infty. \end{aligned}$$

Vamos ver agora alguns exemplos.

EXEMPLO 185. Toda função  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , ou seja,  $C^\infty$  e de suporte compacto, é uma função no espaço de Schwartz, ou seja,  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . De fato  $x^\alpha \partial^\beta f$  é uma função contínua (na verdade  $C^\infty$ ) e também tem suporte compacto. Portanto é limitada.

EXEMPLO 186. A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(x) = e^{-\alpha x^2}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$ , é uma função de Schwartz. De fato, podemos provar por indução que, para cada  $k \in \mathbb{N}_0$ , existe um polinômio  $P_k$  tal que

$$\frac{d^k}{dx^k} e^{-\alpha x^2} = P_k(x) e^{-\alpha x^2},$$

em que  $P_k$  é um polinômio em  $x$ . Como  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^j e^{-\alpha x^2} = 0$ , concluímos que

$$x^l \frac{d^k}{dx^k} e^{-\alpha x^2}$$

é limitado para todo  $k, l \in \mathbb{N}_0$ .

EXEMPLO 187. Sejam  $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  funções em  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Logo a função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  definida abaixo também é de Schwartz:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n).$$

Isto é verdadeiro, já que

$$x^\alpha \partial^\beta f(x) = (x_1^{\alpha_1} \partial_{x_1}^{\beta_1} f_1(x_1)) \dots (x_n^{\alpha_n} \partial_{x_n}^{\beta_n} f_n(x_n))$$

é uma multiplicação de funções limitadas. Portanto é limitada.

EXEMPLO 188. Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(x) = e^{-|x|^2} = e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)} = e^{-x_1^2} \dots e^{-x_n^2}$ . Logo  $f$  é uma função de Schwartz. Isto segue dos Exemplos 186 e 187.

Note que essas funções são fechadas por multiplicação por polinômios e por derivação. Antes vamos recordar a regra de Leibniz.

PROPOSIÇÃO 189. Sejam  $f$  e  $g$  duas funções de classe  $C^m$ , em que  $m \in \mathbb{N}_0$ . Se  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ,  $|\alpha| \leq m$ , então

$$\partial^\alpha (f(x)g(x)) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f(x) \partial^{\alpha-\beta} g(x),$$

em que  $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta! (\alpha-\beta)!} = \frac{\alpha_1! \dots \alpha_n!}{\beta_1! \dots \beta_n! (\alpha_1 - \beta_1)! \dots (\alpha_n - \beta_n)!}$ .

PROPOSIÇÃO 190. Seja  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Logo  $x \mapsto x^\delta f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  e  $x \mapsto \partial^\delta f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  para todo  $\delta$  em  $\mathbb{N}_0^n$ .

DEMONSTRAÇÃO. Vamos começar com a derivada por  $\partial^\delta$ . Isto é simples. De fato, se  $\delta \in \mathbb{N}_0^n$ , então temos  $x^\alpha \partial^\beta \partial^\delta f(x) = x^\alpha \partial^{\beta+\delta} f(x)$  e, portanto,  $x \mapsto x^\alpha \partial^\beta \partial^\delta f(x)$  é limitada.

Para a multiplicação por  $x^\delta$ , observamos que

$$x^\alpha \partial^\beta (x^\delta f(x)) = \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} x^\alpha \partial^\gamma (x^\delta) \partial^{\beta-\gamma} f(x) \stackrel{(1)}{=} \sum_{\gamma \leq \beta, \gamma \leq \delta} \frac{\delta! \beta!}{\gamma! (\beta-\gamma)! (\delta-\gamma)!} x^{\alpha+\delta-\gamma} \partial^{\beta-\gamma} f(x),$$

em que usamos em (1) que  $\partial^\gamma (x^\delta) = \frac{\delta!}{(\delta-\gamma)!} x^{\delta-\gamma}$  e é igual a zero se  $\gamma \leq \delta$  não for válido (ou seja, existir  $\gamma_j > \delta_j$  para algum  $j \in \{1, \dots, n\}$ ). Como as funções  $x \mapsto x^{\alpha+\delta-\gamma} \partial^{\beta-\gamma} f(x)$  são limitadas, concluímos que a expressão acima é limitada para todo  $\alpha$  e  $\beta$  em  $\mathbb{N}_0^n$ .  $\square$

A proposição acima nos leva a seguinte conclusão. De maneira intuitiva,  $f$  é uma função de Schwartz, ou seja,  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , se, e somente se,  $f$  é uma função  $C^\infty$  limitada que podemos derivar e multiplicar por polinômios quantas vezes nós quisermos (claro, desde que finitas vezes) e a função ainda continua limitada.

Uma das características da função de Schwartz é que podemos sempre integrá-la em  $\mathbb{R}^n$ .

PROPOSIÇÃO 191. *Seja  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Logo  $f$  é integrável, ou seja,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty.$$

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que  $(1 + |x|^2)^n f(x)$  é a soma de um polinômio vezes  $f$ . Assim,  $f$  é uma função de Schwartz pela Proposição 190 e, portanto, é uma função limitada. Logo existe  $C > 0$  tal que

$$|f(x)| \leq C (1 + |x|^2)^{-n}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B(0,R)} |f(x)| dx \leq C \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B(0,R)} (1 + |x|^2)^{-n} dx \\ &\stackrel{(1)}{=} C \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (1 + |rz|^2)^{-n} r^{n-1} dr dS(z) \stackrel{(2)}{=} C \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (1 + r^2)^{-n} r^{n-1} dr dS(z) \\ &= C |\mathbb{S}^{n-1}| \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^n} dr = C |\mathbb{S}^{n-1}| \int_0^1 \frac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^n} dr \\ &\quad + C |\mathbb{S}^{n-1}| \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^n} dr < \infty, \end{aligned}$$

em que usamos em (1) usamos o item 3 do Lema 37. Em (2), usamos que  $|z| = 1$ , já que  $z \in \mathbb{S}^{n-1}$ . A última desigualdade se deve ao fato de que

$$\int_1^\infty \frac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^n} dr \leq \int_1^\infty \frac{r^{n-1}}{r^{2n}} dr \leq \int_1^\infty r^{-n-1} dr = \frac{r^{-n}}{-n} \Big|_1^\infty = \frac{1}{n} < \infty.$$

$\square$

Como a função  $f$  é integrável, podemos definir a transformada de Fourier da maneira abaixo.

DEFINIÇÃO 192. Seja  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . A transformada de Fourier de  $f$  é a função  $\mathcal{F}f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  definida como

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx,$$

em que  $x\xi := x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n$ .

Também usaremos a notação  $\hat{f} := \mathcal{F}(f)$ .

A transformada de Fourier está sempre bem definida, já que

$$|\mathcal{F}f(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty.$$

OBSERVAÇÃO 193. Existem diversas outras convenções para a transformada de Fourier. Os resultados da teoria são sempre os mesmos. No entanto, podem aparecer diferentes constantes nas fórmulas. Algumas outras convenções são:

- 1)  $\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx$  usada pelo Evans e por livros de física.
- 2)  $\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i2\pi x\xi} f(x) dx$  usada pelo Stein e alguns livros de análise harmônica (e EDP também).
- 2)  $\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(x) dx$  usada por alguns livros russos.

EXEMPLO 194. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Vamos usar a notação  $\hat{f}$  para a transformada de Fourier. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) &= \frac{d}{d\xi} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) = \int_{-\infty}^{\infty} -ix e^{-ix\xi} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \frac{d}{dx} \left( e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} i \int_{-R}^R e^{-ix\xi} \frac{d}{dx} \left( e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( i e^{-ix\xi} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-R}^R \right) - \lim_{R \rightarrow \infty} i \int_{-R}^R \frac{d}{dx} \left( e^{-ix\xi} \right) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &\stackrel{(1)}{=} -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} \left( e^{-ix\xi} \right) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\xi \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Em (1), usamos o fato de que a função  $x \mapsto e^{-ix\xi} e^{-\frac{x^2}{2}}$  vai a zero quando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Observe que obtemos uma equação diferencial da forma

$$\frac{d\hat{f}}{d\xi}(\xi) = -\xi \hat{f}(\xi).$$

Para resolvê-la, vamos integrar tudo de 0 a  $\xi$  da seguinte forma:

$$\int_0^\xi \frac{\hat{f}'(s)}{\hat{f}(s)} ds = - \int_0^\xi s ds.$$

Fazendo a mudança de variável  $y = \hat{f}(s)$ , temos  $dy = \hat{f}'(s) ds$ . Assim

$$\int_{\hat{f}(0)}^{\hat{f}(\xi)} \frac{dy}{y} = - \int_0^\xi s ds \implies \ln \left( \frac{\hat{f}(\xi)}{\hat{f}(0)} \right) = -\frac{\xi^2}{2} \implies \hat{f}(\xi) = \hat{f}(0) e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Basta agora calcular  $\hat{f}(0)$ . Isso pode ser calculado facilmente. De fato,

$$\begin{aligned} \hat{f}(0)^2 &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} dx dy \stackrel{(1)}{=} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} r dr \right) d\theta \\ &= 2\pi \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} r dr = -2\pi e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^\infty = 2\pi. \end{aligned}$$

Em (1), usamos a mudança de variável:  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$  e  $dx dy = r dr d\theta$ .

Concluimos que  $\hat{f}(0) = \sqrt{2\pi}$  e que

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

OBSERVAÇÃO 195. Acima calculamos a integral da função gaussiana. Esta importante integral será usada diversas vezes aqui. Uma pequena mudança de variável permite obter o seguinte resultado para  $a > 0$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

EXEMPLO 196. Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  a função dada por  $f(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ . Logo  $\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$ . De fato, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1\xi_1} e^{-\frac{x_1^2}{2}} dx_1 \right) \dots \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_n\xi_n} e^{-\frac{x_n^2}{2}} dx_n \right) \\ &= \left( \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi_1^2}{2}} \right) \dots \left( \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi_n^2}{2}} \right) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}. \end{aligned}$$

### 5.3. Propriedades básicas

Vamos agora enunciar algumas propriedades básicas da transformada de Fourier que serão úteis para aplicações. Aqui nos restringiremos a algumas propriedades simples que podem ser obtidas praticamente de forma direta a partir da definição da transformada.

Usaremos as seguintes notações: Seja  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $v \in \mathbb{R}^n$  e  $\delta > 0$ . Definimos  $T_v g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  e  $M_\delta g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$\begin{aligned} T_v f(x) &= f(x - v) \\ M_\delta f(x) &= f(\delta x) \end{aligned}$$

Usaremos a seguir a notação  $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  para o vetor com 1 na  $j$ -ésima casa e zero nas outras.

PROPOSIÇÃO 197. *A transformada de Fourier possui as seguintes propriedades:*

P1) *Seja  $a \in \mathbb{R}$  e  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Logo*

$$\mathcal{F}(T_{ae_j} f)(\xi) = e^{-ia\xi_j} \hat{f}(\xi) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}(e^{iax_j} f) = T_{ae_j} \hat{f}(\xi).$$

P2) *Se  $\delta > 0$ , então*

$$\mathcal{F}(M_\delta f) = \frac{1}{\delta^n} M_{\frac{1}{\delta}} \hat{f}.$$

P3) *Para todo  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ , temos*

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi).$$

P4) *Para todo  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ , temos*

$$i^{|\alpha|} \partial_\xi^\alpha \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(x^\alpha f)(\xi).$$

DEMONSTRAÇÃO. P1) Vemos que

$$\mathcal{F}(T_{ae_j} f) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x - ae_j) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x+ae_j)\xi} f(x) dx = e^{-ia\xi_j} \hat{f}(\xi),$$

$$\mathcal{F}(e^{iax_j} f) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} e^{iax_j} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix(\xi - ae_j)} f(x) dx = \hat{f}(\xi - ae_j).$$

P2) Novamente usando mudança de coordenadas, temos

$$\mathcal{F}(M_\delta f) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(\delta x) dx = \frac{1}{\delta^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\frac{x}{\delta}\xi} f(x) dx = \frac{1}{\delta^n} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\delta}\right).$$

P3) Vamos provar para  $|\alpha| = 1$ . Neste caso, temos

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}(\partial_{x_j} f)(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \partial_{x_j} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B(0,R)} e^{-ix\xi} \partial_{x_j} f(x) dx \\
&\stackrel{(1)}{=} - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B(0,R)} \partial_{x_j} (e^{-ix\xi}) f(x) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B(0,R)} e^{-ix\xi} f(x) \nu_j dx \\
&= i\xi_j \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B(0,R)} e^{-ix\xi} f(x) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B(0,R)} e^{-ix\xi} f(x) \nu_j dx \\
&= i\xi_j \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B(0,R)} e^{-ix\xi} f(x) \nu_j dx
\end{aligned}$$

Em (1) usamos o teorema da divergência: Equação (2.5.6).

Vamos observar agora que

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\partial B(0,R)} e^{-ix\xi} f(x) \nu_j dx \right| \\
&\leq \int_{\partial B(0,R)} |f(x)| dx \leq C \int_{\partial B(0,R)} (1 + |x|^2)^{-n} dx \\
&\stackrel{(1)}{=} C \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (1 + R^2)^{-n} R^{n-1} dx = C |\mathbb{S}^{n-1}| \frac{R^{n-1}}{(1 + R^2)^n}.
\end{aligned}$$

Em (1), usamos o item 1 do Lema 37.

Como  $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^{n-1}}{(1+R^2)^n} = 0$ , concluímos que  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B(0,R)} e^{-ix\xi} f(x) \nu_j dx = 0$ . Assim

$$\mathcal{F}(\partial_{x_j} f)(\xi) = i\xi_j \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx = i\xi_j \mathcal{F}(f)(\xi).$$

Por indução, é simples concluir que

$$\mathcal{F}(\partial_x^\alpha f)(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi).$$

P4) Basta observar que

$$\begin{aligned}
& i^{|\alpha|} \partial_\xi^\alpha \hat{f}(\xi) \\
&= i^{|\alpha|} \partial_\xi^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx = i^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_\xi^\alpha (e^{-ix\xi}) f(x) dx \\
&= i^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} (-i)^{|\alpha|} x^\alpha e^{-ix\xi} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha e^{-ix\xi} f(x) dx \\
&= \mathcal{F}(x^\alpha f).
\end{aligned}$$

□

As propriedades P3) e P4) são muito importantes. Elas mostram que a transformada de Fourier transforma multiplicação por  $x$  em uma derivada. Por outro lado, transforma derivadas em multiplicação por  $\xi$ .

Por fim, é importante destacar também a linearidade da transformada de Fourier.

**PROPOSIÇÃO 198.** *Seja  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Logo  $\mathcal{F}f$  também pertence a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Além disso, a transformada de Fourier  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  define uma transformação linear, ou seja, para quaisquer  $\alpha$  e  $\beta$  pertencentes a  $\mathbb{C}$ ,  $f$  e  $g$  pertencentes a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , temos*

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g).$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Vamos começar mostrando que  $\mathcal{F}f$  também pertence a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

$$\begin{aligned} & i^{|\alpha+\beta|} \xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}(f)(\xi) \\ &= i^{|\alpha+\beta|} \xi^\alpha \partial_\xi^\beta \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx \right) \stackrel{(1)}{=} i^{|\alpha|} \xi^\alpha \left( \int_{\mathbb{R}^n} x^\beta e^{-ix\xi} f(x) dx \right) \\ & \stackrel{(2)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \partial^\alpha (x^\beta f(x)) dx \stackrel{(3)}{=} \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \partial^\gamma (x^\beta) \partial^{\alpha-\gamma} f(x) dx. \end{aligned}$$

Usamos as propriedades  $P3$  e  $P4$  da Proposição 197 em (1) e (2) e a regra de Leibniz, Proposição 189, em (3).

Assim

$$\left| \xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}(f)(\xi) \right| = \left| i^{|\alpha+\beta|} \xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}(f)(\xi) \right| \leq \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\gamma (x^\beta) \partial^{\alpha-\gamma} f(x)| dx < \infty,$$

já que  $\partial^\gamma (x^\beta) \partial^{\alpha-\gamma} f(x)$  é uma função de Schwartz, pela Proposição 190 e as funções de Schwartz são integráveis pela Proposição 191.

Para verificar a linearidade, basta usar a linearidade da integral:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\alpha f + \beta g)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} (\alpha f(x) + \beta g(x)) d\xi \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) d\xi + \beta \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} g(x) d\xi = \alpha \mathcal{F}f(\xi) + \beta \mathcal{F}g(\xi). \end{aligned}$$

□

**5.3.1. Voltando a nossa motivação.** Com os resultados acima já podemos avançar no problema que usamos como motivação: Dado  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , ache  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  que resolve

$$P(D)u(x) = f(x),$$

em que  $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ . Vamos supor que  $f$  seja uma função de Schwartz. Logo, aplicando a transformada de Fourier na equação acima, obtemos

$$\mathcal{F}(P(D)u) = \mathcal{F}(f).$$

Assim,

$$\mathcal{F}\left(\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha u\right) = \hat{f}(\xi) \iff \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi).$$

Suponha que  $\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (i\xi)^\alpha \neq 0$  para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Assim, temos que

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (i\xi)^\alpha}.$$

Em particular, no exemplo

$$u(x) - \Delta u(x) = f(x),$$

temos que

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{1 + |\xi|^2}.$$

Nos exemplos acima, fomos capazes de determinar  $\hat{u}$ . Para terminar de resolver esse problema, devemos saber como obter  $u$  através de  $\hat{u}$ . Isto é o que será investigado a seguir.

### 5.3.2. Exercícios.

EXERCÍCIO 199. (Djairo. 6, ex.2.4) Mostre que se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  é uma função par, ou seja,  $f(x) = f(-x)$ , então a sua transformada de Fourier  $\hat{f}$  é uma função que assume apenas valores reais, ou seja,  $\hat{f}(\xi) \in \mathbb{R}$ , para todo  $\xi \in \mathbb{R}$ .

EXERCÍCIO 200. (Djairo. 6, ex.2.5) Mostre que se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função ímpar, ou seja,  $f(x) = -f(-x)$ , então a sua transformada de Fourier  $\hat{f}$  é uma função que assume apenas valores imaginários puros, ou seja,  $\hat{f}(\xi)$  é um imaginário puro para todo  $\xi \in \mathbb{R}$ .

EXERCÍCIO 201. (Djairo. 6, ex.2.7) Seja  $\mathcal{F}$  a transformada de Fourier. Mostre que:

i)  $\mathcal{F}(f(-x))(\xi) = \mathcal{F}(f)(-\xi)$ .

ii)  $\mathcal{F}(f(x))(\xi) = \overline{\mathcal{F}(f)(-\xi)}$ .

EXERCÍCIO 202. (Djairo. 3.3, ex.2.10) Mostre que

i)  $\mathcal{F}(f(x) \cos(x)) = \frac{1}{2} (\hat{f}(\xi - c) + \hat{f}(\xi + c))$ .

ii)  $\mathcal{F}(f(x) \sin(x)) = \frac{1}{2i} (\hat{f}(\xi - c) - \hat{f}(\xi + c))$ .

### 5.4. Inversa da Transformada de Fourier e fórmula de Plancherel

Vimos anteriormente que a transformada de Fourier leva multiplicação por polinômios em derivadas e derivadas em multiplicação por polinômios. Leva multiplicação por exponenciais imaginárias em translações e translações em exponenciais imaginárias.

Isso nos dá uma dica de como escrever  $u$  através de  $\hat{u}$ . Parece que, de alguma maneira, quando aplicamos duas vezes a transformada de Fourier, “voltamos ao mesmo lugar”. Assim, parece que a transformada de Fourier inversa é a própria transformada.

Isso não é verdadeiro. No entanto, como veremos abaixo, de fato a fórmula de inversão é muito semelhante a fórmula da transformada de Fourier.

### 5.5. Fórmula de inversão

O nosso principal teorema dessa seção é o seguinte:

TEOREMA 203. *A transformada de Fourier  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  é um isomorfismo (ou seja, uma transformação linear bijetora). A sua inversa  $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  é dada por*

$$(5.5.1) \quad \mathcal{F}^{-1} f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(\xi) d\xi.$$

Note que a fórmula acima é muito semelhante a transformada de Fourier. A diferença é o sinal positivo na exponencial e no termo  $\frac{1}{(2\pi)^n}$ . Assim, vemos que

$$(5.5.2) \quad \mathcal{F}^{-1} f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F} f(-x) \iff \mathcal{F} f(x) = (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1} f(-x).$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $\epsilon > 0$ . Logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{-\frac{\epsilon^2}{2}|\xi|^2} e^{ix\xi} d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi} f(y) dy \right) e^{-\frac{\epsilon^2}{2}|\xi|^2} e^{ix\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\epsilon^2}{2}|\xi|^2} e^{-i\xi(y-x)} d\xi \right) f(y) dy, \end{aligned}$$

em que usamos Fubini na última igualdade (troca da ordem de integrações).

Na expressão acima, vemos a importância do termo  $e^{-\frac{\epsilon^2}{2}|\xi|^2}$ . Se não colocarmos ele, a integral  $\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi(x-y)} d\xi$  sequer está bem definida.

Note que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\epsilon^2}{2}|\xi|^2} e^{-i\xi(y-x)} d\xi = \mathcal{F} \left( e^{-\frac{\epsilon^2}{2}|\xi|^2} \right) (y-x).$$

Sabemos, pelo Exemplo 196, que

$$\mathcal{F}\left(e^{-\frac{|x|^2}{2}}\right)(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}.$$

Vimos no item P2) da Proposição 197 que  $\mathcal{F}(M_\delta f)(\xi) = \frac{1}{\delta^n} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\delta}\right)$ . Assim

$$\mathcal{F}\left(e^{-\frac{|\epsilon x|^2}{2}}\right)(\xi) = \left(\frac{2\pi}{\epsilon^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2\epsilon^2}}.$$

Portanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\epsilon^2|\xi|^2}{2}} e^{-i\xi(y-x)} d\xi = \mathcal{F}\left(e^{-\frac{\epsilon^2|\xi|^2}{2}}\right)(y-x) = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\epsilon^n} e^{-\frac{|y-x|^2}{2\epsilon^2}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{-\frac{\epsilon^2}{2}|\xi|^2} e^{i\xi x} d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\epsilon^2|\xi|^2}{2}} e^{-i\xi(y-x)} d\xi \right) f(y) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi\epsilon^2)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y-x|^2}{2\epsilon^2}} f(y) dy \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|z|^2}{2}} f(x+\epsilon z) dz. \end{aligned}$$

em que (1) fizemos a mudança de variável  $z = \frac{y-x}{\epsilon}$  (note que  $dz = \frac{1}{\epsilon^n} dy$  e  $y = \epsilon z + x$ ). Concluimos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \\ &\stackrel{(1)}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{-\frac{\epsilon^2}{2}|\xi|^2} e^{i\xi x} d\xi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|z|^2}{2}} f(x+\epsilon z) dz \\ &\stackrel{(2)}{=} \left( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|z|^2}{2}} dz \right) f(x) = f(x). \end{aligned}$$

Em (1) e (2), as passagens do limite para dentro da integral podem ser justificadas usando o teorema da convergência limitada. Quem nunca viu este Teorema, pode justificar usando integração de Riemann, mas não faremos aqui (fica bem mais longo...).

Provamos que  $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}$  é a identidade. A prova de que  $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}$  é também igual a identidade é feita da mesma maneira.  $\square$

OBSERVAÇÃO 204. Se não tivéssemos usado o termo  $e^{-\frac{\epsilon^2}{2}|\xi|^2}$ , não poderíamos ter usado Fubini. De fato, chegaríamos a algo do tipo

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi(y-x)} d\xi \right) f(y) dy,$$

porém não existe  $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi(y-x)} d\xi$ .

Vamos usar o Teorema acima para calcular algumas transformadas de Fourier.

EXEMPLO 205. Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ . Neste exemplo, vamos apenas verificar que  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f) = f$ , sem usar o Teorema 203. Vimos que  $\mathcal{F}f(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}$  e que  $\mathcal{F}^{-1}f(x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}f(-x)$ , pela Equação (5.5.2). Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}\right)(x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left(\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}\right)(-x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}\left(e^{-\frac{\xi^2}{2}}\right)(-x) = e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}} = f(x). \end{aligned}$$

Concluimos que, de fato,  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$ .

### 5.5.1. Exercícios.

EXERCÍCIO 206. (Djairo. 3.5, ex.3.7) Mostre que se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , então

i)  $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = Cf(-x)$ , em que  $C$  é uma constante. Determine essa constante.

ii)  $\mathcal{F}^4(f) := \mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)))) = Cf(x)$ , em que  $C$  é uma constante. Determine essa constante.

### 5.6. Convolução: Definição e propriedades

Vimos nas aulas anteriores dois tipos de expressões envolvendo integrais que aparecem diversas vezes em aplicações. Observe as integrais abaixo:

$$\text{Fórmula de Poisson na bola : } u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - \varphi) g(\varphi) d\varphi,$$

em que  $P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2}$ . Ela foi vista no estudo da equação de Laplace com condições de Dirichlet na bola unitária.

$$\text{Fórmula obtida ao estudar : } \mathcal{F}^{-1} \frac{1}{(2\pi\epsilon^2)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{2\epsilon^2}} f(y) dy.$$

$$\text{Fórmula de Poisson em } \mathbb{R}^n : u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy,$$

em que  $\Phi$  é dado no Teorema 137.

As expressões acima têm algo em comum. Elas são integrais da forma  $\int h(x-y)g(y)dy$ . Estes tipos de integrais aparecem aos montes: são chamadas de convolução. Elas aparecem tanto na teoria como na prática. Vamos estudar o caso em que as funções são definidas em todo  $\mathbb{R}$ . Para facilitar vamos restringir nosso estudo a funções em  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , embora seja possível definir convoluções para classes de funções mais gerais e até mesmo para distribuições.

DEFINIÇÃO 207. Sejam  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Definimos a convolução  $f * g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  pela integral

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Note que a integral acima está bem definida. De fato, temos

$$(5.6.1) \quad |f * g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)| dy \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy < \infty,$$

já que  $f$  e  $g$  são limitadas e integráveis. Assim, a convolução é uma função bem definida e limitada. Mais adiante, veremos que  $f * g$  pertence a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Vamos abaixo estudar algumas propriedades importantes da convolução.

PROPOSIÇÃO 208. A convolução satisfaz as seguintes propriedades para  $f$  e  $g$  pertencentes a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ :

i)  $f * g = g * f$  (A convolução é comutativa).

ii)  $f * (\alpha g + \beta h) = \alpha f * g + \beta f * h$  (A convolução é linear).

iii)  $f * (g * h) = (f * g) * h$  (A convolução é associativa).

DEMONSTRAÇÃO. i) Basta verificarmos que

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \stackrel{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)dz = g * f(x),$$

em (1) fizemos a mudança de variáveis  $z = x - y$ .

ii) Segue da linearidade das integrais que

$$\begin{aligned} f * (\alpha g + \beta h) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)(\alpha g(y) + \beta h(y)) dy \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy + \beta \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)h(y) dy \\ &= \alpha f * g(x) + \beta f * h(x). \end{aligned}$$

iii) Primeiramente observamos que

$$\begin{aligned} f * (g * h)(x) &= f * (h * g)(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)(h * g)(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \left( \int_{\mathbb{R}^n} h(y-z)g(z) dz \right) dy \\ &\stackrel{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(z)h(y-z) dy \right) dz \stackrel{(2)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(w)g(z)h(x-w-z) dz dw. \end{aligned}$$

Em (1) usamos Fubini e em (2) usamos  $w = x - y$  e  $dw = dy$ .

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (f * g) * h &= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x-y)h(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y-z)g(z)h(y) dz \right) dy \\ &\stackrel{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y-z)g(z)h(y) dy \right) dz \stackrel{(2)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(w)g(z)h(x-w-z) dw dz. \end{aligned}$$

Em (1) usamos Fubini e em (2), usamos  $w = x - y - z$ ,  $z = z$  e  $dydz = dw dz$ .  $\square$

Vamos agora mostrar agora como a derivada atua em convoluções. Veremos mais adiante algumas aplicações.

PROPOSIÇÃO 209. *Sejam  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Logo*

$$\partial^\alpha (f * g)(x) = \partial^\alpha f * g(x).$$

DEMONSTRAÇÃO. Basta ver que

$$\partial^\alpha (f * g)(x) = \partial^\alpha \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy \right) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha f(x-y)g(y) dy = \partial^\alpha f * g(x).$$

$\square$

COROLÁRIO 210. *Sejam  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Logo*

$$\partial^\alpha (f * g)(x) = f * \partial^\alpha g(x).$$

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que

$$\partial^\alpha (f * g)(x) \stackrel{(1)}{=} \partial^\alpha (g * f)(x) = \partial^\alpha g * f(x) \stackrel{(2)}{=} f * \partial^\alpha g(x).$$

Em (1) e (2) usamos a propriedade *i*) da Proposição 208.  $\square$

COROLÁRIO 211. *Sejam  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Logo  $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Assim, a convolução é uma operação em  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que

$$\begin{aligned} x^\alpha \partial^\beta (f * g)(x) &= x^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\beta f(x-y)g(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (x-y+y)^\alpha \partial^\beta f(x-y)g(y) dy \\ &= \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \int_{\mathbb{R}^n} (x-y)^{\alpha-\gamma} \partial^\beta f(x-y)y^\gamma g(y) dy. \end{aligned}$$

As expressões acima são limitadas pela Equação 5.6.1, já que  $x \mapsto x^{\alpha-\gamma} \partial^\beta f(x)$  e  $x \mapsto x^\gamma g(x)$  são funções de Schwartz.  $\square$

### 5.7. Convolução e Transformada de Fourier

Nesta parte final da aula, vamos mostrar a relação entre transformada de Fourier e convolução. Estas relações têm diversas aplicações.

TEOREMA 212. *As seguintes propriedades são satisfeitas para funções  $f$  e  $g$  pertencentes a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ :*

- i)  $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ .
- ii)  $(2\pi)^n \mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$ .
- iii)  $\mathcal{F}^{-1}(f * g) = (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}(f)\mathcal{F}^{-1}(g)$ .
- iv)  $\mathcal{F}^{-1}(fg) = \mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(g)$ .

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração segue das definições.

i) Vemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f * g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi} e^{-i(x-y)\xi} f(y)g(x-y) dy \right) dx \stackrel{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi} f(y) \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-y)\xi} g(x-y) dx \right) dy \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi} f(y) \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-it\xi} g(t) dt \right) dy = \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi} f(y) dy \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-it\xi} g(t) dt \right) \\ &= \mathcal{F}f(\xi)\mathcal{F}g(\xi). \end{aligned}$$

Em (1) usamos Fubini. Em (2) usamos  $t = x - y$  e  $dt = dx$ .

iv) Vamos aplicar  $\mathcal{F}^{-1}$ . Seja  $\tilde{f} = \mathcal{F}^{-1}f$  e  $\tilde{g} = \mathcal{F}^{-1}g$ . Usando i), temos

$$\mathcal{F}(\tilde{f} * \tilde{g}) = \mathcal{F}(\tilde{f})\mathcal{F}(\tilde{g}).$$

Aplicando  $\mathcal{F}^{-1}$  a ambos os lados, obtemos

$$\tilde{f} * \tilde{g} = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\tilde{f})\mathcal{F}(\tilde{g})).$$

Substituindo  $\tilde{f}$  por  $\mathcal{F}^{-1}f$  e  $\tilde{g}$  por  $\mathcal{F}^{-1}g$ :

$$\mathcal{F}^{-1}f * \mathcal{F}^{-1}g = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}f)\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}g)) = \mathcal{F}^{-1}(fg).$$

Concluimos que  $\mathcal{F}^{-1}(fg) = \mathcal{F}^{-1}f * \mathcal{F}^{-1}g$ .

iii) A demonstração é muito semelhante. De fato,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(f * g)(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f * g(\xi) d\xi \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(\xi-y) dy \right) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{iyx} e^{ix(\xi-y)} f(y)g(\xi-y) dy \right) d\xi \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iyx} f(y) \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\xi-y)x} g(\xi-y) d\xi \right) dy \\ &\stackrel{(3)}{=} (2\pi)^n \left( \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iyx} f(y) dy \right) \left( \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{itx} g(t) dt \right) \\ &= (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}f(x)\mathcal{F}^{-1}g(x), \end{aligned}$$

em que em (1) usamos que  $f * g = g * f$ , em (2) usamos Fubini e em (3) a mudança  $t = \xi - y$ .

ii) Basta aplicar  $\mathcal{F}$  na expressão de iii). Seja  $\tilde{f} = \mathcal{F}f$  e  $\tilde{g} = \mathcal{F}g$ . Usando iii), temos

$$\mathcal{F}^{-1}(\tilde{f} * \tilde{g}) = (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}(\tilde{f})\mathcal{F}^{-1}(\tilde{g}).$$

Aplicando  $\mathcal{F}$  nos dois lados, obtemos

$$\tilde{f} * \tilde{g} = (2\pi)^n \mathcal{F} \left( \mathcal{F}^{-1}(\tilde{f})\mathcal{F}^{-1}(\tilde{g}) \right).$$

Por fim, substituindo  $\tilde{f}$  por  $\mathcal{F}f$  e  $\tilde{g}$  por  $\mathcal{F}g$ , temos:

$$\mathcal{F}f * \mathcal{F}g = (2\pi)^n \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f)\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}g)) \iff \mathcal{F}f * \mathcal{F}g = (2\pi)^n \mathcal{F}(fg).$$

□

### 5.8. Fórmula de Plancherel

Vamos agora provar a importante fórmula de Plancherel. Para isto, vamos definir mais uma classe de funções: as funções de quadrado integrável.

DEFINIÇÃO 213. Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  uma função. Dizemos que  $f$  é uma função quadrado integrável<sup>1</sup> se

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

O conjunto das funções quadrado integráveis é denotado por  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Usaremos a notação  $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} := \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx}$ .

Observe que se  $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , ou seja,  $f$  é limitada e  $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty$ , então automaticamente temos que  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . De fato,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |f(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |f(x)| dx \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty. \end{aligned}$$

Assim,  $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ . Isto implica em particular que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ , já que as funções de Schwartz são limitadas e integráveis.

Estamos agora em condições de enunciar o Teorema de Plancherel.

TEOREMA 214. (*Teorema de Plancherel*) Sejam  $f$  e  $g$  pertencentes a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Logo

1.  $(2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi$ .
2.  $(2\pi)^n \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$ .

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração é um simples cálculo:

1. Vemos que

$$\begin{aligned} (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx &\stackrel{(1)}{=} (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \hat{g}(\xi) d\xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) \hat{g}(\xi) d\xi \right) dx \stackrel{(2)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx \right) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi, \end{aligned}$$

em (1) usamos a fórmula de inversão de  $g$ , isto é,  $g(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \hat{g}(\xi) d\xi$ . Em (2), usamos Fubini.

2. O resultado segue diretamente do anterior. Basta tomar  $f = g$ :

$$(2\pi)^n \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

□

<sup>1</sup>Novamente, a definição rigorosa requer o uso das integrais de Lebesgue. Neste curso, não iremos ser tão rigorosos. Em geral, basta lembrar que:

$L^\infty$  são funções “essencialmente” limitadas (uma definição precisa é dada em cursos de medida e integração). Se  $f$  é contínua, então  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  se, e somente se,  $|f|$  é limitada.

$L^1$  são funções tais que  $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty$

$L^2$  são funções tais que  $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx < \infty$ .

Vamos tentar interpretar esse resultado. Para tanto, vamos definir o produto interno em  $L^2(\mathbb{R}^n)$ :

$$(f, g) \ni L^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n) \mapsto \langle f, g \rangle \in \mathbb{C}$$

da seguinte forma:

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Recordamos em álgebra linear que o produto interno sempre define uma norma:

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx}.$$

Assim, o Teorema de Plancherel pode ser reescrito como

$$(2\pi)^n \langle f, g \rangle = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle \quad \text{e} \quad (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

para toda função  $f$  e  $g$  em  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Usando argumentos conhecidos de análise funcional e o fato de que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  é denso em  $L^2(\mathbb{R}^n)$  (a demonstração não será feita aqui), podemos usar as fórmulas acima para estender a transformada de Fourier para funções em  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Esta extensão é única e as fórmulas acima continuam sendo válidas. Com um pouquinho de cuidado, podemos trocar no enunciado do Teorema de Plancherel a frase “ $f$  e  $g$  pertencentes a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ” pela frase “ $f$  e  $g$  pertencentes a  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ”.

**TEOREMA 215.** *A transformada de Fourier pode ser definida como uma transformação linear bijetora  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  da seguinte forma.*

Seja  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , então

$$\mathcal{F}f(\xi) := \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{B(0, N)} e^{-ix\xi} f(x) dx.$$

A inversa é dada por  $\mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  definida como

$$\mathcal{F}^{-1}\hat{f}(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{B(0, N)} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

O limite acima é definido no sentido  $L^2(\mathbb{R}^n)$  (veja observação abaixo).

**OBSERVAÇÃO 216.** 1) A convergência acima deve ser entendida como um limite em  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , isto é,  $\mathcal{F}f$  é a única função tal que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \mathcal{F}f(\xi) - \int_{B(0, N)} e^{-ix\xi} f(x) dx \right|^2 d\xi = 0.$$

2) Se  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{B(0, N)} e^{-ix\xi} f(x) dx$  existe para cada  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , então o limite  $\mathcal{F}f(\xi) := \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{B(0, N)} e^{-ix\xi} f(x) dx$  pode ser visto como o limite pontual.

A demonstração do Teorema é técnica, mas é um exercício para quem conhece análise funcional. Ela está fora do escopo deste curso. Vamos aplicar o teorema acima para calcular algumas transformadas de Fourier de funções que não pertencem a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , mas que são quadrado integráveis.

**EXEMPLO 217.** Seja  $a > 0$  e  $\chi_{[-a, a]} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\chi_{[-a, a]}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\chi_{[-a, a]}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \chi_{[-a, a]}(x) dx = \int_{-a}^a e^{-ix\xi} dx = \frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi} \Big|_{-a}^a \\ &= \frac{e^{ia\xi} - e^{-ia\xi}}{i\xi} = \frac{2}{\xi} \left( \frac{e^{ia\xi} - e^{-ia\xi}}{2i} \right) = \frac{2\text{sen}(a\xi)}{\xi}. \end{aligned}$$

Concluimos que  $\mathcal{F}\chi_{[-a, a]}(\xi) = \frac{2\text{sen}(a\xi)}{\xi}$ .

EXEMPLO 218. Seja  $a > 0$  e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$f(x) = \frac{\text{sen}(ax)}{x}.$$

Sabemos que  $\mathcal{F}f(\xi) = 2\pi\mathcal{F}^{-1}f(-\xi)$ , pela Equação (5.5.2) e que  $\mathcal{F}\chi_{[-a,a]}(\xi) = \frac{2\text{sen}(a\xi)}{\xi}$ . Assim

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{\text{sen}(ax)}{x}\right)(\xi) &= 2\pi\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\text{sen}(ax)}{x}\right)(-\xi) = \pi\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2\text{sen}(ax)}{x}\right)(-\xi) \\ &= \pi\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\chi_{[-a,a]})(-\xi) = \pi\chi_{[-a,a]}(-\xi) = \pi\chi_{[-a,a]}(\xi), \end{aligned}$$

ou seja,  $\mathcal{F}\left(\frac{\text{sen}(ax)}{x}\right)(\xi) = \pi\chi_{[-a,a]}(\xi)$ .

EXEMPLO 219. Seja  $a > 0$  e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$f(x) = e^{-a|x|}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-ix\xi} e^{-ax} dx + \int_{-\infty}^0 e^{-ix\xi} e^{ax} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{(-i\xi-a)x} dx + \int_{-\infty}^0 e^{(-i\xi+a)x} dx \\ &= \left. \frac{e^{(-i\xi-a)x}}{-i\xi-a} \right|_0^{\infty} + \left. \frac{e^{(-i\xi+a)x}}{-i\xi+a} \right|_{-\infty}^0 = \frac{1}{i\xi+a} + \frac{1}{-i\xi+a} = \frac{2a}{a^2+\xi^2}. \end{aligned}$$

Concluimos que  $\mathcal{F}f(\xi) = \frac{2a}{a^2+\xi^2}$ .

EXEMPLO 220. Seja  $a > 0$  e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}.$$

Vimos que  $\mathcal{F}(e^{-a|x|})(\xi) = \frac{2a}{a^2+\xi^2}$ . Vamos usar esses resultados para calcular  $\mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)$ . Sabemos que  $\mathcal{F}f(\xi) = 2\pi\mathcal{F}^{-1}f(-\xi)$ , pela Equação (5.5.2). Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)(\xi) &= 2\pi\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)(-\xi) = \frac{2\pi}{2a}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2a}{a^2+x^2}\right)(-\xi) \\ &= \frac{2\pi}{2a}\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(e^{-a|x|}))(-\xi) = \frac{2\pi}{2a}e^{-a|-\xi|} = \frac{\pi}{a}e^{-a|\xi|}. \end{aligned}$$

Obtemos acima que  $\mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right) = \frac{\pi}{a}e^{-a|\xi|}$ .

### 5.8.1. Exercícios.

EXERCÍCIO 221. Seja  $a > 0$ . Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-a, a] \\ 0, & x \notin [-a, a] \end{cases}.$$

- a) Calcule  $\mathcal{F}(f)$ .  
b) Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\text{sen}(ax)}{x}\right)^2 dx = \pi a.$$

EXERCÍCIO 222. (VASY CAP. 8.3) Calcule as seguinte transformadas de Fourier para funções definidas em  $\mathbb{R}$ .

- a)  $f(x) = H(a - |x|)$ , em que  $H(x)$  é igual a 1 para  $x \geq 0$ , igual a 0 para  $x < 0$  e  $a > 0$ .  
b)  $f(x) = H(x)e^{-ax}$ , para  $a > 0$ .  
c)  $f(x) = |x|^n e^{-a|x|}$ , para  $a > 0$  e  $n \geq 0$  um inteiro.  
d)  $f(x) = (1+x^2)^{-1}$ . (Dica: Use transformada de Fourier inversa).

### 5.9. Aplicações

Vamos ver diversas aplicações da transformada de Fourier mais a frente. Aqui nos restringiremos a dois pequenos exemplos que já citamos anteriormente.

**5.9.1. Primeira aplicação: Resolvendo a equação**  $-\frac{d^2u}{dx^2}(x) + u(x) = f(x)$ . Seja  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Vamos procurar uma solução da equação abaixo

$$-\frac{d^2u}{dx^2}(x) + u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

PROBLEMA 223. Mostre que existe uma única função  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tal que

$$(5.9.1) \quad -\frac{d^2u}{dx^2}(x) + u(x) = f(x).$$

A solução é dada por

$$u(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} f(y) dy.$$

SOLUÇÃO 224. **Unicidade:**

Para a unicidade basta observar que se  $u$  e  $v$  são soluções da Equação 5.9.1, então  $w = u - v$  é solução da equação

$$\frac{d^2w}{dx^2}(x) = w(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

A solução dessa equação pode ser achada explicitamente. Ela é dada por  $w(x) = Ae^x + Be^{-x}$ . No entanto,  $w(x)$  nunca é limitada se  $A$  ou  $B$  for diferente de zero. Assim, se  $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , temos  $w = 0$ . Logo  $u = v$ .

**Existência:**

Para achar a solução, vamos aplicar a transformada de Fourier na equação diferencial:

$$\mathcal{F}\left(-\frac{d^2u}{dx^2}\right)(\xi) + \mathcal{F}u(\xi) = \mathcal{F}f(\xi).$$

Como  $\mathcal{F}\left(\frac{d^k f}{dx^k}(x)\right) = (i\xi)^k \hat{f}(\xi)$ , temos

$$\xi^2 \hat{u}(\xi) + \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi) \iff \hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{1 + \xi^2}.$$

Podemos derivar a expressão acima e mostrar, por indução, que  $\xi \mapsto \frac{\hat{f}(\xi)}{1 + \xi^2}$  pertence a  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Tomando a transformada inversa, podemos obter  $u$ :

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1} \hat{u}(x) = \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\hat{f}(\xi)}{1 + \xi^2} \right) (x).$$

Para conseguir uma expressão mais explícita, usaremos  $\mathcal{F}^{-1}(fg) = \mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(g)$ . Logo

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathcal{F}^{-1} \hat{u}(x) = \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{1}{1 + \xi^2} \right) * \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) \\ &\stackrel{(1)}{=} \left( \frac{1}{2} e^{-|x|} \right) * f(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} f(y) dy. \end{aligned}$$

Em (1), usamos o Exemplo 219.

Portanto, a solução é dada por

$$u(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} f(y) dy.$$

Podemos derivar e explicitamente que a expressão acima é solução da Equação 5.9.1. Por outro lado, se  $u$  é dado pela expressão acima, então basta seguir os passos contrários para provar que  $u$  é uma solução da equação desejada.

OBSERVAÇÃO 225. Note que usamos a expressão  $\mathcal{F}^{-1}(fg) = \mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(g)$ , mas o item iv) do Teorema 212 é demonstrado apenas para  $f$  e  $g$  pertencentes a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Isto é um problema, pois  $\xi \mapsto \frac{1}{1+\xi^2} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . No entanto, não é difícil argumentar que essa mesma expressão vale também para  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  e  $g \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ , seguindo os mesmos passos do Teorema 212.

**5.9.2. Segunda aplicação: Resolvendo a equação de Laplace no semiplano.** Vamos agora estudar a equação de Laplace no semiplano  $\mathbb{R}_+^2 := \mathbb{R} \times [0, \infty[$  com condições de Dirichlet:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0, & y > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Vamos seguir novamente a abordagem anterior e aplicar a transformada de Fourier em  $x$ . Esta transformada será denotada por  $\hat{u}$  ou  $\mathcal{F}u$ . Nosso argumento aqui será mais informal. Nosso objetivo é usar as manipulações vistas para derivar o núcleo de Poisson em  $\mathbb{R}_+^2$ .

Vamos assumir que  $u$  seja de classe  $C^2$  e que tanto  $u$  como  $\frac{\partial u}{\partial x}$  vão para zero quando  $|x| \rightarrow \infty$ . Além disso, vamos supor que  $x \mapsto u(x, y) \in L^2(\mathbb{R})$  e  $x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \in L^2(\mathbb{R})$  para  $y \geq 0$ . Aplicando a transformada de Fourier na variável  $x$ , obtemos

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(\xi, y) + \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)(\xi, y) = 0.$$

Note que

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} u(x, y) dx \right) = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}(\xi, y)$$

e que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-ix\xi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-ix\xi} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \Big|_{-R}^R - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\partial}{\partial x} (e^{-ix\xi}) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dx \\ &= i\xi \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-ix\xi} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-ix\xi} u(x, y) \Big|_{-R}^R - i\xi \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\partial}{\partial x} (e^{-ix\xi}) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dx \\ &= -\xi^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} u(x, y) dx. \end{aligned}$$

Concluimos, assim, que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}(\xi, y) = \xi^2 \hat{u}(\xi, y), & y > 0, \xi \in \mathbb{R} \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi), & \xi \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

A solução geral será dada por

$$\hat{u}(\xi, y) = A(\xi)e^{-|\xi|y} + B(\xi)e^{|\xi|y}.$$

No entanto, a transformada de Fourier não está bem definida para  $e^{y|\xi|}$ , já que essa função cresce rápido demais. Assim, vamos nos restringir a exponencial negativa:

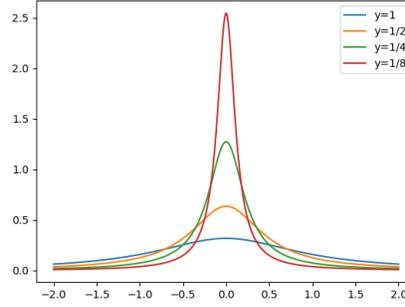
$$\hat{u}(\xi, y) = A(\xi)e^{-|\xi|y}.$$

Usando as condição de contorno, temos

$$A(\xi) = \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi).$$

Logo

$$\hat{u}(\xi, y) = \hat{f}(\xi)e^{-|\xi|y}.$$

FIGURA 5.9.1. O núcleo de Poisson  $P(x, y)$ 

Concluimos que

$$u(x, y) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}(\xi, y)) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\xi) e^{-|\xi|y}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) e^{-|\xi|y} d\xi.$$

Novamente podemos melhorar um pouco a expressão acima usando as propriedades de convolução. De fato,

$$(5.9.2) \quad u(x, y) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\xi) e^{-|\xi|y}) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) * \mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|y}) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|y}) * f.$$

Pelo Exemplo 220, temos

$$(5.9.3) \quad \mathcal{F}^{-1}(e^{-y|\xi|}) = \frac{y}{\pi} \left( \frac{1}{y^2 + x^2} \right).$$

Juntando a Equação 5.9.2 e a Equação 5.9.3, concluimos que

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \left[ \frac{y}{\pi} \left( \frac{1}{y^2 + x^2} \right) \right] * f = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + (x-t)^2} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + t^2} f(x-t) dt. \end{aligned}$$

A função

$$P_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + x^2}$$

é chamada de kernel (ou núcleo) de Poisson e coincide com a equação obtida no Teorema 159 para  $n = 2$ . Note que aqui usamos novamente a expressão  $\mathcal{F}^{-1}(fg) = \mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(g)$  para funções que não necessariamente pertencem a  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Novamente isto pode ser justificado com mais cuidado. Não o faremos aqui. Nosso objetivo foi apenas mostrar como podemos aplicar formalmente a transformada de Fourier para descobrir a fórmula de Poisson.

Veja a Ilustração 5.9.2 para o núcleo de Poisson em função de  $x$  e diferentes valores de  $y$ .

## Equação do calor

### 6.1. Motivação: Dedução física

Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto. Vamos supor que  $U$  represente um corpo. Gostaríamos de deduzir uma equação que descrevesse a temperatura do corpo ao longo do tempo.

Nosso argumento se baseará na conservação de energia. Desta forma, em cada aberto  $U_0 \subset U$  de classe  $C^1$ , temos a seguinte lei:

“A taxa de variação da energia total em  $U_0$  é igual ao fluxo de energia que entra em  $U_0$  mais a taxa de calor produzido por fontes de energia em  $U_0$ .”

Para escrever a lei acima de maneira matematicamente precisa, iremos denotar por:

1)  $e$  para a densidade de energia (lembramos que em unidades do sistema internacional,  $e$  tem unidade  $J/m^3$ ).

2)  $j$  para o vetor do fluxo de energia ( $J/(m^2s)$ ).

3)  $f(x, t)$  para a densidade de energia gerada pelas fontes de calor por segundo ( $J/(m^3s)$ ).

Assim temos que

$$\begin{aligned} \int_{U_0} e(x, t) dx & \quad \text{é a energia total em } U_0. \\ - \int_{\partial U_0} j(x, t) \cdot \nu(x) dx & \quad \text{é o fluxo de energia que entra em } U_0. \\ \int_{U_0} f(x, t) dx & \quad \text{é a energia por segundo produzida em } U_0 \text{ devido às fontes internas.} \end{aligned}$$

Note o sinal  $-$  em  $-\int_{\partial U_0} j(x, t) \cdot \nu(x) dx$  é necessário, pois, como a normal  $\nu$  aponta para fora, se quisermos o fluxo para dentro, precisamos colocar o sinal menos.

Assim, o balanço de energia se torna:

$$\frac{d}{dt} \int_{U_0} e(x, t) dx = - \int_{\partial U_0} j(x, t) \cdot \nu(x) dx + \int_{U_0} f(x, t) dx.$$

Gostaríamos, no entanto, de achar uma equação para a temperatura, que será denotada por  $u$  (tem unidade  $K$  no sistema internacional). Para tanto, vamos supor que a temperatura e a densidade de energia sejam proporcionais em cada ponto. Seja  $\rho(x)$  a densidade do material (em unidades  $Kg/m^3$ ). Assim, assumiremos que  $e(t, x) = \sigma(x)\rho(x)u(t, x)$ , em que a função  $\sigma$  é chamada de densidade de calor específico e depende do material do qual o corpo consiste.

Lembrando que o gradiente aponta para a direção de maior crescimento, é razoável supor válida a lei de Fourier: o fluxo de calor aponta na direção em que a temperatura está decrescendo mais. Assim, existe uma função positiva  $k$ , chamada de condutividade térmica, tal que  $j(x, t) = -K(x)\nabla u(x, t)$ . A função  $K$  também dependerá do material. Juntando tudo, obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_{U_0} \rho(x)\sigma(x)u(t, x) dx = \int_{\partial U_0} K(x)\nabla u(x, t) \cdot \nu(x) dx + \int_{U_0} f(x, t) dx.$$

Usando o teorema da divergência e supondo suficiente regularidade para passar a derivada para dentro da integral, concluímos que

$$\int_{U_0} \left( \rho(x)\sigma(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \nabla \cdot (K(x)\nabla u(x, t)) - f(x, t) \right) dx = 0$$

para todo  $U_0 \subset U$  de classe  $C^1$ . Assim, chegamos à seguinte equação para  $x \in U$  e  $t \geq 0$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{\rho(x)\sigma(x)} \nabla \cdot (K(x)\nabla u(x, t)) + \frac{f(x, t)}{\rho(x)\sigma(x)}.$$

A equação do calor como a conhecemos é obtida supondo que a densidade de calor específico, a densidade do material e a condutividade são constantes. Assim, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = k\Delta u(x, t) + \frac{1}{\sigma\rho}f(x, t).$$

A constante  $k = \frac{K}{\rho\sigma}$  é chamada de coeficiente de difusibilidade.

OBSERVAÇÃO 226. Modelos ainda mais realistas poderiam considerar que o calor específico e a condutividade dependem também da temperatura, isto é,  $\sigma = \sigma(x, u(x))$  e  $K = K(x, u(x))$ . Neste caso, somos levados naturalmente a problemas parabólicos quasilineares.

Para resolver esta equação, ainda precisamos de condições de contorno. As mais comuns são

- 1)  $u(x, t) = 0$  em  $\partial U_0$  a temperatura é zero na fronteira.
- 2)  $j(x, t) \cdot \nu(x) = 0$  em  $\partial U_0$  não há fluxo de calor na fronteira: O sistema é isolado.
- 3)  $j(x, t) \cdot \nu(x) = \lambda u(x, t)$  em  $\partial U_0$  o fluxo de calor é proporcional a temperatura.

A primeira condição é chamada de Dirichlet. A segunda de Neumann e equivale a  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ , em que  $\nu$  é a normal que aponta para fora de  $\partial U_0$ . A terceira condição é a condição de Robin e equivale a  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\lambda u$ .

É importante ressaltar que mesmo com as condições de contorno, a equação ainda não está bem colocada. De fato, se lembrarmos do curso de EDO, então sabemos que uma equação diferencial ordinária do tipo  $u'(t) = f(t, u(t))$  precisa de uma condição inicial.

Com todas essas condições, a equação do calor (colocando as constantes físicas como sendo iguais a um) se torna:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \Delta u(x, t) + f(x, t), & x \in U, t > 0 \\ \mathcal{B}u(x, t) &= 0, & x \in \partial U, t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in U \end{aligned}$$

em que  $\mathcal{B}$  corresponde a uma das três condições de contorno. As funções  $f$  e  $u_0$  são funções dadas no problema.

## 6.2. A equação do calor em $\mathbb{R}^n$ : Descobrimos a fórmula da solução

Vamos iniciar nosso estudo considerando o caso em que  $U = \mathbb{R}^n$  e não existem fontes de calor. Neste caso, não precisamos nos preocupar com condições de contorno, já que a fronteira de  $\mathbb{R}^n$  é vazia. A equação se torna

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \Delta u(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}.$$

Para resolver a equação, aplicaremos a transformada de Fourier *na variável  $x$* . Vamos argumentar aqui de uma maneira um pouco informal. Queremos apenas descobrir uma fórmula para  $u$ .

Suporemos que  $u$  seja de classe  $C^2$  e que a função  $x \mapsto u(x, t)$  seja de Schwartz. Além disso,  $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Aplicando a transformada de Fourier na equação, obtemos

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)\right) = \mathcal{F}(\Delta u(x, t)),$$

ou seja

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx = k \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \Delta u(x, t) dx.$$

Note que, para condições bastante gerais para  $u$ , temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(x, t) dx$$

e que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \Delta u(x, t) dx &\stackrel{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta(e^{-ix\xi}) u(x, t) dx \\ &= -|\xi|^2 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(x, t) dx = -|\xi|^2 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(x, t) dx. \end{aligned}$$

Na passagem (1) fizemos integração por partes. O argumento é exatamente o usado na aula do dia 20 de maio, Proposição 197, para mostrar que a transformada de Fourier leva derivadas em polinômios. Vamos denotar por  $\hat{u} = \mathcal{F}u$  a transformada de Fourier de  $u$  na variável  $x$  e por  $\hat{u}_0 = \mathcal{F}u_0$  a transformada de Fourier de  $u_0$ . Assim, a equação do calor se torna:

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, t) &= -|\xi|^2 \hat{u}(\xi, t), \quad t > 0, \xi \in \mathbb{R}^n \\ \hat{u}(\xi, 0) &= \hat{u}_0(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n \end{cases}.$$

Esta equação é simples de resolver. De fato, sabemos que  $f'(t) = af(t)$  implica que  $f(t) = f(0)e^{at}$ . Logo

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, t) = -|\xi|^2 \hat{u}(\xi, t) \implies \hat{u}(\xi, t) = e^{-|\xi|^2 t} \hat{u}(\xi, 0) = e^{-|\xi|^2 t} \hat{u}_0(\xi).$$

Para obter  $u(x, t)$  basta aplicar a transformada de Fourier inversa. Assim,

$$(6.2.1) \quad u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^2 t} \hat{u}_0(\xi)\right) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} e^{-|\xi|^2 t} \hat{u}_0(\xi) d\xi.$$

Note que a integral acima já nos fornece a solução. Contudo na realidade são duas integrais, pois  $\hat{u}_0$  também é definida através de uma integral.

Podemos deixar a expressão acima mais simples usando o que aprendemos sobre convolução. Lembramos que  $\mathcal{F}^{-1}(fg) = \mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(g)$ . Logo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^2 t} \hat{u}_0(\xi)\right) &= \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^2 t}\right) * \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{u}_0\right) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^2 t}\right) * \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(u_0)\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^2 t}\right) * u_0. \end{aligned}$$

Vamos agora calcular  $\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^2 t}\right)$ .

LEMA 227. A seguinte fórmula é válida:  $\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^2 t}\right) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ .

DEMONSTRAÇÃO. Vimos que  $\mathcal{F}\left(e^{-\frac{|x|^2}{2}}\right) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$  e que  $\mathcal{F}(M_\delta f) = \frac{1}{\delta^n} \mathcal{F}f\left(\frac{\xi}{\delta}\right)$ . Assim

$$\mathcal{F}\left(e^{-\frac{\left(\frac{|x|}{\sqrt{2t}}\right)^2}{2}}\right) = (2t)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}\left(e^{-\frac{|x|^2}{2}}\right)\left(\sqrt{2t}\xi\right) = (2t)^{\frac{n}{2}} (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-t|\xi|^2}.$$

Logo

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\left(e^{-\frac{\left(\frac{|x|}{\sqrt{2t}}\right)^2}{2}}\right) = (4\pi t)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-t|\xi|^2}\right).$$

Concluimos que

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-t|\xi|^2}\right) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

□

Voltando a nossa conta, chegamos que

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^2 t}\right) * u_0 = \left(\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right) * u_0 = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy.$$

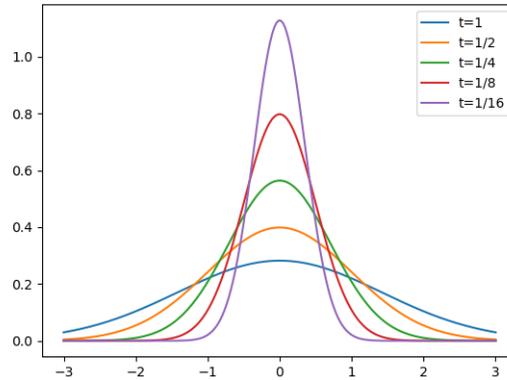


FIGURA 6.2.1. Ilustração do núcleo do calor

Assim, obtemos que supondo condições “razoáveis”, a solução do calor deverá ser dada pela fórmula abaixo:

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy.$$

A função definida como

$$K(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

é chamada de solução fundamental do calor ou núcleo (kernel) do calor.

Como vimos temos

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y, t) u_0(y) dy = K_t * u_0(x),$$

em que  $K_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é a função  $K_t(x) = K(x, t)$ , ou seja, a solução da equação do calor é a convolução (em  $x$ ) da solução fundamental com a condição inicial.

A solução fundamental pode ser interpretada como a solução da equação do calor, quando temos uma temperatura inicial  $u_0$  muito alta concentrada em  $x = 0$ , mas sua integral  $\int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) dx$  é igual a 1. De fato, conforme o tempo vai zero, a solução fundamental fica cada vez mais concentrada na origem. No entanto, o valor de sua integral em  $x$  é sempre o mesmo e igual a 1. Veja a Figura 6.2.1, em que plotamos o núcleo do calor em relação ao espaço para diferentes valores de  $t$ .

Vamos usar as fórmulas obtidas para achar e visualizar a solução da equação do calor com uma condição inicial específica.

EXEMPLO 228. Suponha que  $u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ . Para calcular  $u$  vamos usar a Equação (6.2.1):

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{F}^{-1} \left( e^{-\xi^2 t} \hat{u}_0(\xi) \right) \stackrel{(1)}{=} \mathcal{F}^{-1} \left( e^{-\xi^2 t} e^{-\frac{\xi^2}{4}} \right) = \mathcal{F}^{-1} \left( e^{-(\frac{1}{4}+t)\xi^2} \right) \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{\sqrt{4\pi(t+\frac{1}{4})}} e^{-\frac{x^2}{4(t+\frac{1}{4})}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi(t+\frac{1}{4})}} e^{-\frac{x^2}{4t+1}}. \end{aligned}$$

Em (1), usamos  $\mathcal{F}u_0(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{4}}$ , o que pode ser obtido fazendo mudança de variável. Em (2), calculamos a transformada de Fourier novamente usando mudança de variável (é simples! Já sabemos a transformada de Fourier da Gaussiana. Assim, é só usar os valores usando a Proposição 197.)

Essa solução pode ser vista na Figura 6.2.2.

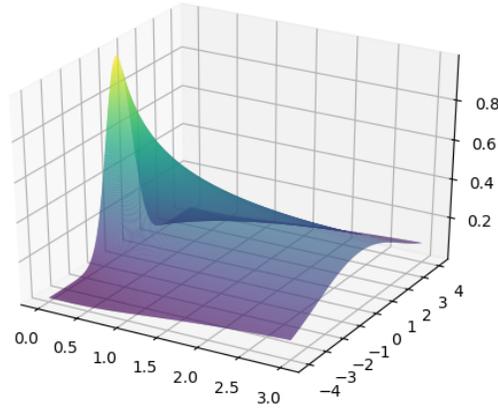


FIGURA 6.2.2. Ilustração da solução. Tempo de 0 a 4. Espaço de -4 a 4.

**6.2.1. Exercícios.**

EXERCÍCIO 229. (FOLLAND 4.A.2) Sejam  $u_1, \dots, u_n : \mathbb{R} \times [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  soluções da equação do calor unidimensional  $\frac{\partial u_j}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}$ . Mostre que  $v : \mathbb{R}^n \times [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$v(x_1, \dots, x_n, t) = u_1(x_1, t) u_2(x_2, t) \dots u_n(x_n, t)$$

é solução da equação do calor  $\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v$ .

**6.3. A equação do calor homogênea em  $\mathbb{R}^n$ : Demonstrando a existência de solução**

Vamos iniciar verificando algumas propriedades da solução fundamental da equação do calor.

PROPOSIÇÃO 230. *O núcleo do calor satisfaz as seguintes propriedades:*

- 1) Para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $t > 0$ ,  $K$  é solução da equação do calor:  $\frac{\partial K}{\partial t}(x, t) = \Delta K(x, t)$ .
- 2) As integrais de  $K$  em  $x$  são dadas por  $\int_{\mathbb{R}^n} K(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^n} |K(x, t)| dx = 1$ .

DEMONSTRAÇÃO. 1) Basta observar que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right) = -\frac{n}{2t(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \frac{|x|^2}{4t^2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left( \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right) \right] = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{x_j}{2t(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right] \\ &= -\frac{1}{2t(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + \left( \frac{x_j}{2t} \right)^2 \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \Delta \left( \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right) &= -\sum_{j=1}^n \frac{1}{2t(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + \sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{4t^2} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \\ &= -\frac{n}{2t(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + \frac{|x|^2}{4t^2} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \end{aligned}$$

Agora é claro que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right) = \Delta \left( \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right).$$

2) Podemos calcular a integral fazendo uma mudança de variável

$$\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} (2t)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\left(\frac{|x|}{\sqrt{2t}}\right)^2}{2}} \frac{dx}{(2t)^{\frac{n}{2}}} \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{2}} dy = 1,$$

em que fizemos  $y = \frac{x}{\sqrt{2t}}$ .  $\square$

Vamos agora provar rigorosamente a fórmula da solução da equação do calor.

**PROPOSIÇÃO 231.** *Seja  $u_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e limitada ( $u \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ). Definamos a função  $u : \mathbb{R}^n \times ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  por*

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x - y, t) u_0(y) dy.$$

*Logo*

1) *A função é de classe  $C^\infty(\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[)$ .*

2) *A função  $u$  é solução da equação do calor  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0$ , para  $t > 0$ .*

3) *Para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , temos:  $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = u_0(x)$ .*

A proposição acima mostra que  $u$  tem uma extensão contínua em  $\mathbb{R}^n \times [0, \infty[$ . Assim, 1 e 3 equivalem a dizer que  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[)$  é uma solução de

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \Delta u(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned},$$

em que, nos pontos  $t = 0$ , estamos tomando a única extensão contínua de  $u$ .

**DEMONSTRAÇÃO.** 1) É simples mostrar diferenciabilidade. De fato, nós vemos que

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(x - y, t) u_0(y) dy \right) = \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^{j+|\alpha|} K}{\partial t^j \partial x^\alpha}(x - y, t) u_0(y) dy \right).$$

2) Vemos que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(x - y, t) u_0(y) dy \right) - \Delta \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(x - y, t) u_0(y) dy \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{\partial K}{\partial t} - \Delta K \right) (x - y, t) u_0(y) dy = 0. \end{aligned}$$

3) A demonstração segue das seguintes passagens:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} K(x - y, t) u_0(y) dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\left|\frac{x-y}{\sqrt{2t}}\right|^2}{2}} u_0(y) dy = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|z|^2}{2}} u_0(x - \sqrt{2t}z) dy. \end{aligned}$$

Em que usamos que  $z = \frac{x-y}{\sqrt{2t}}$ ,  $dz = \frac{dy}{(2t)^{\frac{n}{2}}}$  e  $y = x - \sqrt{2t}z$ .  $\square$

**COROLÁRIO 232.** *A função  $K : \mathbb{R}^n \times ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$K(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

*é solução da equação abaixo:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial t}(x, t) &= \Delta K(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} K(x, t) &= \delta_0, & \text{em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \end{aligned}.$$

OBSERVAÇÃO 233. O limite  $\lim_{t \rightarrow 0} K(x, t) = \delta_0$  em  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  tem o seguinte significado. Para cada  $t > 0$ , a função  $x \in \mathbb{R}^n \mapsto K(x, t) \in \mathbb{R}$  é contínua. Portanto define uma distribuição  $K_t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  dada para cada  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  por

$$K_t(\varphi) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \varphi(x) dx.$$

A afirmação do Corolário é que essas distribuições convergem para o delta de Dirac quando  $t \rightarrow 0^+$ , isto é,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} K_t(\varphi) = \delta_0(\varphi) = \varphi(0),$$

para todo  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Neste sentido,  $K$  é solução da equação do calor com condição inicial o delta de Dirac.

DEMONSTRAÇÃO. Já vimos que  $\frac{\partial K}{\partial t}(x, t) = \Delta K(x, t)$ , para  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $t > 0$ . Basta então mostrar a convergência para o delta de Dirac. Para  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} K_t(\varphi) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \varphi(x) dx \stackrel{(1)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2} \varphi(\sqrt{4ty}) dy \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2} \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(\sqrt{4ty}) dy = \left( \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2} dy \right) \varphi(0) \\ &= \varphi(0) = \delta_0(\varphi). \end{aligned}$$

em que  $y = \frac{x}{\sqrt{4t}}$  e  $dy = \frac{1}{(4t)^{\frac{n}{2}}} dx$  foi usado em (1). □

### 6.3.1. Exercícios.

EXERCÍCIO 234. (Evans cap. 2 ex.11) Suponha que  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[)$  e que  $u$  é solução da equação do calor:  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \Delta u(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $t > 0$ .

a) Mostre que a função  $u_\lambda(x, t) = u(\lambda x, \lambda t)$  também é uma solução da equação do calor para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

b) Use o item a) para mostrar que a função  $v(x, t) = x \cdot \nabla u(x, t) + 2t \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$  também é uma solução da equação do calor.

EXERCÍCIO 235. (Evans cap. 2 ex.14) Ache uma fórmula explícita para uma solução da equação abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) + cu(x, t) &= f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}.$$

Faça de duas maneiras:

a) Use a função  $v(x, t) = e^{ct}u(x, t)$ .

b) Para o caso em que  $f = 0$ . Siga os seguintes passos:

i) Sabendo que  $\mathcal{F}\left(e^{-\frac{|x|^2}{2}}\right) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$ , mostre que  $\mathcal{F}\left(e^{-a|x|^2}\right) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}$  e  $\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-b\xi^2}\right) = \frac{1}{(4\pi b)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4b}}$ .

ii) Aplique a transformada de Fourier em  $x$  e ache uma expressão para  $\hat{u}(t, \xi) = \hat{g}(\xi) e^{-(1+|\xi|^2)t}$ .

iii) Por fim, use que  $u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}\hat{g} * \mathcal{F}^{-1}e^{-(1+|\xi|^2)t}$  para obter o resultado.

EXERCÍCIO 236. (Folland 4.A.4) Resolva a equação do calor unidimensional na semireta

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x > 0 \end{cases}.$$

Considere como condições de contorno os seguintes casos abaixo:

a)  $u(0, t) = 0$

b)  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$

(Dica: Para cada caso, use extensão ímpar ou par de  $f$  em  $\mathbb{R}$ ).

**6.4. Solução da equação do calor não homogênea em  $\mathbb{R}^n$  com condição inicial nula**

Vamos agora estudar a seguinte equação

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Para tanto, vamos proceder como na equação de Laplace. Vamos começar mostrando que  $K$  de fato é uma solução fundamental no sentido de distribuições. Observamos que  $K$  é localmente integrável em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . De fato, temos

$$\begin{aligned} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq R\} \times [-T, T]} K(x, t) dx dt &= \int_0^T \int_{\{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq R\}} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx dt \\ &\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx dt = T < \infty. \end{aligned}$$

Assim, como todo compacto de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  está contido em  $\{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq R\} \times [-T, T]$  para  $R$  e  $T$  suficientemente grandes, concluímos que

$$\int_C K(x, t) dx dt < \infty$$

para todo  $C$  compacto de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .

Vamos definir uma classe de funções adequada para nosso estudo.

**DEFINIÇÃO 237.** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo (pode ser aberto ou não). Vamos denotar por  $x$  as variáveis de  $U$  e por  $t$  a variável de  $I$ . Dizemos que  $u \in C^{2,1}(U \times I)$  se  $u : U \times I \rightarrow \mathbb{R}$  for contínuo e

1) A derivada parcial  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$  existe para todo  $(x, t) \in U \times I$  e a função  $\frac{\partial u}{\partial t} : U \times I \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua. A derivada parcial deve ser interpretada como derivada lateral se  $t \in I$  pertencer a uma das extremidades de  $I$ .

2) Para todo  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , as derivadas parciais  $\frac{\partial u}{\partial x_j}(x, t)$  e  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x, t)$  existem para todo  $(x, t) \in U \times I$  e as funções  $\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x, t) : U \times I \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas.

Diremos que  $u \in C_c^{2,1}(U \times I)$  se  $u \in C^{2,1}(U \times I)$  e se  $u$  tiver suporte compacto.

De maneira intuitiva,  $u \in C^{2,1}$  se  $u$  for de classe  $C^2$  no espaço e de classe  $C^1$  no tempo.

**TEOREMA 238.** A função  $K$  é tal que para todo  $\varphi \in C_c^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ , temos

$$-\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left( K(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) + K(x, t) \Delta \varphi(x, t) \right) dx dt = \varphi(0).$$

Em particular, temos que

$$\frac{\partial K}{\partial t} - \Delta K = \delta_0.$$

**DEMONSTRAÇÃO.** Sabemos que  $\varphi$  tem suporte compacto. Vamos supor que seu suporte esteja contido em  $\{x \in \mathbb{R}^n; |x| < R\} \times ]-T, T[$ , em que  $R > 0$  e  $T > 0$ . Em particular,  $\varphi$  e todas as suas derivadas se anulam quando  $|x| = R$  ou  $|t| = T$ . Além disso, temos que  $K(x, t) = 0$  se  $t < 0$ . Logo

$$\begin{aligned} &-\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left( K(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) + K(x, t) \Delta \varphi(x, t) \right) dx dt \\ &= -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \left( K(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) + K(x, t) \Delta \varphi(x, t) \right) dx dt \\ &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \left( K(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) + K(x, t) \Delta \varphi(x, t) \right) dx dt. \end{aligned}$$

Agora note que

$$\begin{aligned}
& \int_{\epsilon}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} K(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) dx dt = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\epsilon}^{\infty} K(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) dt \right) dx \\
& = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\epsilon}^T K(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) dt \right) dx \\
& = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, T) \varphi(x, T) dx - \int_{\mathbb{R}^n} K(x, \epsilon) \varphi(x, \epsilon) dx - \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\epsilon}^T \frac{\partial K}{\partial t}(x, t) \varphi(x, t) dt dx \\
& = - \int_{\mathbb{R}^n} K(x, \epsilon) \varphi(x, \epsilon) dx - \int_{\epsilon}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial K}{\partial t}(x, t) \varphi(x, t) dt dx.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
& \int_{\epsilon}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} K(x, t) \Delta \varphi(x, t) dx dt = \int_{\epsilon}^{\infty} \left( \int_{B(0, R)} K(x, t) \Delta \varphi(x, t) dx \right) dt \\
& = \int_{\epsilon}^{\infty} \left( \int_{B(0, R)} \Delta K(x, t) \varphi(x, t) dx \right) dt + \int_{\epsilon}^{\infty} \left( \int_{B(0, R)} \left( K(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(x, t) - \frac{\partial K}{\partial \nu}(x, t) \varphi(x, t) \right) dx \right) dt \\
& = \int_{\epsilon}^{\infty} \left( \int_{B(0, R)} \Delta K(x, t) \varphi(x, t) dx \right) dt = \int_{\epsilon}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta K(x, t) \varphi(x, t) dx dt.
\end{aligned}$$

Juntando tudo, temos

$$\begin{aligned}
& - \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left( K(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) + K(x, t) \Delta \varphi(x, t) \right) dx dt \\
& = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} K(x, \epsilon) \varphi(x, \epsilon) dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{\partial K}{\partial t}(x, t) - \Delta K(x, t) \right) \varphi(x, t) dt dx \\
& = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} K(x, \epsilon) \varphi(x, \epsilon) dx.
\end{aligned}$$

Agora observamos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x, \epsilon) \varphi(x, \epsilon) dx = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, \epsilon) (\varphi(x, \epsilon) - \varphi(x, 0)) dx + \int_{\mathbb{R}^n} K(x, \epsilon) \varphi(x, 0) dx.$$

Vimos anteriormente que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} K(x - y, t) u(y) dy = u(x) \implies \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} K(y, t) u(y) dy = u(0),$$

já que  $K(y, t) = K(-y, t)$ . Assim,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} K(x, \epsilon) \varphi(x, 0) dx = \varphi(0).$$

Por outro lado,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} K(x, \epsilon) (\varphi(x, \epsilon) - \varphi(x, 0)) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} K(x, \epsilon) dx \left( \sup_{x \in B(0, R)} |\varphi(x, \epsilon) - \varphi(x, 0)| \right) = \sup_{x \in B(0, R)} |\varphi(x, \epsilon) - \varphi(x, 0)|.$$

Como  $\varphi$  tem suporte compacto, então  $\varphi$  é uniformemente contínuo. Logo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sup_{x \in B(0, R)} |\varphi(x, \epsilon) - \varphi(x, 0)| = 0.$$

Concluimos que

$$- \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left( K(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) + K(x, t) \Delta \varphi(x, t) \right) dx dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} K(x, \epsilon) \varphi(x, \epsilon) dx = \varphi(0).$$

□

COROLÁRIO 239. *Seja  $f \in C_c^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ . Logo a função*

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} K(x - y, t - s) f(y, s) ds dy$$

*pertence a  $C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$  e é uma solução de*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t).$$

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} K(x - y, t - s) f(y, s) ds dy = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} K(y, s) f(x - y, t - s) ds dy.$$

Derivando, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} K(y, s) \left( \frac{\partial f}{\partial t}(x - y, t - s) - \Delta_x f(x - y, t - s) \right) ds dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^{n+1}} K(y, s) \left( \frac{\partial f}{\partial s}(x - y, t - s) + \Delta_y f(x - y, t - s) \right) ds dy = f(x - 0, t - 0) = f(x, t). \end{aligned}$$

□

De maneira muito semelhante, podemos achar a solução para o problema de valor inicial não homogêneo.

PROPOSIÇÃO 240. *Seja  $f \in C_c^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ . Logo a função*

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty K(x - y, t - s) f(y, s) ds dy = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^t K(x - y, t - s) f(y, s) ds dy$$

*pertence a  $C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty)) \cap C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  e é uma solução de*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \Delta u(x, t) + f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) &= 0, & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}.$$

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração é uma repetição da anterior. Vamos repeti-la só para deixar bem claro.

Antes de mais nada, observamos que

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty K(x - y, t - s) f(y, s) ds dy = \int_0^t \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) f(x - y, t - s) dy \right) ds.$$

Assim, vemos que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(y, t) f(x - y, 0) dy + \int_0^t \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) \frac{\partial f}{\partial t}(x - y, t - s) dy \right) ds$$

e

$$\Delta u(x, t) = \int_0^t \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) \Delta_x f(x - y, t - s) dy \right) ds.$$

Basta, então, mostrar que

$$\begin{aligned} &\int_0^t \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) \frac{\partial f}{\partial t}(x - y, t - s) dy \right) ds - \int_0^t \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) \Delta_x f(x - y, t - s) dy \right) ds \\ &= f(x, t) - \int_{\mathbb{R}^n} K(y, t) f(x - y, 0) dy. \end{aligned}$$

Para tanto, observamos que

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) \frac{\partial f}{\partial t}(x-y, t-s) dy \right) ds - \int_0^t \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) \Delta_x f(x-y, t-s) dy \right) ds \\ &= \int_0^\epsilon \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) \frac{\partial f}{\partial t}(x-y, t-s) dy \right) ds - \int_0^\epsilon \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) \Delta_x f(x-y, t-s) dy \right) ds \\ & \quad + \int_\epsilon^t \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) \frac{\partial f}{\partial t}(x-y, t-s) dy \right) ds - \int_\epsilon^t \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) \Delta_x f(x-y, t-s) dy \right) ds. \end{aligned}$$

Quando  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , temos que

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\epsilon \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) \frac{\partial f}{\partial t}(x-y, t-s) dy \right) ds \right| \\ & \leq \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))} \int_0^\epsilon \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) dy \right) ds \\ & = \epsilon \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))} \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\epsilon \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) \Delta f(x-y, t-s) dy \right) ds \right| \\ & \leq \|\Delta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))} \int_0^\epsilon \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) dy \right) ds \\ & = \epsilon \|\Delta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))} \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) \frac{\partial f}{\partial t}(x-y, t-s) dy \right) ds - \int_0^t \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) \Delta_x f(x-y, t-s) dy \right) ds \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_\epsilon^t \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) \frac{\partial f}{\partial t}(x-y, t-s) dy \right) ds - \int_\epsilon^t \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) \Delta_x f(x-y, t-s) dy \right) ds. \end{aligned}$$

Vamos analisar cada termo. O termo temporal fica

$$\begin{aligned} & \int_\epsilon^t \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) \frac{\partial f}{\partial t}(x-y, t-s) dy \right) ds = - \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_\epsilon^t K(y, s) \frac{\partial f}{\partial s}(x-y, t-s) ds \right) dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} (K(y, t)f(x-y, 0) - K(y, \epsilon)f(x-y, t-\epsilon)) dy + \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_\epsilon^t \frac{\partial K}{\partial s}(y, s)f(x-y, t-s) ds \right) dy. \end{aligned}$$

O termo espacial fica

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) \Delta_x f(x-y, t-s) dy \right) ds = \int_0^t \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) \Delta_y f(x-y, t-s) dy \right) ds \\ &= \int_0^t \left( \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_y K(y, s) f(x-y, t-s) dy \right) ds. \end{aligned}$$

Juntando tudo, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^\epsilon \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) \frac{\partial f}{\partial t}(x-y, t-s) dy \right) ds - \int_0^\epsilon \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(y, s) \Delta_x f(x-y, t-s) dy \right) ds \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} (K(y, t) f(x-y, 0) - K(y, \epsilon) f(x-y, t-\epsilon)) dy \\ & \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_\epsilon^t \left( \frac{\partial K}{\partial s}(y, s) - \Delta_y K(y, s) \right) f(x-y, t-s) ds \right) dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} (K(y, t) f(x-y, 0) - K(y, \epsilon) f(x-y, t-\epsilon)) dy. \end{aligned}$$

Observamos que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} K(y, \epsilon) f(x-y, t-\epsilon) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} K(y, \epsilon) (f(x-y, t-\epsilon) - f(x-y, t)) dy + \int_{\mathbb{R}^n} K(y, \epsilon) f(x-y, t) dy. \end{aligned}$$

Agora basta observar que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} K(y, \epsilon) f(x-y, t) dy = f(x, t)$$

e que

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^n} K(y, \epsilon) (f(x-y, t-\epsilon) - f(x-y, t)) dy \right| \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^n} K(y, \epsilon) dy \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0} |f(x-y, t-\epsilon) - f(x-y, t)| \\ & \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0} |f(x-y, t-\epsilon) - f(x-y, t)|. \end{aligned}$$

O último termo vai a zero quando  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , já que  $f$  é uma função contínua em  $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$  com suporte compacto. Logo é uniformemente contínua.  $\square$

#### 6.4.1. Exercícios.

EXERCÍCIO 241. (Evans cap.2 ex. 13) Seja  $n = 1$  e  $u(x, t) = v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ .

a) Mostre que  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  se, e somente se,  $v''(z) + \frac{z}{2}v'(z) = 0$ . Mostre também que a solução geral de  $v$  é dada por

$$v(z) = c \int_0^z e^{-\frac{s^2}{4}} ds + d.$$

b) Diferencie  $u(x, t) = v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$  em  $x$  e selecione a constante  $c > 0$  de tal forma que se obtenha a solução fundamental para  $n = 1$ . Explique porque esse procedimento produz a solução fundamental. (Dica: Qual é a condição inicial para  $u$ ?)

### 6.5. Solução da equação do calor não homogênea em $\mathbb{R}^n$ com condição inicial não nula

Vamos agora juntar tudo o que vimos anteriormente num Teorema.

TEOREMA 242. Seja  $u_0 \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$  e  $f \in C_c^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[)$ . Logo a equação abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \Delta u(x, t) + f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, t) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

possui uma solução  $u \in C_c^{2,1}(\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[)$  dada por

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y, t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y, t-s) f(y, s) dy ds.$$

OBSERVAÇÃO 243. Note que  $\int_{\mathbb{R}^n} K(x-y, t-s)f(y, s)dyds$  é solução de

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_s}{\partial t}(x, t) &= \Delta u_s(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > s \\ u_s(x, s) &= f(x, s), & x \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y, t-s)f(y, s)dyds = \int_0^t u_s(x, t)ds.$$

O fato de que uma solução do problema não homogêneo poder ser escrito como integral das soluções  $u_s$  é chamado de princípio de Duhamel.

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que

$$u_1(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y, t)u_0(y)dy$$

pertence a  $C^\infty(\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[)$  e é solução de

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t}(x, t) &= \Delta u_1(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u_1(x, t) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

Além disso, a função

$$u_2(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y, t-s)f(y, s)dyds$$

pertence a  $C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[)$  e é solução de

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_2}{\partial t}(x, t) &= \Delta u_2(x, t) + f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u_2(x, t) &= 0, & x \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

Assim,  $u = u_1 + u_2$  é tal que

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, t) = \Delta u_1(x, t) + \Delta u_2(x, t) + f(x, t) \\ &= \Delta(u_1 + u_2)(x, t) + f(x, t) = \Delta u(x, t) + f(x, t).\end{aligned}$$

Além disso,

$$u(x, 0) = u_1(x, 0) + u_2(x, 0) = u_0(x) + 0 = u_0(x).$$

□

**6.5.1. Analogia com EDO.** Vamos recordar o que sabemos de EDO. Dada uma matriz  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ , então

$$\begin{aligned}u'(t) &= Au(t), & t \in [0, \infty[ \\ u(0) &= u_0\end{aligned}$$

tem solução única dada por  $u(t) = e^{tA}u_0$ . Agora vamos pensar o que ocorre quando temos um termo  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  na equação. Neste caso, temos

$$\begin{aligned}u'(t) &= Au(t) + f(t), & t \in [0, \infty[ \\ u(0) &= u_0\end{aligned}$$

O “truque” para lidar com essas equações é procurar uma solução “variando os parâmetros”, isto é, procurando  $u(t) = e^{tA}v(t)$ . Neste caso, devemos ter

$$\begin{aligned}Ae^{tA}v(t) + e^{tA}v'(t) &= Ae^{tA}v(t) + f(t), & t \in [0, \infty[ \\ v(0) &= u_0\end{aligned}$$

Assim,

$$v'(t) = e^{-tA}f(t) \implies v(t) = u_0 + \int_0^t e^{-sA}f(s)ds.$$

Concluimos que

$$u(t) = e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds.$$

Vamos mostrar que esta fórmula é análoga a obtida para a equação do calor. Para tanto, vamos definir, para cada  $t > 0$ , o operador  $e^{t\Delta} : C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$  por

$$e^{t\Delta} g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y, t) g(y) dy = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy.$$

OBSERVAÇÃO 244. Se  $g$  pertencer ao espaço de Schwartz, então, usando convolução, o operador acima também pode ser escrito como

$$e^{t\Delta} g(x) = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}(K_t * g) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{K}_t \hat{g}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} e^{-t|\xi|^2} \hat{g}(\xi) d\xi.$$

Em geral, dada uma função  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  limitada, sempre podemos definir  $f(-\Delta) : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  da seguinte maneira:

$$f(-\Delta)g = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} f(|\xi|^2) \hat{g}(\xi) d\xi.$$

Este “cálculo funcional” do Laplaciano tem diversas consequências. (Veja Folland para uma discussão acessível).

PROPOSIÇÃO 245. *O operador  $e^{t\Delta}$  tem as seguintes propriedades análogas as matrizes:*

i) *Se  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , então  $e^{t\Delta} e^{s\Delta} g = e^{(t+s)\Delta} g$ .*

ii) *Se  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , então  $\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{t\Delta} g = g$ . A solução fundamental tem a seguinte propriedade: Para  $t, s > 0$ , vale*

$$K_t * K_s(x) = K_{t+s}(x).$$

DEMONSTRAÇÃO. i) A forma mais simples de se provar isto é usando transformada de Fourier. De fato,

$$e^{t\Delta} e^{s\Delta} g = K_t * (K_s * g) = (K_t * K_s) * g.$$

Vimos que  $\mathcal{F}^{-1} \left( e^{-t|\xi|^2} \right) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = K_t(x)$ . Logo

$$\mathcal{F}K_t(\xi) = e^{-|\xi|^2 t}.$$

Assim

$$\mathcal{F}(K_t)(\xi) \mathcal{F}(K_s)(\xi) = e^{-|\xi|^2 t} e^{-|\xi|^2 s} = e^{-|\xi|^2 (t+s)}.$$

Portanto

$$K_t * K_s(x) = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}(K_t * K_s)(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(K_t) \mathcal{F}(K_s)) = \mathcal{F}^{-1} \left( e^{-|\xi|^2 (t+s)} \right)(x) = K_{t+s}(x).$$

Assim,

$$e^{t\Delta} e^{s\Delta} g = K_{t+s} * g = e^{(t+s)\Delta} g.$$

ii) Isto segue de que  $K_t$  converge a  $\delta_0$ , quando  $t \rightarrow 0^+$ . □

Usando o operador  $e^{t\Delta}$ , podemos escrever a solução do problema do calor como

$$u(x, t) = e^{t\Delta} u_0(x) + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(\cdot, s) ds,$$

em que  $e^{(t-s)\Delta} f(\cdot, s)$  indica que  $e^{(t-s)\Delta}$  está agindo na função  $x \mapsto f(x, s)$ . Note a analogia Equações:

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t) + f(t), & t \in [0, \infty[ & \text{ e } & \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \Delta u(x, t) + f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(0) &= u_0 & & & u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Soluções:

$$u(t) = e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)ds \quad \text{e} \quad u(x, t) = e^{t\Delta}u_0(x) + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(\cdot, s)ds.$$

É interessante observar que o princípio de Duhamel é essencialmente a fórmula de variação de constantes aplicadas em EDPs.

### 6.5.2. Exercícios.

EXERCÍCIO 246. (Evans cap. 2 ex. 15) Dado  $g : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$  tal que  $g(0) = 0$ , encontre a fórmula

$$u(x, t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}} g(s) ds$$

para a solução do problema de valor inicial/de contorno abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= 0, & (x, t) \in ]0, \infty[ \times ]0, \infty[ \\ u(x, 0) &= 0, & x > 0 \\ u(0, t) &= g(t), & t \geq 0 \end{aligned}$$

Dica: Seja  $v(x, t) = u(x, t) - g(t)$  e estenda  $v$  para  $\{x < 0\}$  por reflexão ímpar ( $v(x, t) = -v(-x, t)$ , se  $x < 0$ ).

### 6.6. Princípio do máximo para a equação do calor e suas consequências

Vamos agora estudar a equação do calor em um aberto limitado  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Para tanto, usaremos a seguinte notação:

TEOREMA 247. (*Princípio do máximo forte para a equação do calor*) Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Seja  $u : \bar{U} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que  $u|_{U \times ]0, T[} \in C^{2,1}(U \times ]0, T[)$  e satisfaça

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \Delta u(x, t), \quad (x, t) \in U \times ]0, T[.$$

Logo

$$\max_{(x,t) \in \bar{U} \times [0, T]} u = \max_{(x,t) \in \partial U \times [0, T] \cup \bar{U} \times \{0\}} u.$$

É mais simples usar a seguinte notação para uma função  $u : \bar{U} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua tal que  $u|_{U \times ]0, T[} \in C^{2,1}(U \times ]0, T[)$ . Dizemos simplesmente que  $u \in C^{2,1}(U \times ]0, T[) \cap C(\bar{U} \times [0, T])$ .

DEMONSTRAÇÃO. Dado  $\epsilon > 0$ , vamos definir  $v : \bar{U} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$v(x, t) = u(x, t) + \epsilon |x|^2.$$

Seja  $0 < T' < T$ . Suponha que  $\max_{(x,t) \in \bar{U} \times [0, T']}$   $v$  ocorra no ponto  $(x_0, t_0) \in U \times ]0, T'[,$  isto é,

$$v(x_0, t_0) = \max_{(x,t) \in \bar{U} \times [0, T']}$$

Se  $t_0 \in ]0, T'[,$  então como  $U \times ]0, T'[,$  é um aberto e  $(x_0, t_0)$  é um máximo local de  $v$  (na verdade é até global) e  $v$  é de classe  $C^1$ , concluímos que

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_0, t_0) = \frac{\partial v}{\partial x_1}(x_0, t_0) = \dots = \frac{\partial v}{\partial x_n}(x_0, t_0) = 0.$$

Em particular  $\frac{\partial v}{\partial t}(x_0, t_0) = 0 \geq 0$ .

Se  $t_0 = T'$ , então, temos para todo  $0 < t < T'$ , que  $v(x_0, T') > v(x_0, t)$ . Mas

$$v(x_0, T') = v(x_0, t) + \int_t^{T'} \frac{\partial v}{\partial t}(x_0, s) ds.$$

Isto implica que

$$\int_t^{T'} \frac{\partial v}{\partial t}(x_0, s) ds > 0$$

para todo  $t < T'$ . Assim,

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_0, T') = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{T'-h}^{T'} \frac{\partial v}{\partial t}(x_0, s) ds > 0,$$

em que usamos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \int_{T'-h}^{T'} \frac{\partial v}{\partial t}(x_0, s) ds - \frac{\partial v}{\partial t}(x_0, T') \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_{T'-h}^{T'} \left( \frac{\partial v}{\partial t}(x_0, s) - \frac{\partial v}{\partial t}(x_0, T') \right) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_{T'-h}^{T'} \left| \frac{\partial v}{\partial t}(x_0, s) - \frac{\partial v}{\partial t}(x_0, T') \right| ds \\ &\leq \sup_{s \in [T'-h, T']} \left| \frac{\partial v}{\partial t}(x_0, s) - \frac{\partial v}{\partial t}(x_0, T') \right|. \end{aligned}$$

O último termo vai a zero quando  $h \rightarrow 0$ , já que a função  $\frac{\partial v}{\partial t}$  é contínua. Assim, concluímos que  $\frac{\partial v}{\partial t}(x_0, t_0) \geq 0$ .

Além disso, para  $t_0 \in ]0, T']$  fixo, a função  $x \in U \mapsto v(x, t_0) \in \mathbb{R}$  tem um máximo em  $x_0$ . Isto implica que  $\Delta v(x_0, t_0) \leq 0$ . Podemos provar isto de duas maneiras (praticamente equivalentes):

Primeira maneira:

Usamos os resultados sobre máximos e mínimos de várias variáveis (veja Elon curso de Análise real vol. 2, por exemplo). Neste caso, sabemos que se uma função de classe  $C^2$  definida num aberto  $U$  tem máximo local em um ponto  $x_0 \in U$ , então a matriz Hessiana é não positiva, ou seja, os autovalores do Hessiano desta função são menores ou iguais a zero.

Aplicando este resultado a função  $x \in U \mapsto v(x, t_0) \in \mathbb{R}$ , concluímos que a matriz Hessiana  $\left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x_0, t_0) \right)_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$  é não positiva. Logo seus autovalores são menores ou iguais a zero. Desta maneira, o traço desta matriz é menor ou igual a zero, já que o traço de uma matriz é igual a soma dos autovalores da matriz (contando multiplicidades). Porém o traço da matriz  $\left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x_0, t_0) \right)_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$  é justamente  $\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}(x_0, t_0) = \Delta v(x_0, t_0)$ . Concluímos assim que  $\Delta v(x_0, t_0) \leq 0$ .

Segunda maneira:

Usamos os resultados sobre máximos e mínimos de várias variáveis (veja Elon curso de Análise real vol. 1 ou algum livro de cálculo). Neste caso, sabemos que se uma função de classe  $C^2$  definida num intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  tem máximo local em um ponto  $x_0 \in I$ , então a segunda derivada dessa função é menor ou igual a zero.

Vamos aplicar este resultado à função  $s \in ]-\delta, \delta[ \mapsto v(x_0 + se_j, t_0)$ , em que  $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , onde 1 aparece apenas na  $j$ -ésima casa e  $\delta > 0$  é escolhido de tal forma que  $(x_0 + se_j, t_0) \in U$  para todo  $s \in ]-\delta, \delta[$ . Esta função é de classe  $C^2$  e tem um máximo em  $s = 0$ . Logo

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}(x_0, t_0) = \frac{d^2}{ds^2} (v(x_0 + se_j, t_0)) \Big|_{s=0} \leq 0.$$

Assim,  $\Delta v(x_0, t_0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}(x_0, t_0) \leq 0$ .

Agora observamos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \\ \Delta v(x, t) &= \Delta u(x, t) + \epsilon \Delta(|x|^2) = \Delta u(x, t) + 2n\epsilon \end{aligned}$$

já que

$$\Delta |x|^2 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (x_1^2 + \dots + x_n^2) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} x_1^2 + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} x_n^2 \right) = \sum_{j=1}^n 2 = 2n.$$

Usando que  $\frac{\partial v}{\partial t}(x_0, t_0) \geq 0$  e  $\Delta v(x_0, t_0) \leq 0$ , concluímos que

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_0, t_0) - \Delta v(x_0, t_0) \geq 0.$$

No entanto, sabemos que

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_0, t_0) - \Delta v(x_0, t_0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) - \Delta u(x_0, t_0) - 2n\epsilon = -2n\epsilon < 0.$$

As duas afirmações acima são claramente contraditórias. Obtemos assim um absurdo. O ponto  $(x_0, t_0)$  não pode ser um máximo de  $v$  se não estiver em  $\partial U \times [0, T'] \cup \bar{U} \times \{0\}$ . Assim,

$$\sup_{\bar{U} \times [0, T']} v = \sup_{\partial U \times [0, T'] \cup \bar{U} \times \{0\}} v.$$

Observe que  $v \rightarrow u$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Assim, tomando o limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , temos

$$\sup_{\bar{U} \times [0, T']} u = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \sup_{\bar{U} \times [0, T']} v \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \sup_{\partial U \times [0, T'] \cup \bar{U} \times \{0\}} v \right) = \sup_{\partial U \times [0, T'] \cup \bar{U} \times \{0\}} u.$$

Tomando o limite  $T' \rightarrow T$ , concluímos que

$$\sup_{\bar{U} \times [0, T]} u = \lim_{T' \rightarrow T} \left( \sup_{\bar{U} \times [0, T']} u \right) = \lim_{T' \rightarrow T} \left( \sup_{\partial U \times [0, T'] \cup \bar{U} \times \{0\}} u \right) = \sup_{\partial U \times [0, T] \cup \bar{U} \times \{0\}} u.$$

□

**COROLÁRIO 248.** (*Princípio do mínimo forte para a equação do calor*) Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado e  $u \in C^{2,1}(U \times ]0, T[) \cap C(\bar{U} \times [0, T])$  que satisfaz

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \Delta u(x, t), \quad (x, t) \in U \times ]0, T[.$$

Logo

$$\min_{(x,t) \in \bar{U} \times [0, T]} u = \min_{(x,t) \in \partial U \times [0, T] \cup \bar{U} \times \{0\}} u.$$

**DEMONSTRAÇÃO.** Basta observar que  $v := -u$  pertence a  $u \in C^{2,1}(U \times ]0, T[) \cap C(\bar{U} \times [0, T])$  e também satisfaz a equação do calor. Logo

$$\begin{aligned} \min_{(x,t) \in \bar{U} \times [0, T]} u &= \min_{(x,t) \in \bar{U} \times [0, T]} (-v) = - \max_{(x,t) \in \bar{U} \times [0, T]} v \\ &= - \max_{(x,t) \in \partial U \times [0, T] \cup \bar{U} \times \{0\}} v = \min_{(x,t) \in \partial U \times [0, T] \cup \bar{U} \times \{0\}} (-v) = \min_{(x,t) \in \partial U \times [0, T] \cup \bar{U} \times \{0\}} u. \end{aligned}$$

□

A unicidade de soluções segue diretamente desse princípio.

**TEOREMA 249.** (*Unicidade de soluções*) Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Logo a equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \Delta u(x, t) + f(x, t), & x \in U, t \in ]0, T[ \\ u(x, t) &= g(x, t), & x \in \partial U, t \in ]0, T[ \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in U \end{aligned}$$

tem no máximo uma solução  $u \in C^{2,1}(U \times ]0, T[) \cap C(\bar{U} \times [0, T])$ .

**DEMONSTRAÇÃO.** Suponha que  $u_1$  e  $u_2$  sejam funções em  $C^{2,1}(U \times ]0, T[) \cap C(\bar{U} \times [0, T])$  que resolvem a equação do calor acima. Logo  $u := u_1 - u_2$  também pertence  $C^{2,1}(U \times ]0, T[) \cap C(\bar{U} \times [0, T])$  e satisfaz a equação abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \Delta u(x, t), & x \in U, t \in ]0, T[ \\ u(x, t) &= 0, & x \in \partial U, t \in ]0, T[ \\ u(x, 0) &= 0, & x \in U \end{aligned}$$

Como  $u$  é igual a zero em  $\bar{U} \times \{0\} \cup \partial U \times [0, T]$ , concluímos que

$$\max_{\bar{U} \times [0, T]} u = \min_{\bar{U} \times [0, T]} u = 0.$$

Logo  $u = 0$  e  $u_1 = u_2$ .  $\square$

Um princípio do máximo também pode ser provado para o caso em que  $U = \mathbb{R}^n$ . De fato, temos

**TEOREMA 250.** (*Princípio do máximo para o problema de Cauchy*) *Seja  $u : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que  $u|_{\mathbb{R}^n \times ]0, T[} \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times ]0, T[)$ . Suponha que*

1) *A função  $u$  seja solução de*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \Delta u(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t \in ]0, T[ \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}.$$

2) *Existem constantes  $a, A > 0$  tais que função  $u$  satisfaz  $u(x, t) \leq Ae^{a|x|^2}$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 \leq t \leq T$ .*

*Neste caso, temos*

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} u_0.$$

Observamos que pela hipótese do Teorema, devemos ter que  $u_0(x) \leq Ae^{a|x|^2}$ . No entanto, se  $u_0$  não for limitado superiormente, então o teorema é trivial.

**DEMONSTRAÇÃO.** Vamos provar o Teorema inicialmente no caso em que  $4aT < 1$ . Neste caso, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $4a(T + \epsilon) < 1$ .

Dado  $\mu > 0$ , vamos definir a função  $v_\mu : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$v_\mu(x, t) = u(x, t) - \frac{\mu}{(T + \epsilon - t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon-t)}}.$$

A função  $(x, t) \mapsto \frac{\mu}{(T + \epsilon - t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon-t)}}$  se assemelha com a solução fundamental do calor. No entanto, ela tem crescimento exponencial. Mesmo assim, ela é uma solução da equação do calor. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{(T + \epsilon - t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon-t)}} \right) &= \frac{n}{2(T + \epsilon - t)^{\frac{n}{2}+1}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon-t)}} + \frac{1}{(T + \epsilon - t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon-t)}} \frac{|x-y|^2}{4(T + \epsilon - t)^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left( \frac{1}{(T + \epsilon - t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon-t)}} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{(T + \epsilon - t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon-t)}} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{x_j - y_j}{2(T + \epsilon - t)^{\frac{n}{2}+1}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon-t)}} \right] \\ &= \frac{1}{2(T + \epsilon - t)^{\frac{n}{2}+1}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon-t)}} + \frac{(x_j - y_j)^2}{4(T + \epsilon - t)^{\frac{n}{2}+2}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon-t)}}. \end{aligned}$$

Logo

$$\Delta \left( \frac{1}{(T + \epsilon - t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon-t)}} \right) = \frac{n}{2(T + \epsilon - t)^{\frac{n}{2}+1}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon-t)}} + \frac{|x-y|^2}{4(T + \epsilon - t)^{\frac{n}{2}+2}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon-t)}}$$

Agora é claro que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{(T + \epsilon - t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon-t)}} \right) = \Delta \left( \frac{1}{(T + \epsilon - t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon-t)}} \right).$$

Nossa conclusão é que  $v_\mu$  também é uma solução da equação do calor, já que é soma de soluções. Vamos agora provar que  $v_\mu(y, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} u_0$ , para todo  $\mu > 0$ . Isto implicará que

$$u(y, t) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} v_\mu(y, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} u_0.$$

Demonstração de que  $v_\mu(y, t) \leq \sup u_0$ .

Seja  $r > 0$ . Sabemos que

$$\max_{B(y,r) \times [0,T]} v_\mu = \max_{\partial B(y,r) \times [0,T] \cup \overline{B(y,r)} \times \{0\}} v_\mu.$$

Agora vamos estudar  $\max_{\partial B(y,r) \times [0,T] \cup \overline{B(y,r)} \times \{0\}} v_\mu$ .

Se  $x \in \overline{B(y,r)}$  e  $t = 0$ , temos

$$v_\mu(x, 0) = u(x, 0) - \frac{\mu}{(T + \epsilon)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon)}} \leq u(x, 0) = u_0(x) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} u_0.$$

Se  $x \in \partial B(y,r)$  e  $t \in ]0, T]$ . Logo  $|x - y| = r$ . Assim,

$$\begin{aligned} v_\mu(x, t) &= u(x, t) - \frac{\mu}{(T + \epsilon - t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon-t)}} \\ &\leq Ae^{a|x|^2} - \frac{\mu}{(T + \epsilon - t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon-t)}} \\ &\leq Ae^{a|x|^2} - \frac{\mu}{(T + \epsilon)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{r^2}{4(T+\epsilon)}}. \end{aligned}$$

Como  $4a(T + \epsilon) < 1$ , temos que  $\frac{1}{4(T+\epsilon)} > a$ . Logo existe  $\gamma > 0$  tal que  $\frac{1}{4(T+\epsilon)} > \gamma + a$ . Além disso,  $|x| = |x - y + y| \leq |y| + r$ . Logo

$$\begin{aligned} v_\mu(x, t) &\leq Ae^{a(|y|^2 + r^2 + 2r|y|)} - \frac{\mu}{(T + \epsilon)^{\frac{n}{2}}} e^{(a+\gamma)r^2} \\ &= e^{(ar^2 + 2ar|y|)} \left[ Ae^{a|y|^2} - \frac{\mu}{(T + \epsilon)^{\frac{n}{2}}} e^{\gamma r^2 - 2ar|y|} \right]. \end{aligned}$$

Agora note que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{ar^2 + 2ar|y|} = \infty \quad \lim_{r \rightarrow \infty} Ae^{a|y|^2} - \frac{\mu}{(T + \epsilon)^{\frac{n}{2}}} e^{\gamma r^2 - 2ar|y|} = -\infty.$$

Assim,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{ar^2 + 2ar|y|} \left[ Ae^{a|y|^2} - \frac{\mu}{(T + \epsilon)^{\frac{n}{2}}} e^{\gamma r^2 - 2ar|y|} \right] = -\infty.$$

Escolhendo  $r$  suficientemente grande, concluímos que

$$v_\mu(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} u_0$$

para todo  $x \in \partial B(y,r)$  e  $t \in ]0, T]$ . Assim, escolhendo um tal  $r$ , temos que

$$v_\mu(y, t) \leq \max_{B(y,r) \times [0,T]} v_\mu = \max_{\partial B(y,r) \times [0,T] \cup \overline{B(y,r)} \times \{0\}} v_\mu \leq \sup_{\mathbb{R}^n} u_0.$$

Isto encerra a demonstração para  $4aT < 1$ . Se  $4aT > 1$ , então existem  $T_1, T_2, \dots, T_N = T$  tais que  $4a(T_{j+1} - T_j) < 1$ ,  $4aT_1 < 1$ . Logo se  $t \in [T_j, T_{j+1}]$ , então

$$v_\mu(y, t) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} v_\mu(x, T_j) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} v_\mu(x, T_{j-1}) \leq \dots \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} v_\mu(x, T_1) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u_0.$$

□

**COROLÁRIO 251.** *Seja  $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$  e  $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ . Logo existe no máximo uma função  $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times ]0, T[) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  tal que*

1)  $u$  é solução de

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \Delta u(x, t) + f(x, t), & x \in U, t \in ]0, T[ \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in U \end{aligned}$$

2) *Existem constantes  $A$  e  $a > 0$  tais que  $|u(x, t)| \leq Ae^{a|x|^2}$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $t \in [0, T]$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Se  $u_1$  e  $u_2$  satisfazem as condições 1) e 2), então  $w = u_1 - u_2$  satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) &= \Delta w(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t \in ]0, T[ \\ w(x, 0) &= 0, & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

e temos  $w(x, t) \leq Ae^{a|x|^2}$  e  $-w(x, t) \leq Ae^{a|x|^2}$ . Assim  $\sup w = 0$  e  $-\inf(w) = \sup(-w) = 0$ . Concluimos, portanto, que  $w = 0$  e  $u_1 = u_2$ .  $\square$

### 6.6.1. Exercícios.

EXERCÍCIO 252. Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado e  $T > 0$ . Suponha que um corpo ocupe o espaço  $U$ . Num modelo simples, consideramos  $\sigma : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  como a densidade de calor específico do corpo,  $u : \bar{U} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  sua temperatura e  $f : \bar{U} \times [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$  uma fonte de calor. Assim, usando conservação de energia, para todo aberto  $V \subset \bar{V} \subset U$  com fronteira  $C^1$  temos

$$(6.6.1) \quad \frac{d}{dt} \int_V \sigma(x) u(x, t) dx = - \int_{\partial V} F(y, t) \cdot n(y) dS(y) + \int_V f(x, t) dx,$$

em que  $F : U \times [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  é o fluxo de calor ao longo do corpo.

a) Suponha que  $\sigma \in C(\bar{U})$  é estritamente positiva,  $f \in C(\bar{U} \times [0, T])$  e  $F(x, t) = -k(x) \nabla u(x, t)$ , em que  $k \in C^1(\bar{U})$  é o coeficiente de difusão. Mostre que se  $u \in C_1^2(U \times ]0, \infty[)$  satisfaz a Equação (6.6.1) acima para todo aberto  $V \subset \bar{V} \subset U$  de classe  $C^1$ , então  $u$  é solução da equação abaixo

$$\sigma(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \nabla \cdot (k(x) \nabla u(x, t)) + f(x, t).$$

Mostre que essa equação pode ser reescrita como

$$(6.6.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = a(x) \Delta u(x, t) + b(x) \cdot \nabla u(x, t) + g(x, t),$$

em que  $a : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $g : \bar{U} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas. Escreva  $a$ ,  $b$  e  $g$  em termos de  $\sigma$ ,  $k$  e  $f$ .

Nos próximos itens, vamos considerar apenas a Equação (6.6.2) e suporemos que existe uma constante  $C > 0$  tal que  $a(x) \geq C$  para todo  $x \in \bar{U}$

b) Mostre que se  $g(x, t) < 0$  para todo  $(x, t) \in U_T$  e se  $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$  é uma solução de (6.6.2), então

$$\max_{U_T} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

c) Seja  $w : U \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $w(x, t) = e^{\lambda x_1}$ . Mostre que se  $\lambda > 0$  é grande, então para todo  $x \in \bar{U}$ , temos

$$a(x) \Delta w(x) + b(x) \cdot \nabla w(x) > 0.$$

d) Seja  $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$  uma solução de (6.6.2) com  $g \equiv 0$ . Usando as funções  $v_\epsilon := u + \epsilon w$ , conclua primeiramente que  $\max_{U_T} u = \max_{\Gamma_T} u$  e depois que  $\min_{U_T} u = \min_{\Gamma_T} u$ .

Conclua que existe no máximo uma solução  $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$  de (6.6.2) tal que  $u(x, t) = 0$  para  $x \in \partial U$ ,  $t > 0$  e  $u(x, 0) = h(x)$ , em que  $h \in C(U)$  uma função dada.

## 6.7. Regularidade das soluções da equação do calor

TEOREMA 253. Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  e  $I \subset \mathbb{R}$  abertos. Suponha que  $u \in C^{2,1}(U \times I)$  seja uma solução da equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0, \quad \forall (x, t) \in U \times I.$$

Logo  $u \in C^\infty(U \times I)$ .

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $(x_0, t_0) \in U \times I$ . Vamos escolher  $r > 0$  e  $\omega \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$  tais que  $\omega$  seja igual a 1 em  $B((x_0, t_0), r)$  e igual a zero fora  $B((x_0, t_0), 2r)$ , em que  $\bar{B}((x_0, t_0), 2r) \subset U$ . Assim, temos que  $\omega u \in C_c^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ .

Seja  $v \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$  a função definida como

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \int \int K(x - y, t - s) \omega(y, s) u(y, s) dy ds \\ &= \int \int K(y, s) \omega(x - y, t - s) u(x - y, t - s) dy ds. \end{aligned}$$

Vimos que

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) - \Delta v(x, t) = \omega(x, t) u(x, t).$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) - \Delta v(x, t) &= \int \int K(y, s) \left[ \frac{\partial \omega}{\partial t}(x - y, t - s) u(x - y, t - s) \right. \\ &\quad - \Delta \omega(x - y, t - s) u(x - y, t - s) - \nabla \omega(x - y, t - s) \cdot \nabla u(x - y, t - s) \\ &\quad \left. + \omega(x - y, t - s) \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x - y, t - s) - \Delta u(x - y, t - s) \right) \right] dy ds \\ &= \int \int K(y, s) \left[ \frac{\partial \omega}{\partial t}(x - y, t - s) u(x - y, t - s) \right. \\ &\quad - \Delta \omega(x - y, t - s) u(x - y, t - s) \\ &\quad \left. - \nabla \omega(x - y, t - s) \cdot \nabla u(x - y, t - s) \right] dy ds \end{aligned}$$

Assim, em  $B((x_0, t_0), r)$ , temos

$$u(x, t) = \omega(x, t) u(x, t) = \int \int K(y, s) g(x - y, t - s) ds dy.$$

em que

$$g(x, t) = \frac{\partial \omega}{\partial t}(x, t) u(x, t) - \Delta \omega(x, t) u(x, t) - \nabla \omega(x, t) \cdot \nabla u(x, t)$$

é uma função contínua que se anula em  $B((x_0, t_0), r)$ . Seja  $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$  tal que  $\eta$  é igual a zero em  $B((0, 0), \frac{r}{2})$  e 1 fora de  $B((x_0, t_0), r)$ . Assim,

$$\eta(x - x_0, t - t_0) g(x, t) = g(x, t)$$

para todo  $x$  e  $t$  em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Logo, se  $(x, t) \in B((x_0, t_0), r)$ , então

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int \int K(y, s) g(x - y, t - s) ds dy \\ &= \int \int K(y, s) \eta(x - y - x_0, t - s - t_0) g(x - y, t - s) ds dy \\ &= \int \int K(x - y, t - s) \eta(y - x_0, s - t_0) g(y, s) ds dy \\ &= \int \int G(x, t, y, s) g(y, s) ds dy. \end{aligned}$$

Note que  $g \in C_c(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ . Além disso,  $G \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1})$ . Logo  $u$  é  $C^\infty$ .  $\square$

## 6.8. Método variacional

Consideremos o problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \Delta u(x, t) + f(x, t), & (x, t) &\in U \times ]0, T[ \\ u(x, 0) &= g(x, t), & (x, t) &\in \partial U \times [0, T] \cup \bar{U} \times \{0\} \end{aligned}$$

Assumiremos que  $U \subset \mathbb{R}^n$  é aberto, limitado de classe  $C^1$ .

TEOREMA 254. *Existe no máximo uma solução  $u \in C^{2,1}(\bar{U} \times [0, T])$  da equação do calor.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que  $u$  e  $\bar{u}$  sejam soluções e definamos  $w := u - \bar{u}$ . Logo

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) &= \Delta w(x, t), & (x, t) \in U \times ]0, T[ \\ w(x, 0) &= 0, & (x, t) \in \partial U \times [0, T] \cup \bar{U} \times \{0\} \end{aligned}$$

Vamos definir  $e(t) := \int_U w(x, t)^2 dx$ ,  $0 \leq t \leq T$ . Note que  $e(t) \geq 0$  e

$$e(0) = \int_U w(x, 0)^2 dx = 0.$$

Mas

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt}(t) &= 2 \int_U w(x, t) \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) dx = 2 \int_U w(x, t) \Delta w(x, t) dx \\ &= 2 \int_U \nabla \cdot (w(x, t) \nabla w(x, t)) dx - 2 \int_U |\nabla w(x, t)|^2 dx \\ &= 2 \int_{\partial U} w(x, t) \frac{\partial w}{\partial \nu}(x, t) dx - 2 \int_U |\nabla w(x, t)|^2 dx \\ &= -2 \int_U |\nabla w(x, t)|^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

Logo  $e$  é uma função não-crescente. Assim  $0 \leq e(t) \leq e(0) = 0$ . Concluimos que  $e(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ . Logo  $\int_U w(x, t)^2 dx = 0$ . Como  $w^2$  é uma função contínua e positiva, temos que  $w(x, t) = 0$  para todo  $(x, t)$ . Assim,  $u = \bar{u}$ .  $\square$

**6.8.1. Unicidade “Backwards”.** Vamos agora mostrar um outro tipo de unicidade.

TEOREMA 255. *Se  $u, \bar{u} \in C^{2,1}(\bar{U} \times [0, T])$  são tais que*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \Delta u(x, t) + f(x, t), & (x, t) \in U \times ]0, T[ & \quad e \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x, t) &= \Delta \bar{u}(x, t) + f(x, t), & (x, t) \in U \times ]0, T[ \\ u(x, 0) &= g(x, t), & (x, t) \in \partial U \times [0, T] & \quad \bar{u}(x, 0) &= g(x, t), & (x, t) \in \partial U \times [0, T] \end{aligned}$$

*Se  $u(x, T) = \bar{u}(x, T)$ , para todo  $x \in U$ , então  $u = \bar{u}$  em  $U \times ]0, T[$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $w := u - \bar{u}$ . Logo

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) &= \Delta w(x, t), & (x, t) \in U \times ]0, T[ \\ w(x, 0) &= 0, & (x, t) \in \partial U \times [0, T] \cup \bar{U} \times \{T\} \end{aligned}$$

Agora vamos definir  $e(t) := \int_U w(x, t)^2 dx$ ,  $0 \leq t \leq T$ . Logo

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt}(t) &= 2 \int_U w(x, t) \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) dx = 2 \int_U w(x, t) \Delta w(x, t) dx \\ \frac{d^2e}{dt^2}(t) &= -4 \int_U \nabla w(x, t) \cdot \nabla \left( \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \right) dx \\ &= -4 \int_U \left[ \nabla \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \nabla w(x, t) \right) - \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \Delta w(x, t) \right] dx \\ &= -4 \int_{\partial U} \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \frac{\partial w}{\partial \nu}(x, t) dS(x) + 4 \int_U \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \Delta w(x, t) dx \\ &= 4 \int_U (\Delta w(x, t))^2 dx. \end{aligned}$$

Usamos que  $w(x, t) = 0$  para todo  $(x, t) \in \partial U \times [0, T]$ . Derivando, concluimos que  $\frac{\partial w}{\partial t}(x, t) = 0$  para todo  $(x, t) \in \partial U \times [0, T]$ .

Por fim, observamos que

$$\begin{aligned} \left( \frac{de}{dt}(t) \right)^2 &= 4 \int_U w(x, t) \Delta w(x, t) dx \\ &\leq 4 \int_U w(x, t)^2 dx \int_U (\Delta w(x, t))^2 dx = e(t) \frac{d^2e}{dt^2}(t). \end{aligned}$$

Assim, temos  $(e'(t))^2 \leq e(t)e''(t)$ , para todo  $0 \leq t \leq T$ . Vamos mostrar que isto implica que  $w(x, t) = 0$  para todo  $(x, t)$ .

Se  $e(t) \neq 0$ , então existe  $[t_1, t_2] \subset [0, T]$  tal que  $e(t) > 0$ , para todo  $t_1 \leq t \leq t_2$  e  $e(t_2) = 0$ . De fato,  $e(T) = 0$  por hipótese. Assim,  $t_2$  é apenas o primeiro zero maior do que  $t > 0$ . Seja  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $f(t) = \ln e(t)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Logo

$$f'(t) = \frac{1}{e(t)} e'(t)$$

e

$$f''(t) = -\frac{1}{e(t)^2} e'(t)^2 + \frac{e''(t)}{e(t)} = \frac{e''(t)e(t) - e'(t)^2}{e(t)^2} \geq 0.$$

Concluimos que  $f$  é convexa em  $]t_1, t_2[$ . Assim, se  $0 < \tau < 1$ ,  $t_1 < t < t_2$ , temos

$$f((1-\tau)t_1 + \tau t) \leq (1-\tau)f(t_1) + \tau f(t).$$

Logo

$$\ln e((1-\tau)t_1 + \tau t) \leq (1-\tau) \ln e(t_1) + \tau \ln e(t) = \ln \left( e(t_1)^{(1-\tau)} e(t)^\tau \right).$$

Portanto,

$$e((1-\tau)t_1 + \tau t) \leq e(t_1)^{(1-\tau)} e(t)^\tau.$$

Tomando o limite  $t \rightarrow t_2$ , obtemos para  $0 < \tau < 1$ ,

$$0 \leq e((1-\tau)t_1 + \tau t_2) \leq e(t_1)^{(1-\tau)} e(t_2)^\tau = 0.$$

Nossa conclusão é que  $e = 0$ . Assim,  $w = 0$  e  $u = \bar{u}$ . □

### 6.8.2. Exercícios.

EXERCÍCIO 256. Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$ ,  $T > 0$  e  $u \in C_1^2(U_T) \cap C^1(\bar{U}_T)$  uma solução da equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \Delta u(x, t),$$

para todo  $(x, t) \in U_T$ . Suponha que  $u$  satisfaça ou a condição de Dirichlet ou a de Neumann, isto é,  $u(x, t) = 0$  ou  $\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = 0$  para  $(x, t) \in \partial U \times ]0, T[$ . Mostre que  $t \in ]0, T[ \mapsto \int_U u(t, x)^2 dx$  é uma função decrescente de  $t$ .

(Dica: Observe que  $u \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u^2) - \nabla \cdot (u \nabla u) + |\nabla u|^2$  e integre sobre  $U$ ).

## 6.9. O método de separação de variáveis

Abaixo vamos estudar a equação do calor em domínios gerais. Consideraremos  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto conexo e limitado com fronteira  $\partial U$ .

**6.9.1. Equação do Calor.** Consideremos a equação do calor abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \Delta u(t, x), & (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega \\ u(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \partial \Omega \\ u(0, x) = f(x), & x \in \Omega \end{cases},$$

em que  $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ .

Vamos resolver a equação acima seguindo os três passos do método de separação de variáveis:

### Primeiro Passo

Procuramos soluções da forma

$$u(t, x) = T(t) X(x),$$

em que  $T : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Substituindo na equação do calor, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} (T(t) X(x)) = \Delta (T(t) X(x)).$$

Assim, dividindo tudo por  $T(t)X(x)$ ,

$$\frac{\frac{dT}{dt}(t)}{T(t)} = \frac{\Delta X(x)}{X(x)} = \lambda$$

e obtemos as equações

$$\frac{dT}{dt}(t) = \lambda T(t),$$

$$\Delta X(x) = \lambda X(x).$$

Resolvendo as equações, concluímos que  $T(t) = Ce^{\lambda t}$ . Mas e quanto a  $X$ ? Precisamos ir ao segundo passo.

### Segundo Passo

Vamos usar as condições de Dirichlet. Sabemos que  $u(t, x) = 0$  quando  $x \in \partial\Omega$ . Logo quando  $x \in \partial\Omega$ , temos

$$T(t)X(x) = 0 \implies Ce^{\lambda t}X(x) = 0 \implies X(x) = 0.$$

Concluímos que o método de separação de variáveis nos leva ao seguinte problema: Ache todas as soluções  $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e todas as constantes  $\lambda_n$  tais que:

$$(6.9.1) \quad \begin{cases} \Delta X_n &= \lambda_n X_n(x), & x \in \Omega \\ X_n(x) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}.$$

### Terceiro Passo

Somando todas as soluções do segundo passo, temos

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n t} X_n(x),$$

em que  $c_n \in \mathbb{R}$ .

Devemos, por fim, determinar os coeficientes  $c_n$  através da condição inicial

$$u(0, x) = f(x).$$

Suponha que a função  $f$  possa ser escrita como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x),$$

em que  $f_n \in \mathbb{R}$  e o limite deve ocorrer em alguma das formas estudadas (pontual, uniforme ou  $L^2$ ). Assim, concluímos que a solução é dada por

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{\lambda_n t} X_n(x).$$

Vimos que para resolver a equação do calor, **devemos ser capazes de resolver o Problema (6.9.1)**. Além disso, este problema deve ter um conjunto grande de soluções para que toda função “razoável”  $f$  (contínua ou suave) possa ser escrita como uma soma infinita dessas soluções.

### Aplicação à Equação do Calor.

Vamos agora usar os resultados para finalmente resolver a equação do calor.

**6.9.2. Condições de Dirichlet.** Considere a seguinte equação:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & t > 0, x \in ]0, \pi[ \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in ]0, \pi[ \end{cases}.$$

Vimos que a solução é da forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \text{sen}(nx),$$

em que

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(nx).$$

Pelo que vimos acima, isto é sempre possível. Basta usar a expansão de Fourier seno. Temos

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \text{sen}(nx) dx.$$

Assim,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\pi} u_0(y) \text{sen}(ny) dy \right) e^{-n^2 t} \text{sen}(nx).$$

**6.9.3. Condições de Neumann.** Considere a seguinte equação:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & t > 0, x \in ]0, \pi[ \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in ]0, \pi[ \end{cases}$$

Vimos que a solução é da forma

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \cos(nx),$$

em que

$$u_0(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx).$$

Pelo que vimos acima, isto é sempre possível. Basta usar a expansão de Fourier cosseno. Temos

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \cos(nx) dx.$$

Assim,

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(y) dy + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\pi} u_0(y) \cos(ny) dy \right) e^{-n^2 t} \cos(nx).$$

OBSERVAÇÃO 257. Note que a solução do calor com condições de Dirichlet é tal que todos os termos da somatória vão a zero. Não é difícil de concluir que isto implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0.$$

Os termos da somatória da solução do calor com condições de Neumann também vão a zero. No entanto, o primeiro termo fora da somatória é constante. Assim

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(y) dy.$$

Nossa conclusão é:

Se uma barra tem temperatura constante igual a zero nas extremidades, a temperatura de toda a barra irá para zero para tempos grandes. No entanto, se a barra é isolada (não tem fluxo de calor nas extremidades), então a temperatura da barra tende a média da temperatura inicial, que é dada por

$$\int_0^\pi u(y, 0) dy = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u_0(y) dy.$$

### 6.10. Existência de solução da equação do calor em $[0, \pi]$

**6.10.1. Um teorema de convergência de série de Fourier.** Antes de mais nada, vamos definir a série de Fourier.

DEFINIÇÃO 258. Seja  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  uma função integrável. Definimos a série de Fourier (complexa) de  $f$  como a expressão abaixo

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

em que  $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy$  são os chamados coeficientes complexos da série de Fourier.

Note que a definição acima é uma definição não completamente rigorosa. Afinal, nada foi dito sobre como interpretar a soma  $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$ . Em geral, vamos definir

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}.$$

No entanto, também o sentido desse limite tem que ficar claro. Mais para a frente, daremos algumas possibilidades. Antes uma observação:

PROPOSIÇÃO 259. Seja  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  uma função integrável e  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$  sua série de Fourier. Logo, para todo  $N \in \mathbb{N}_0$ , temos

$$\sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx),$$

em que  $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos(ky) dy$  e  $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \operatorname{sen}(ky) dy$ .

DEMONSTRAÇÃO. De fato, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx} &= \sum_{k=-N}^N \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy \right) e^{ikx} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy + \sum_{k=1}^N \left[ \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy \right) e^{ikx} + \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{iky} dy \right) e^{-ikx} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy + \sum_{k=1}^N \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy \right) (\cos(kx) + i \operatorname{sen}(kx)) \\
&\quad \sum_{k=1}^N \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{iky} dy \right) (\cos(kx) - i \operatorname{sen}(kx)) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy + \sum_{k=1}^N \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \frac{e^{-iky} + e^{iky}}{2} dy \right) \cos(kx) \\
&\quad + \sum_{k=1}^N \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \frac{e^{iky} - e^{-iky}}{2i} dy \right) \operatorname{sen}(kx) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy + \sum_{k=1}^N \left[ \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos(ky) dy \right) \cos(kx) + \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \operatorname{sen}(ky) dy \right) \operatorname{sen}(kx) \right].
\end{aligned}$$

□

Isto nos motiva a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 260. Seja  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  uma função integrável. Definimos a série de Fourier (real) de  $f$  como a expressão abaixo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)),$$

em que  $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos(ky) dy$  e  $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \operatorname{sen}(ky) dy$  são chamados de coeficientes de Fourier reais.

Vamos agora mostrar um teorema que relaciona a série com a sua função. Antes um pequeno lema.

LEMA 261. Seja  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  uma função integrável. Logo, para cada  $r \in ]0, 1[$  e  $x \in [-\pi, \pi]$ , o limite abaixo existe uniformemente em  $[-\pi, \pi]$ :

$$f_r(x) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N c_k r^{|k|} e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N a_k r^k (\cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)),$$

em que  $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos(ky) dy$ ,  $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \operatorname{sen}(ky) dy$  e  $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy$ . A função  $f_r : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  assim definida é contínua.

DEMONSTRAÇÃO. Basta usar o critério de Weierstrass. Observamos antes que

$$|c_k| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)| dy.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=-N}^N c_k r^{|k|} e^{ikx} \right| &\leq \sum_{k=-N}^N |c_k| r^{|k|} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)| dy \sum_{k=-N}^N r^{|k|} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)| dy \left( 2 \sum_{k=0}^N r^{|k|} \right) \\ &= \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)| dy \right) \frac{1}{1-r}. \end{aligned}$$

Logo a série converge uniformemente.  $\square$

PROPOSIÇÃO 262. *Seja  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua tal que  $f(-\pi) = f(\pi)$ . Vamos definir, para cada  $r \in ]0, 1[$ , a função  $f_r : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  por*

$$f_r(x) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N c_k r^{|k|} e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N a_k r^k (\cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)),$$

em que  $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos(ky) dy$ ,  $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \operatorname{sen}(ky) dy$  e  $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy$ .

Logo as funções  $f_r$  convergem uniformemente para  $f$  quando  $r \rightarrow 1^-$ . Aqui  $1^-$  indica que o limite está sendo tomado para considerando apenas  $r < 1$ , ou seja, é um limite à esquerda.

DEMONSTRAÇÃO. Vamos supor que  $f$  assume apenas valores reais. Para o caso geral basta considerar as partes reais e imaginárias separadamente. Podemos identificar a função  $f$  a uma função contínua  $\tilde{f} : \partial B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\tilde{f}(\cos(t), \operatorname{sen}(t)) = f(t).$$

Vamos agora resolver o problema de Poisson na bola  $B(0, 1)$ :

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in B(0, 1) \\ u(x) = \tilde{f}(x), & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Vimos que existe uma única solução  $u \in C^2(B(0, 1)) \cap C(\overline{B(0, 1)})$  dada por  $\tilde{f}$  em  $\partial B(0, 1)$  e, em coordenadas polares, pela expressão abaixo em  $B(0, 1)$ :

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta-t) + r^2} f(t) dt.$$

Lembramos que vimos (em um exercício) que

$$\frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta-t) + r^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(\theta-t)}.$$

Note que a série converge uniformemente, já que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| r^{|k|} e^{ik(\theta-t)} \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} < 2 \sum_{k=0}^{\infty} r^k = 2 \frac{1}{1-r}.$$

Desta forma, temos

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(\theta-t)} f(t) dt \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t) dt \right) r^{|k|} e^{ik\theta} = f_r(\theta),$$

em que usamos em (1) que a soma converge uniformemente, portanto podemos trocar a ordem da integral e da soma.

Como  $u$  é uma função contínua, ela é uniformemente contínua, já que  $\overline{B(0, 1)}$  é um compacto. Assim, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|u(x) - u(y)| < \epsilon$  se  $|x - y| < \delta$ . Seja  $1 - \delta < r$ . Logo

$$|f_r(\theta) - f(\theta)| = |u(r, \theta) - u(1, \theta)| \leq \epsilon,$$

já que

$$|(r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta)) - (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))| = 1 - r < \delta.$$

Assim, concluímos que  $f_r$  converge uniformemente para  $f$  quando  $r \rightarrow 1^-$ .  $\square$

**COROLÁRIO 263.** *Seja  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua tal que  $f(0) = f(\pi) = 0$ . Para cada  $r \in ]0, 1[$ , definimos a função  $f_r : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  por*

$$f_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k r^k \operatorname{sen}(kx),$$

em que  $b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(y) \operatorname{sen}(ky) dy$ . Logo, a série converge uniformemente e  $f_r$  são funções contínuas que convergem uniformemente para  $f$  quando  $r \rightarrow 1^-$ .

**DEMONSTRAÇÃO.** Vamos definir  $\tilde{f} : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi] \\ -f(-x), & x \in [-\pi, 0[ \end{cases}.$$

Como  $f(0) = f(\pi) = 0$ , concluímos que  $\tilde{f}$  é contínua e  $\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi)$ . Assim, sabemos que a função  $\tilde{f}_r : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  definida abaixo é contínua e converge para  $\tilde{f}$  quando  $r \rightarrow 1^-$ :

$$\tilde{f}_r(x) := \frac{a_0}{2} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N a_k r^k (\cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)),$$

em que  $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(y) \cos(ky) dy$  e  $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(y) \operatorname{sen}(ky) dy$ .

Como  $\tilde{f}$  é uma função ímpar, temos que

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(y) \cos(ky) dy = 0,$$

pois cosseno é par, logo  $y \mapsto \tilde{f}(y) \cos(ky)$  é função ímpar. Por outro lado, temos

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(y) \operatorname{sen}(ky) dy = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{f}(y) \operatorname{sen}(ky) dy = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(y) \operatorname{sen}(ky) dy.$$

Juntando tudo, concluímos que para  $x \in [0, \pi]$ ,  $\tilde{f}_r(x) = f_r(x)$ . Como  $\tilde{f}_r$  converge uniformemente para  $\tilde{f}$ , o mesmo ocorre para  $f$ : As funções  $f_r$  convergem uniformemente para  $f$ .  $\square$

**6.10.2. Demonstração de existência de solução.** Nosso objetivo é resolver o seguinte problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & t > 0, x \in ]0, \pi[ \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Para tanto, precisamos de vários preliminares.

**LEMA 264.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado e  $u_0 : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que  $u|_{\partial U} = 0$ . Se  $u \in C^{2,1}(U \times ]0, T]) \cap C(\bar{U} \times [0, T])$  é solução de*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \Delta u(x, t), & t > 0, x \in ]0, \pi[ \\ u(x, t) = 0, & t > 0, x \in \partial U \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{U} \end{cases},$$

então

$$\|u\|_{L^\infty(\bar{U} \times [0, T])} := \max_{(x,t) \in \bar{U} \times [0, T]} |u(x)| \leq \|u_0\|_{L^\infty(\bar{U})} := \max_{x \in \bar{U}} |u_0(x)|.$$

DEMONSTRAÇÃO. Note que se  $u_0|_{\partial U} = 0$ , então podemos definir  $g : \bar{U} \times \{0\} \cup \partial U \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$g(x, t) = \begin{cases} u_0(x), & x \in \bar{U}, t = 0 \\ 0, & (x, t) \in \partial U \times ]0, T[ \end{cases}.$$

Esta função é contínua. Logo

$$\begin{aligned} \min_{(x,t) \in \bar{U} \times [0, T]} u &= \min_{(x,t) \in \partial U \times [0, T] \cup \bar{U} \times \{0\}} u = \min_{(x,t) \in \partial U \times [0, T] \cup \bar{U} \times \{0\}} g = \min_{\bar{U}} u_0. \\ \max_{(x,t) \in \bar{U} \times [0, T]} u &= \max_{(x,t) \in \partial U \times [0, T] \cup \bar{U} \times \{0\}} u = \max_{(x,t) \in \partial U \times [0, T] \cup \bar{U} \times \{0\}} g = \max_{\bar{U}} u_0. \end{aligned}$$

Assim

$$\min_{\bar{U}} u_0 \leq u(x, t) \leq \max_{\bar{U}} u_0.$$

Ou seja,

$$|u(x, t)| \leq \max_{x \in \bar{U}} |u_0(x)|.$$

□

LEMA 265. Seja  $u_0(x) = \sum_{k=1}^N b_k \text{sen}(kx)$ ,  $N \in \mathbb{N}$ ,  $b_k \in \mathbb{R}$ . Logo  $u(x, t) = \sum_{k=1}^N b_k e^{-k^2 t} \text{sen}(kx)$  é uma função em  $C^\infty([0, \pi] \times [0, \infty[)$  é uma solução da equação do calor com condições de Dirichlet e condição inicial  $u_0$ .

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que

1) A função  $u$  é solução da equação do calor, pois

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{k=1}^N b_k e^{-k^2 t} \text{sen}(kx) \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \sum_{k=1}^N b_k e^{-k^2 t} \text{sen}(kx) \right) = - \sum_{k=1}^N b_k k^2 e^{-k^2 t} \text{sen}(kx).$$

2) Basta observar que

$$\sum_{k=1}^N b_k e^{-k^2 t} \text{sen}(k0) = \sum_{k=1}^N b_k e^{-k^2 t} \text{sen}(k\pi) = 0.$$

3) A condição inicial é

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^N b_k e^{-k^2 \cdot 0} \text{sen}(kx) = \sum_{k=1}^N b_k \text{sen}(kx).$$

□

LEMA 266. Seja  $u_0 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua tal que  $u(0) = u(\pi) = 0$ . Logo existe uma sequência  $u_{n0} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  de funções da forma

$$u_{n0}(x) = \sum_{k=1}^{N_n} b_k^n \text{sen}(kx)$$

tal que

- 1)  $|b_k^n| \leq |b_k|$ , em que  $b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u_0(y) \text{sen}(ky) dy$ .
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_k^n = b_k$ .
- 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{n0} - u_0\|_{L^\infty(0, \pi)} = 0$ .

DEMONSTRAÇÃO. Vamos definir a seguinte sequência  $u_{n0} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$u_{n0}(x) = \sum_{k=1}^{N_n} b_k^n \text{sen}(kx),$$

em que

$$b_k^n = \left( \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \text{sen}(kt) dt \right) \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^k.$$

A constante  $N_n \in \mathbb{N}$  é escolhida de forma que

$$\sum_{k=N_n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k < \frac{1}{n}.$$

Isto é possível, pois

$$\sum_{k=N_n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{N_n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{N_n+1}}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)} = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{N_n+1}$$

e  $\lim_{N_n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{N_n+1} = 0$ , já que  $1 - \frac{1}{n} < 1$ .

Vamos agora verificar as propriedades que queríamos:

1)  $|b_k^n| \leq |b_k|$ .

Temos

$$|b_k^n| = \left| \left( \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(kt) dt \right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \right| \leq \left| \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(kt) dt \right| = |b_k|.$$

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_k^n = b_k$ .

De fato, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_k^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(kt) dt \right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(kt) dt.$$

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{n0} - u_0\|_{L^\infty(0, \pi)} = 0$ .

Isto pode ser provado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} |u_{n0}(x) - u_0(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{N_n} b_k^n \operatorname{sen}(kx) - u_0(x) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^{N_n} b_k^n \operatorname{sen}(kx) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k^n \operatorname{sen}(kx) \right| + \left| \sum_{k=1}^{\infty} b_k^n \operatorname{sen}(kx) - u_0(x) \right| \\ &= \left| \sum_{k=N_n+1}^{\infty} b_k^n \operatorname{sen}(kx) \right| + \left| \sum_{k=1}^{\infty} b_k^n \operatorname{sen}(kx) - u_0(x) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^{\infty} b_k^n \operatorname{sen}(kx) - u_0(x) \right| + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Vimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} b_k^n \operatorname{sen}(kx) - u_0(x) \right| = 0$$

uniformemente. Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{n0} - u_0\|_{L^\infty(0, \pi)} = 0.$$

□

**TEOREMA 267.** *Seja  $u_0 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que  $u_0(0) = u_0(\pi) = 0$ . Logo existe uma única função  $u \in C([0, \pi] \times [0, \infty]) \cap C^{2,1}([0, \pi] \times ]0, \infty[)$  da equação abaixo:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & t > 0, x \in ]0, \pi[ \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, \pi] \end{cases}.$$

Além disso,  $u \in C^\infty([0, \pi] \times ]0, \infty[)$ .

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos  $b_k$  definido como

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u_0(y) \operatorname{sen}(ky) dy.$$

Seja  $u : [0, \pi] \times [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t} \operatorname{sen}(kx), & t > 0, x \in [0, \pi] \\ u_0(x) & t = 0, x \in [0, \pi] \end{cases}.$$

Vamos verificar que essa função satisfaz as propriedades que queremos.

1)  $u \in C^\infty([0, \pi] \times ]0, \infty[)$  e para todo  $\bar{t} > 0$ , a série converge uniformemente em  $[0, \pi] \times [\bar{t}, \infty[$ .

Basta observar que para  $t > \bar{t}$ , então

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\partial^{j+l}}{\partial x^j \partial t^l} (b_k e^{-k^2 t} \operatorname{sen}(kx)) \right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| k^{2l+j} e^{-k^2 \bar{t}} \\ &\leq \left( \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |f(y)| dy \right) \sum_{k=1}^{\infty} k^{2l+j} e^{-k^2 \bar{t}} < \infty. \end{aligned}$$

Usamos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} k^N e^{-k^2 \bar{t}} = 0$  para qualquer  $N \in \mathbb{N}$ . Logo existe uma constante  $C_N > 0$  tal que  $e^{-k^2 \bar{t}} \leq C_N k^{-N}$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Em particular, para  $N = 2l + j + 2$ , temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2l+j} e^{-k^2 \bar{t}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{2l+j} k^{-2l-j-2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Como tanto a série como as duas derivadas convergem uniformemente para  $t > \bar{t}$ , concluímos que  $u$  é  $C^\infty([0, \pi] \times [\bar{t}, \infty[)$ . Como  $\bar{t}$  é arbitrário, concluímos que  $u$  é  $C^\infty([0, \pi] \times ]0, \infty[)$ .

2)  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ , se  $t > 0$ .

Como a série converge pontualmente para  $t > 0$ , temos

$$u(0, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N b_k e^{-k^2 t} \operatorname{sen}(k0) = 0$$

e

$$u(\pi, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N b_k e^{-k^2 t} \operatorname{sen}(k\pi) = 0.$$

3) A função  $u$  é contínua.

Aqui é claro que a dificuldade está na continuidade em  $t = 0$ , já que para  $t > 0$  a função é  $C^\infty$ .

Seja  $u_{n0}(x) = \sum_{k=1}^{N_n} b_k^n \operatorname{sen}(kx)$  a sequência com as propriedades do Lema 266. Seja  $u_n : [0, \pi] \times [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$u_n(x, t) = \sum_{k=1}^{N_n} b_k^n e^{-k^2 t} \operatorname{sen}(kx).$$

Logo, pelo Lema 265, as funções  $u_n$  são soluções de

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, t), & t > 0, x \in ]0, \pi[ \\ u_n(0, t) = u_n(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u_n(x, 0) = u_{n0}(x), & x \in [0, \pi] \end{cases}.$$

Pelo Lema 264, temos que para todo  $T > 0$ , que

$$\|u_n - u_m\|_{L^\infty([0, \pi] \times [0, T])} \leq \|u_{n0} - u_{m0}\|_{L^\infty([0, \pi])} \leq \|u_{n0} - u_0\|_{L^\infty([0, \pi])} + \|u_{m0} - u_0\|_{L^\infty([0, \pi])}.$$

Como  $u_{n0}$  converge uniformemente para  $u_0$ , concluímos que  $u_n$  é uma sequência de Cauchy. Logo converge para uma função contínua  $v : [0, \pi] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ . Agora basta mostrar que  $v = u$ . Isto implicará que  $u$  é contínua.

Se  $t = 0$ , temos

$$v(x, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n0}(x) = u_0(x) = u(x, 0).$$

Para provar para  $t > 0$ , vamos denotar  $b_k^n = 0$  se  $k > N_n$ . Neste caso, temos

$$v(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^n e^{-k^2 t} \text{sen}(kx) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t} \text{sen}(kx) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} (b_k^n - b_k) e^{-k^2 t} \text{sen}(kx).$$

Note que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{\infty} (b_k^n - b_k) e^{-k^2 t} \text{sen}(kx) \right| &\leq \sum_{k=1}^N e^{-k^2 t} |b_k^n - b_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{-k^2 t} |b_k^n - b_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^N e^{-k^2 t} |b_k^n - b_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{-k^2 t} 2|b_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^N e^{-k^2 t} |b_k^n - b_k| + \left( \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} |f(y)| dy \right) \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{-k^2 t}. \end{aligned}$$

Dado um  $\epsilon > 0$ , escolhemos  $N$  tal que

$$\left( \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} |f(y)| dy \right) \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{-k^2 t} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Para basta escolher  $M$  grande de tal forma

$$|b_k^n - b_k| < \frac{\epsilon}{2N}.$$

Assim, para  $n > M$ , temos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{\infty} (b_k^n - b_k) e^{-k^2 t} \text{sen}(kx) \right| &\leq \sum_{k=1}^N e^{-k^2 t} |b_k^n - b_k| + \left( \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} |f(y)| dy \right) \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{-k^2 t} \\ &\leq N \frac{\epsilon}{2N} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^n e^{-k^2 t} \text{sen}(kx) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t} \text{sen}(kx) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} (b_k^n - b_k) e^{-k^2 t} \text{sen}(kx) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t} \text{sen}(kx) = u(x, t). \end{aligned}$$

□

## Equação da Onda

Assim como fizemos na equação do calor, vamos começar deduzindo a equação da onda dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \Delta u,$$

em que  $v$  é uma constante e indica a velocidade da onda. Nas seções posteriores assumiremos que  $v = 1$  para facilitar a análise. Isto não tem perda de generalidade, já que  $w(x, t) = u(x, \frac{t}{v})$  é solução da equação da onda com  $v = 1$ .

### 7.1. Dedução física da equação da onda

Vamos ver a dedução da equação da onda em dois contextos: a equação da onda na corda e a equação da onda no eletromagnetismo.

**7.1.1. Equação da onda no eletromagnetismo.** Lembramos que as equações de Maxwell podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot E &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \times B &= \mu_0 \left( J + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \end{aligned} ,$$

Aqui  $E, B : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $U \subset \mathbb{R}^3$  um aberto. Na equações acima,  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  são constantes físicas,  $E$  é o campo elétrico e  $B$  é o campo magnético. A função  $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}$  representa a densidade de carga elétrica e a função  $J : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  representa a corrente elétrica.

No vácuo, ou seja, na ausência de cargas e correntes, as equações acima nos leva às equações

$$\begin{aligned} \text{EM 1) } \nabla \cdot E &= 0 \\ \text{EM 2) } \nabla \cdot B &= 0 \\ \text{EM 3) } \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \text{EM 4) } \nabla \times B &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \end{aligned}$$

Para deduzir a equação da onda, vamos supor que  $E$  e  $B$  são de classe  $C^2$  e vamos usar a seguinte relação, válida para qualquer função  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^2$ :

$$(7.1.1) \quad \nabla \times (\nabla \times F) = \nabla(\nabla \cdot F) - \Delta F.$$

Logo

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial B}{\partial t} \right) \stackrel{(1)}{=} -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times E) = -\nabla \times \frac{\partial E}{\partial t} \\ &\stackrel{(2)}{=} -\nabla \times \left( \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla \times B \right) = -\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla \times (\nabla \times B) \\ &\stackrel{(3)}{=} -\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} (\nabla(\nabla \cdot B) - \Delta B) \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \Delta B.\end{aligned}$$

Acima usamos em (1) a equação EM 3), em (2) usamos a equação EM 4), em (3) usamos a expressão 7.1.1, em (4), usamos a equação EM 2). Concluimos que

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \Delta B,$$

em que  $\Delta B = \Delta(B_1, B_2, B_3) = (\Delta B_1, \Delta B_2, \Delta B_3)$ .

O mesmo argumento pode ser feito para o campo elétrico:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial E}{\partial t} \right) \stackrel{(1)}{=} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla \times B \right) = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla \times \frac{\partial B}{\partial t} \\ &\stackrel{(2)}{=} -\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla \times (\nabla \times E) \\ &\stackrel{(3)}{=} -\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} (\nabla(\nabla \cdot E) - \Delta E) \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \Delta E.\end{aligned}$$

Acima usamos em (1) a equação EM 4), em (2) usamos a equação EM 3), em (3) usamos a expressão 7.1.1, em (4), usamos a equação EM 1). Concluimos que

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \Delta E.$$

Nossa conclusão é que tanto o campo elétrico como o campo magnético satisfazem a equação de onda. A velocidade dada por  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$  é a velocidade da luz.

**7.1.2. Equação da onda numa corda.** Vamos fazer uma rápida dedução da equação de onda. Consideremos uma onda numa corda. O deslocamento transversal da corda (perpendicular a corda em repouso) será denotado por  $u(x, t)$ . O ponto  $x \in I \subset \mathbb{R}$ ,  $I$  um intervalo, corresponde a um ponto da corda. A variável  $t$  corresponde ao tempo. Faremos as seguintes suposições:

i) A corda é perfeitamente flexível (assim, um ponto da corda sobe e desce, mas sempre se mantém na coordenada  $x$ ).

ii) A massa da corda por unidade de comprimento é constante. Sua densidade será denotada por  $\rho$ .

iii) Os deslocamentos  $u$  são pequeno comparados com o comprimento da corda.

iv) A inclinação da corda é pequena em todos os pontos.

v) A tensão atua tangencialmente à corda e seu módulo  $T$  é o mesmo em todos os pontos.

vi) A gravidade e outras forças externas são desprezadas.

Veja a figura abaixo:aulatma142020.jpg

FIGURA 7.1.1

Note que no segmento  $\Delta s$ , que ocupa o intervalo  $[x, x + \Delta x]$ , temos:

Massa do pedaço:  $\Delta s \approx \rho \Delta x$ . Como a corda é perfeitamente flexível, a massa da corda em  $\Delta x$  se mantém a mesma, pois pedaços da corda não mudam de posição na coordenada  $x$ .

Aceleração vertical do pedaço  $\Delta s \approx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x)$ .

Força sobre o pedaço  $\Delta s$  é igual a  $T \text{sen}(\theta_2) - T \text{sen}(\theta_1)$ .

Agora observamos que, pela série de Taylor, temos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\theta) &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \\ \operatorname{tg}(\theta) &= \theta + \frac{\theta^3}{3} + \dots\end{aligned}$$

Note que o primeiro termo da série de Taylor de ambos é 0. O segundo é  $\theta$  e o terceiro (correspondente a  $\theta^2$ ) é zero. Logo ambas as funções têm os três primeiros termos da série iguais. Assim é razoável supor que  $\operatorname{sen}(\theta) \approx \operatorname{tg}(\theta)$  para  $\theta$  pequeno.

Porém  $\operatorname{tg}(\theta_1) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, x)$  e  $\operatorname{tg}(\theta_2) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, x + \Delta x)$ . Usando a segunda lei de Newton (Força é igual a massa vezes aceleração), concluímos que

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = T \left( \frac{\partial u}{\partial x}(t, x + \Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right).$$

Assim

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = T \frac{\left( \frac{\partial u}{\partial x}(t, x + \Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)}{\Delta x}.$$

Supondo  $\Delta x$  suficientemente pequeno, concluímos que uma boa aproximação da segunda lei para a corda é dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x).$$

A velocidade da onda aqui é dada por  $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ .

### 7.1.3. Exercícios.

EXERCÍCIO 268. (FOLLAND 2.A.2) Seja  $T_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear cuja matriz na base canônica é dada por  $\begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix}$ . Mostre que se  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ , então

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (u(T_\theta(x, t))) = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (T_\theta(x, t)).$$

Note que  $T_\theta(x, t) = (\cosh(\theta)x + \sinh(\theta)t, \sinh(\theta)x + \cosh(\theta)t)$ . Acima,  $\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (u(T_\theta(x, t)))$  é o operador  $\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)$  agindo na função  $(x, t) \mapsto u(T_\theta(x, t))$  e  $\left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (T_\theta(x, t))$  é a função  $\left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$  no ponto  $T_\theta(x, t)$ .

## 7.2. Equação da onda em $\mathbb{R}$

Vamos agora estudar a equação da onda no espaço  $\mathbb{R}$ , ou seja, a equação será dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t),$$

em que  $t \in \mathbb{R}$  e  $x \in \mathbb{R}$ . Vamos supor que  $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ .

Uma forma de trabalhar com essa equação é fazendo a mudança de variável  $s = x + t$  e  $r = x - t$ . Seja  $v(r, s) = u\left(\frac{r+s}{2}, \frac{s-r}{2}\right)$ . Logo

$$\frac{\partial v}{\partial r}(r, s) = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{r+s}{2}, \frac{s-r}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \left( \frac{r+s}{2}, \frac{s-r}{2} \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial r}(r, s) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{r+s}{2}, \frac{s-r}{2} \right) \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \left( \frac{r+s}{2}, \frac{s-r}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left( \frac{r+s}{2}, \frac{s-r}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \left( \frac{r+s}{2}, \frac{s-r}{2} \right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x \partial t} \left( \frac{r+s}{2}, \frac{s-r}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \left( \frac{r+s}{2}, \frac{s-r}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left( \frac{r+s}{2}, \frac{s-r}{2} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \left( \frac{r+s}{2}, \frac{s-r}{2} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Agora note que  $\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial v}{\partial r}(r, s) \right) = 0$ , implica que  $\frac{\partial v}{\partial r}$  não depende de  $s$ . Logo  $\frac{\partial v}{\partial r}(r, s) = A(r)$ . Seja  $\tilde{A}(r) = \int_0^r A(r') dr'$ . Logo

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( v(r, s) - \int_0^r A(r') dr' \right) = 0.$$

Assim,  $v(r, s) - \int_0^r A(r') dr'$  não depende de  $r$ . Portanto,

$$v(r, s) = \int_0^r A(r') dr' + B(s).$$

Concluimos que existem funções  $f$  e  $k$  em  $C^2(\mathbb{R})$  tais que

$$v(r, s) = f(r) + k(s).$$

Portanto, como  $v(r, s) = u\left(\frac{r+s}{2}, \frac{s-r}{2}\right)$ , temos que  $u(x, t) = v(x-t, x+t)$ , ou seja,

$$u(x, t) = f(x-t) + k(x+t).$$

Mas como podemos determinar  $f$  e  $k$ ? Vamos recordar o que sabemos de EDO.

Nos cursos de EDO, quando estudamos equações do tipo

$$\sum_{j=0}^k a_j(t) \frac{d^j u}{dt^j}(t) = a(t),$$

em que  $a_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas e  $a_k(t) \neq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , nós precisamos de condições iniciais em  $\frac{d^j u}{dt^j}(0)$ , para  $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$  para determinar a solução de maneira única. Ou seja, precisamos de  $k$  condições iniciais.

Essa propriedade de certa forma também aparece no nosso estudo de EDPs. De fato, na equação do calor, temos uma derivada temporal. Assim, precisamos de apenas uma condição inicial em  $u(x, 0)$ . Na equação da onda, temos duas derivadas temporais. Assim, para determinar de maneira única a solução, precisamos de duas condições iniciais: em  $u(x, 0)$  e  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$ . Vamos então resolver a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & (x, t) &\in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x, 0) &= g(x), & x &\in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= h(x), & x &\in \mathbb{R} \end{aligned} .$$

Estamos supondo que  $u$  é uma função de classe  $C^2$ . Assim, é razoável supor que  $g \in C^2(\mathbb{R})$  e  $h \in C^1(\mathbb{R})$ . Já vimos que existem funções  $f$  e  $k$  tais que

$$u(x, t) = f(x-t) + k(x+t).$$

Assim, temos que

$$(7.2.1) \quad g(x) = u(x, 0) = f(x) + k(x)$$

e

$$h(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -f'(x) + k'(x).$$

Assim, temos que

$$(7.2.2) \quad H(x) := \int_0^x h(y)dy = - \int_0^x f'(y)dy + \int_0^x k'(y)dy = -f(x) + f(0) + k(x) - k(0)$$

Somando as equações 7.2.1 e 7.2.2, obtemos

$$g(x) + H(x) = f(0) + 2k(x) - k(0).$$

Portanto

$$k(x) = \frac{1}{2}(g(x) + H(x) + k(0) - f(0))$$

e

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) - k(x) = g(x) - \frac{1}{2}(g(x) + H(x) + k(0) - f(0)) \\ &= \frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{2}H(x) - \frac{1}{2}k(0) + \frac{1}{2}f(0). \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} u(x, t) &= f(x-t) + k(x+t) = \frac{1}{2}g(x-t) - \frac{1}{2}H(x-t) - \frac{1}{2}k(0) + \frac{1}{2}f(0) \\ &\quad + \frac{1}{2}g(x+t) + \frac{1}{2}H(x+t) + \frac{1}{2}k(0) - \frac{1}{2}f(0) \\ &= \frac{1}{2}(g(x-t) + g(x+t)) + \frac{1}{2}(H(x+t) - H(x-t)) \\ &= \frac{1}{2}(g(x-t) + g(x+t)) + \frac{1}{2}\left(\int_0^{x+t} h(y)dy - \int_0^{x-t} h(y)dy\right) \\ &= \frac{1}{2}(g(x-t) + g(x+t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy. \end{aligned}$$

Podemos assim, enunciar o seguinte Teorema:

**TEOREMA 269.** *Sejam  $g \in C^2(\mathbb{R})$  e  $h \in C^1(\mathbb{R})$ . Logo existe uma função  $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  que é solução do problema*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & (x, t) &\in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x, 0) &= g(x), & x &\in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= h(x), & x &\in \mathbb{R} \end{aligned} .$$

*Esta solução é dada por*

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(g(x-t) + g(x+t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy.$$

*A fórmula acima é chamada de **Fórmula de d'Alembert**.*

**DEMONSTRAÇÃO.** Usando a regularidade de  $g$  e  $h$  é fácil observar que

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(g(x-t) + g(x+t)) + \frac{1}{2}\int_0^{x+t} h(y)dy - \frac{1}{2}\int_0^{x-t} h(y)dy$$

é tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= -\frac{1}{2}g'(x-t) + \frac{1}{2}g'(x+t) + \frac{1}{2}h(x+t) + \frac{1}{2}h(x-t) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \frac{1}{2}g''(x-t) + \frac{1}{2}g''(x+t) + \frac{1}{2}h'(x+t) - \frac{1}{2}h'(x-t) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= \frac{1}{2}g'(x-t) + \frac{1}{2}g'(x+t) + \frac{1}{2}h(x+t) - \frac{1}{2}h(x-t) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= \frac{1}{2}g''(x-t) + \frac{1}{2}g''(x+t) + \frac{1}{2}h'(x+t) - \frac{1}{2}h'(x-t) \end{aligned}$$

Assim, vemos facilmente que  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$ . Podemos ver também que

$$u(x, 0) = \frac{1}{2}(g(x) + g(x)) + \frac{1}{2}\int_0^x h(y)dy - \frac{1}{2}\int_0^x h(y)dy = g(x)$$

e que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -\frac{1}{2}g'(x) + \frac{1}{2}g'(x) + \frac{1}{2}h(x) + \frac{1}{2}h(x) = h(x).$$

Por fim, a unicidade, pode ser vista usando o argumento feito anteriormente. Vemos que se  $u$  for solução da equação da equação de onda, então existem funções  $f$  e  $k$  tais que

$$u(x, t) = f(x - t) + k(x + t).$$

Usando as condições iniciais, podemos argumentar como fizemos anteriormente, determinar as funções  $f$  e  $k$  a partir de  $g$  e  $h$  e concluir que a fórmula de d'Alembert vale.  $\square$

### 7.2.1. Exercícios.

EXERCÍCIO 270. (Prova de 2019) Mostre que se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forem funções contínuas, então

$$u(x, t) = f(x - t) + k(x + t)$$

é solução da equação de onda no sentido de distribuições.

(Dica: Lembre-se que isto quer dizer que  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} T_u - \frac{\partial^2}{\partial x^2} T_u = 0$ , em que  $T_u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} u(x, t)\varphi(x, t) dx dt$ , para  $\varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$ . Usando a definição de derivada de distribuições, o que devemos provar é que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} T_u(\varphi) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} T_u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} u(x, t) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t) \right) dx dt = 0,$$

para toda função  $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ . Note que  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right)$ . Logo, para que uma distribuição  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$  satisfaça  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ , basta que  $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  ou  $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ .

EXERCÍCIO 271. Considere a seguinte função  $\chi_V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\chi_V(x, t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \text{ e } |x| < t \\ 0, & \text{de outra forma} \end{cases}.$$

Mostre que  $\frac{1}{2}\chi_V$  é uma solução fundamental da equação de onda, isto é,  $\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{1}{2}\chi_V = \delta_0$ .

Dica: Lembre-se que isto quer dizer que para todo  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ , temos

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) T_{\frac{1}{2}\chi_V}(\varphi) = \delta_0(\varphi) \iff T_{\frac{1}{2}\chi_V} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = \delta_0(\varphi),$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_V(x, t) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t) \right) dx dt = \varphi(0, 0).$$

### 7.3. A equação da onda em $[0, \infty[$

Usando a equação de d'Alembert, podemos resolver também a equação da onda na semireta. Note que agora temos uma borda. Assim, precisamos de uma condição de contorno. Vamos usar a condição de Dirichlet. Assim, as equações se tornam

$$(7.3.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & (x, t) &\in [0, \infty[ \times \mathbb{R} \\ u(0, t) &= 0, & t &\in \mathbb{R} \\ u(x, 0) &= g(x), & x &\in [0, \infty[ \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= h(x), & x &\in [0, \infty[ \end{aligned}.$$

Vamos supor que  $g \in C^2([0, \infty[)$ ,  $g(0) = 0$ ,  $g''(0) = 0$ ,  $h \in C^1([0, \infty[)$  e  $h(0) = 0$ . Vamos começar com um lema.

LEMA 272. *Suponha que  $u \in C^2([0, \infty[\times\mathbb{R})$ ,  $g \in C^2([0, \infty[)$  e  $h \in C^1([0, \infty[)$ . Se  $u(0, t) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $g''(0) = 0$ , então  $\tilde{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\tilde{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidos por*

$$\tilde{u}(x, t) := \begin{cases} u(x, t), & x \geq 0 \\ -u(-x, t), & x < 0 \end{cases}, \quad \tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x), & x \geq 0 \\ -g(-x), & x < 0 \end{cases}, \quad \tilde{h}(x) := \begin{cases} h(x), & x \geq 0 \\ -h(-x), & x < 0 \end{cases}$$

*são de classe  $C^2(\mathbb{R}^2)$ ,  $C^2(\mathbb{R})$  e  $C^1(\mathbb{R})$ , respectivamente. Além disso, a função  $u$  satisfiz a Equação 7.3.1, se, e somente se, a função  $\tilde{u}$  satisfaz a equação abaixo:*

$$(7.3.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}(x, t) &= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ \tilde{u}(0, t) &= 0, & t \in \mathbb{R} \\ \tilde{u}(x, 0) &= \tilde{g}(x), & x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x, 0) &= \tilde{h}(x), & x \in \mathbb{R} \end{aligned} .$$

DEMONSTRAÇÃO. É bastante claro que  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{g}$  e  $\tilde{h}$  são de classe  $C^2$ ,  $C^2$  e  $C^1$  fora da origem. Observe que como  $h(0) = 0$ , temos que  $\tilde{h}$  é contínua em  $x = 0$ . Logo é contínua em todo  $\mathbb{R}$ . O mesmo argumento vale para  $u$  e  $g$ . Agora observamos que

$$\tilde{h}'(x) := \begin{cases} h'(x), & x > 0 \\ h'(x), & x < 0 \end{cases} .$$

Logo  $\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{h}'(x) = h'(0)$ . Portanto,  $\tilde{h}$  é derivável em 0 e sua derivada é igual a  $h'(0)$ . O mesmo argumento pode ser usado para  $g$ .

Para as segundas derivadas, note que

$$\tilde{g}''(x) = \begin{cases} g''(x), & x \geq 0 \\ -g''(-x), & x < 0 \end{cases} .$$

Logo  $\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{g}''(x) = g''(0)$ . Portanto,  $\tilde{g}$  é duas vezes derivável em 0 e sua derivada segunda é igual a  $g''(0)$ . Para  $u$  note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x, t) &:= \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t), & x \geq 0 \\ -\frac{\partial u}{\partial t}(-x, t), & x < 0 \end{cases}, & \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}(x, t) &:= \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t), & x \geq 0 \\ -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(-x, t), & x < 0 \end{cases}, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x, t) &:= \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t), & x \geq 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(-x, t), & x < 0 \end{cases}, & \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(x, t) &:= \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & x \geq 0 \\ -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(-x, t), & x < 0 \end{cases}, \\ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x \partial t}(x, t) &:= \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x, t), & x \geq 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(-x, t), & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Observe que como  $u(0, t) = 0$ , temos que  $\frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t) = 0$ . Note também que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, t)$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x \partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(0, t)$ . Logo essas derivadas também existem. Por fim, temos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t) = 0.$$

Assim, temos  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(x, t) = 0$  e a derivada existe.

Por fim, é claro que se  $\tilde{u}$  satisfaz a Equação 7.3.2, então sua restrição  $u$  para  $x \geq 0$  satisfaz 7.3.1. Por outro lado, se  $u$  satisfaz 7.3.1, então  $\tilde{u}$  satisfaz 7.3.1 pela própria definição das funções  $\tilde{h}$ ,  $\tilde{g}$  e  $\tilde{u}$ .  $\square$

Consequimos assim, provar o seguinte Teorema.

TEOREMA 273. *Seja  $g \in C^2([0, \infty[)$  e  $h \in C^1([0, \infty[)$  tais que  $g(0) = g''(0) = 0$  e  $h(0) = 0$ . Logo existe uma única solução  $u \in C^2([0, \infty[\times[0, \infty[)$  da equação 7.3.1. Essa solução é dada por*

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy, & x \geq t \geq 0 \\ \frac{1}{2}(g(x+t) - g(t-x)) + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} h(y) dy, & t \geq x \geq 0 \end{cases} .$$

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que  $u$  é a restrição de  $\tilde{u}$ . A unicidade de  $u$  decorre da unicidade de  $\tilde{u}$ .

Além disso, a expressão para  $u$  decorre da expressão de  $\tilde{u}$  dada abaixo:

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2}(\tilde{g}(x-t) + \tilde{g}(x+t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y) dy.$$

Para  $x \geq t \geq 0$ , temos que  $x-t \geq 0$  e  $x+t \geq 0$ . Assim

$$\frac{1}{2}(\tilde{g}(x-t) + \tilde{g}(x+t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y) dy = \frac{1}{2}(g(x-t) + g(x+t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy.$$

Para  $t \geq x \geq 0$ , temos  $x+t \geq 0$ , mas  $x-t \leq 0$ . Assim

$$\frac{1}{2}(\tilde{g}(x-t) + \tilde{g}(x+t)) = \frac{1}{2}(-g(-(x-t)) + g(x+t)) = \frac{1}{2}(g(x+t) - g(t-x)).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y) dy &= \int_0^{x+t} \tilde{h}(y) dy + \int_{x-t}^0 \tilde{h}(y) dy = \int_0^{x+t} h(y) dy - \int_{x-t}^0 h(-y) dy \\ &= \int_0^{x+t} h(y) dy - \int_0^{t-x} h(y) dy = \int_{t-x}^{t+x} h(y) dy. \end{aligned}$$

Juntando tudo, temos

$$\frac{1}{2}(\tilde{g}(x-t) + \tilde{g}(x+t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y) dy = \frac{1}{2}(g(x+t) - g(t-x)) + \int_{t-x}^{t+x} h(y) dy.$$

□

#### 7.4. A equação da onda para $n \geq 2$

Vamos agora resolver a seguinte equação:

$$(7.4.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \Delta u(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= h(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}.$$

Para estudar a Equação 7.4.1, vamos definir as seguintes funções para  $t, r > 0$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$U(x, r, t) := \int_{\partial B(x, r)} u(y, t) dS(y), \quad G(x, r) := \int_{\partial B(x, r)} g(y) dS(y), \quad H(x, r) := \int_{\partial B(x, r)} h(y) dS(y).$$

LEMA 274. *Se  $u \in C^m(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[)$  é solução da Equação 7.4.1, então  $U \in C^m([0, \infty[ \times [0, \infty[)$  e  $U$  é solução da seguinte equação*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(r, t) - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(r, t) - \frac{n-1}{r} \frac{\partial U}{\partial r}(r, t) &= 0 & [0, \infty[ \times [0, \infty[ \\ U(r, 0) = G(r), \quad \frac{\partial U}{\partial t}(r, 0) = H(r) & & [0, \infty[ \times \{0\} \end{aligned}$$

As equações acima são chamadas de Equação de Euler-Poisson-Darboux.

DEMONSTRAÇÃO. Note que

$$\begin{aligned} U(x, r, t) &= \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} u(y, t) dS(y) \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(0, 1)} u(x + rz, t) r^{n-1} dS(z) \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{|\partial B(0, 1)|} \int_{\partial B(0, 1)} u(x + rz, t) dS(z), \end{aligned}$$

em que usamos o Lema 37 em (1) e (2). Assim, vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x, r, t) &= \frac{1}{|\partial B(0, 1)|} \int_{\partial B(0, 1)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x + rz, t) dS(z) \\ &= \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(y, t) dS(y) = \int_{\partial B(x, r)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(y, t) dS(y) \end{aligned}$$

Temos também que

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial r}(x, r, t) &= \frac{1}{|\partial B(0, 1)|} \int_{\partial B(0, 1)} z \cdot \nabla u(x + rz, t) dS(z) = \frac{1}{|\partial B(0, 1)|} \int_{\partial B(0, 1)} \nabla u(x + rz, t) \cdot n(z) dS(z) \\ &= \frac{r}{|\partial B(0, 1)|} \int_{B(0, 1)} \Delta u(x + rz, t) dz = \frac{r^{1-n}}{|\partial B(0, 1)|} \int_{B(x, r)} \Delta u(y, t) dy \\ &= \frac{r^{1-n}}{n|B(0, 1)|} \int_{B(x, r)} \Delta u(y, t) dy = \frac{r}{n|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \Delta u(y, t) dy = \frac{r}{n} \int_{B(x, r)} \Delta u(y, t) dy. \end{aligned}$$

Note que  $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\partial U}{\partial r}(x, r, t) = 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x, r, t) &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{|\partial B(0, 1)|} \int_{B(0, 1)} \Delta u(x + rz, t) dz \right) \\ &= \frac{1}{|\partial B(0, 1)|} \int_{B(0, 1)} \Delta u(x + rz, t) dz + \frac{r}{|\partial B(0, 1)|} \int_{B(0, 1)} \nabla \Delta u(x + rz, t) \cdot z dz \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{|\partial B(0, 1)|} \left( \int_{B(0, 1)} \Delta u(x + rz, t) dz + \int_{B(0, 1)} [\nabla \cdot (z \Delta u(x + rz, t)) - n \Delta u(x + rz, t)] dz \right) \\ &= \frac{1}{|\partial B(0, 1)|} \left( \int_{B(0, 1)} \Delta u(x + rz, t) dz + \int_{\partial B(0, 1)} \Delta u(x + rz, t) z \cdot n(z) dS(z) - n \int_{B(0, 1)} \Delta u(x + rz, t) dz \right) \\ &= \frac{1}{|\partial B(0, 1)|} \left( \int_{B(0, 1)} \Delta u(x + rz, t) dz + \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B(0, 1)} \Delta u(x + rz, t) r^{n-1} dS(z) - n \int_{B(0, 1)} \Delta u(x + rz, t) dz \right) \\ &= \frac{1}{|\partial B(0, 1)|} \left( \frac{1}{r^n} \int_{B(x, r)} \Delta u(y, t) dy + \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} \Delta u(y, t) dS(y) - \frac{n}{r^n} \int_{B(x, r)} \Delta u(y, t) dy \right) \\ &= \frac{1}{n|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \Delta u(y, t) dy + \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} \Delta u(y, t) dS(y) - \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \Delta u(y, t) dy \\ &= \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \int_{B(x, r)} \Delta u(y, t) dy + \int_{\partial B(x, r)} \Delta u(y, t) dS(y). \end{aligned}$$

Em (1), usamos

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot (z \Delta u(x + rz, t)) - n \Delta u(x + rz, t) \\ &= (\nabla \cdot z) \Delta u(x + rz, t) + z \cdot \nabla_z (\Delta u(x + rz, t)) - n \Delta u(x + rz, t) \\ &\stackrel{(1)}{=} n \Delta u(x + rz, t) + rz \cdot (\nabla \Delta u)(x + rz, t) - n \Delta u(x + rz, t) \\ &= rz \cdot (\nabla \Delta u)(x + rz, t) \end{aligned}$$

Em (1) temos que  $\nabla \cdot z = \frac{\partial}{\partial z_1} z_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial z_n} z_n = n$  e  $\nabla_z f(rz) = r (\nabla f)(rz)$  para qualquer  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ , pela regra da cadeia.

Assim, vemos que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\partial U}{\partial r}(x, r, t) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \left[ \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \int_{B(x, r)} \Delta u(y, t) dy + \int_{\partial B(x, r)} \Delta u(y, t) dS(y) \right] \\ &= \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \Delta u(x, t) + \Delta u(x, t) = \frac{1}{n} \Delta u(x, t). \end{aligned}$$

Concluimos, assim, que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x, r, t) - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x, r, t) - \frac{n-1}{r} \frac{\partial U}{\partial r}(x, r, t) \\ &= \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(y, t) dS(y) - \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \int_{B(x, r)} \Delta u(y, t) dy \\ &\quad - \int_{\partial B(x, r)} \Delta u(y, t) dS(y) - \left( \frac{n-1}{r} \right) \frac{r}{n} \int_{B(x, r)} \Delta u(y, t) dy \\ &= \int_{\partial B(x, r)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(y, t) dS(y) - \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \int_{B(x, r)} \Delta u(y, t) dy \\ &\quad - \int_{\partial B(x, r)} \Delta u(y, t) dS(y) + \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \int_{B(x, r)} \Delta u(y, t) dy \\ &= \int_{\partial B(x, r)} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(y, t) dS(y) - \Delta u(y, t) \right) dS(y) = 0. \end{aligned}$$

□

### 7.5. Fórmula para a solução quando $n = 3$

Seja  $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty[)$  uma função tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \Delta u(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \\ u(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}^3 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= h(x), & x \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} .$$

Pela regularidade de  $u$ , temos que  $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$  e  $h \in C^1(\mathbb{R}^3)$ .

Vamos definir

$$U(x, r, t) := \int_{\partial B(x, r)} u(y, t) dS(y), \quad G(x, r) := \int_{\partial B(x, r)} g(y) dS(y), \quad H(x, r) := \int_{\partial B(x, r)} h(y) dS(y)$$

e

$$\tilde{U}(x, r, t) := rU(x, r, t), \quad \tilde{G}(x, r) := rG(x, r), \quad \tilde{H}(x, r) := rH(x, r).$$

Logo, temos

PROPOSIÇÃO 275. *Para cada  $x \in \mathbb{R}^3$  fixo, temos  $(r, t) \mapsto \tilde{U}(r, t) \in C^2([0, \infty[ \times [0, \infty[)$ ,  $r \mapsto \tilde{G}(r) \in C^2([0, \infty[)$  e  $r \mapsto \tilde{H}(r) \in C^1([0, \infty[)$ . Essas funções são tais que*

$$\tilde{G}(0) = \frac{d^2 \tilde{G}}{dr^2}(0) = \tilde{H}(0) = 0$$

e satisfazem as equações abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2}(x, r, t) - \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial r^2}(x, r, t) &= 0, & x \in \mathbb{R}^3, r > 0, t > 0 \\ \tilde{U}(x, r, 0) = \tilde{G}(x, r), & \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t}(x, r, 0) = \tilde{H}(x, r), & x \in \mathbb{R}^3, r > 0 \\ \tilde{U}(x, 0, t) &= 0, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO. Vamos nos concentrar em  $\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial r^2}$ , já que as demais são triviais. Assim, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2}(x, r, t) &= r \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x, r, t) = r \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x, r, t) + (n-1) \frac{\partial U}{\partial r}(x, r, t) \\ &= r \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x, r, t) + 2 \frac{\partial U}{\partial r}(x, r, t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial r^2}(x, r, t) &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU(x, r, t)) = \frac{\partial}{\partial r} \left( U(x, r, t) + r \frac{\partial U}{\partial r}(x, r, t) \right) \\ &= \frac{\partial U}{\partial r}(x, r, t) + \frac{\partial U}{\partial r}(x, r, t) + r \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x, r, t) \\ &= 2 \frac{\partial U}{\partial r}(x, r, t) + r \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x, r, t). \end{aligned}$$

Assim, vemos que  $\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2}(x, r, t) = \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial r^2}(x, r, t)$ . É bastante claro que

$$\tilde{G}(x, 0) := 0G(x, 0) = 0$$

e

$$\tilde{H}(x, 0) := 0H(x, 0) = 0.$$

Para a derivada segunda em  $\tilde{G}$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial r^2}(x, r) &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rG(x, r)) = \frac{\partial}{\partial r} \left( G(x, r) + r \frac{\partial G}{\partial r}(x, r) \right) \\ &= \frac{\partial G}{\partial r}(x, r) + \frac{\partial G}{\partial r}(x, r) + r \frac{\partial^2 G}{\partial r^2}(x, r) \\ &= 2 \frac{\partial G}{\partial r}(x, r) + r \frac{\partial^2 G}{\partial r^2}(x, r). \end{aligned}$$

Desta forma, vemos que

$$\frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial r^2}(x, 0) = 2 \frac{\partial G}{\partial r}(x, 0) + 0 \frac{\partial^2 G}{\partial r^2}(x, 0) = 2 \frac{\partial G}{\partial r}(x, 0).$$

Agora basta observar que

$$\begin{aligned} G(x, r) &= \int_{\partial B(x, r)} g(y) dS(y) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} g(y) dS(y) \\ &= \frac{1}{|\partial B(0, 1)| r^{n-1}} \int_{\partial B(0, 1)} g(x + rz) r^{n-1} dS(z) = \frac{1}{|\partial B(0, 1)|} \int_{\partial B(0, 1)} g(x + rz) dS(z). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial r}(x, r) &= \frac{1}{|\partial B(0, 1)|} \int_{\partial B(0, 1)} \nabla g(x + rz) \cdot z dS(z) = \frac{1}{|\partial B(0, 1)|} \int_{\partial B(0, 1)} \nabla g(x + rz) \cdot n(z) dS(z) \\ &= \frac{r}{|\partial B(0, 1)|} \int_{\partial B(0, 1)} \Delta g(x + rz) dz = \frac{r}{n |\partial B(0, 1)| r^n} \int_{B(x, r)} \Delta g(y) dy = \frac{r}{n |B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \Delta g(y) dy \\ &= \frac{r}{n} \int_{B(x, r)} \Delta g(y) dy. \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\partial G}{\partial r}(x, r) = \frac{0}{n} \Delta g(x) = 0.$$

□

Obtemos, assim,

$$\tilde{U}(x, r, t) = \frac{1}{2} \left( \tilde{G}(x, r+t) - \tilde{G}(x, t-r) \right) + \frac{1}{2} \int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(x, y) dy.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} U(x, r, t) &= \frac{1}{2r} \left( \tilde{G}(x, r+t) - \tilde{G}(x, t) + \tilde{G}(x, t) - \tilde{G}(x, t-r) \right) + \frac{1}{2r} \int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(x, y) dy \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{G}(x, t+r) - \tilde{G}(x, t)}{r} + \frac{\tilde{G}(x, t-r) - \tilde{G}(x, t)}{-r} \right) + \frac{1}{2r} \int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(x, y) dy. \end{aligned}$$

Tomando o limite  $r \rightarrow 0^+$ , temos

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} U(x, r, t) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\partial B(x, r)} u(y, t) dS(y) = u(x, t).$$

Além disso,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\tilde{G}(x, t+r) - \tilde{G}(x, t)}{r} + \frac{\tilde{G}(x, t-r) - \tilde{G}(x, t)}{-r} \right) = 2 \frac{\partial \tilde{G}}{\partial t}(x, t)$$

e

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r} \int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(x, y) dy = \tilde{H}(x, t).$$

Assim, tomando o limite  $r \rightarrow 0^+$  nas expressões anteriores, concluímos que

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\partial \tilde{G}}{\partial t}(x, t) + \tilde{H}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} (tG(x, t)) + tH(x, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( t \int_{\partial B(x, t)} g(y) dS(y) \right) + t \int_{\partial B(x, t)} h(y) dS(y). \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \left( t \int_{\partial B(x, t)} g(y) dS(y) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( t \frac{1}{|\partial B(x, t)|} \int_{\partial B(x, t)} g(y) dS(y) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( t \frac{1}{|\partial B(0, 1)| t^{n-1}} \int_{\partial B(0, 1)} g(x + tz) t^{n-1} dS(y) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( t \frac{1}{|\partial B(0, 1)|} \int_{\partial B(0, 1)} g(x + tz) dS(y) \right) \\ &= \frac{1}{|\partial B(0, 1)|} \int_{\partial B(0, 1)} g(x + tz) dS(y) + \frac{t}{|\partial B(0, 1)|} \int_{\partial B(0, 1)} \nabla g(x + tz) \cdot z dS(y) \\ &= \frac{1}{|\partial B(0, 1)| t^{n-1}} \int_{\partial B(0, 1)} g(x + tz) t^{n-1} dS(y) + \frac{t}{|\partial B(0, 1)| t^{n-1}} \int_{\partial B(0, 1)} \nabla g(x + tz) \cdot z t^{n-1} dS(y) \\ &= \frac{1}{|\partial B(x, t)|} \int_{\partial B(x, t)} g(y) dS(y) + \frac{t}{|\partial B(x, t)|} \int_{\partial B(x, t)} \nabla g(y) \cdot \frac{y-x}{t} dS(y) \\ &= \int_{\partial B(x, t)} g(y) dS(y) + \int_{\partial B(x, t)} \nabla g(y) \cdot (y-x) dS(y) \end{aligned}$$

Desta maneira, temos que

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( t \int_{\partial B(x, t)} g(y) dS(y) \right) + t \int_{\partial B(x, t)} h(y) dS(y). \\ &= \int_{\partial B(x, t)} g(y) dS(y) + \int_{\partial B(x, t)} \nabla g(y) \cdot (y - x) dS(y) + t \int_{\partial B(x, t)} h(y) dS(y) \\ &= \int_{\partial B(x, t)} (g(y) + \nabla g(y) \cdot (y - x) + th(y)) dS(y) \end{aligned}$$

Vamos terminar essa seção enunciando nosso principal resultado na forma de um teorema.

**TEOREMA 276.** *Sejam  $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ ,  $h \in C^1(\mathbb{R}^3)$  e  $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty[)$  uma função tal que*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \Delta u(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \\ u(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}^3 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= h(x), & x \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}.$$

Logo  $u$  é dado por

$$u(x, t) = \int_{\partial B(x, t)} (g(y) + \nabla g(y) \cdot (y - x) + th(y)) dS(y).$$

A equação acima é chamada de **Fórmula de Kirchoff**.

No caso em que  $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$  e  $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$ , então a fórmula de Kirchoff nos dá uma função de contínua em  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty[$ , de classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}^3 \times ]0, \infty[$  e que resolve a equação de onda.

**DEMONSTRAÇÃO.** Já verificamos que se  $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty[)$  for solução, então  $u$  é dado pela fórmula de Kirchoff.

Vamos agora mostrar que a fórmula de Kirchoff de fato nos fornece uma solução. Vamos provar apenas para o caso em que  $g = 0$  para entender as ideias. Neste caso,  $|\partial B(x, t)| = 4\pi t^2$  e

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{|\partial B(x, t)|} \int_{\partial B(x, t)} th(y) dS(y) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B(x, t)} th(y) dS(y) \\ &= \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B(0, 1)} th(x + tz) t^2 dS(z) = \frac{t}{4\pi} \int_{\partial B(0, 1)} h(x + tz) dS(z) \end{aligned}$$

Assim,

$$\Delta u(x, t) = \Delta \left( \frac{t}{4\pi} \int_{\partial B(0, 1)} h(x + tz) dS(z) \right) = \frac{t}{4\pi} \int_{\partial B(0, 1)} \Delta h(x + tz) dS(z)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{t}{4\pi} \int_{\partial B(0, 1)} h(x + tz) dS(z) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B(0, 1)} h(x + tz) dS(z) + \frac{t}{4\pi} \int_{\partial B(0, 1)} \nabla h(x + tz) \cdot z dS(z) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B(0, 1)} h(x + tz) dS(z) + \frac{t^2}{4\pi} \int_{B(0, 1)} \Delta h(x + tz) dz. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B(0,1)} h(x + tz) dS(z) + \frac{t^2}{4\pi} \int_{B(0,1)} \Delta h(x + tz) dz \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B(0,1)} \nabla h(x + tz) \cdot z dS(z) + \frac{2t}{4\pi} \int_{B(0,1)} \Delta h(x + tz) dz + \frac{t^2}{4\pi} \int_{B(0,1)} \nabla \Delta h(x + tz) \cdot z dz \\
&= \frac{t}{4\pi} \int_{B(0,1)} \Delta h(x + tz) dz + \frac{2t}{4\pi} \int_{B(0,1)} \Delta h(x + tz) dz + \frac{t}{4\pi} \int_{B(0,1)} t \nabla \Delta h(x + tz) \cdot z dz \\
&= \frac{t}{4\pi} \int_{B(0,1)} (3\Delta h(x + tz) + t \nabla \Delta h(x + tz) \cdot z) dz \\
&= \frac{t}{4\pi} \int_{B(0,1)} \nabla \cdot (\Delta h(x + tz) z) dz \\
&= \frac{t}{4\pi} \int_{\partial B(0,1)} \Delta h(x + tz) z \cdot z dS(z) = \frac{t}{4\pi} \int_{\partial B(0,1)} \Delta h(x + tz) dS(z)
\end{aligned}$$

Note que

$$\nabla \cdot (\Delta h(x + tz) z) = \Delta h(x + tz) \nabla \cdot z + t \nabla \Delta h(x + tz) \cdot z = 3\Delta h(x + tz) + t \nabla \Delta h(x + tz) \cdot z$$

□

### 7.5.1. Exercícios.

EXERCÍCIO 277. (FOLLAND 5.B.2) A equação diferencial

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + (n-1) \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

é a equação  $n$ -dimensional para a equação de onda radial. Considere  $n = 3$ .

a. Mostre que a solução geral da equação de onda radial em 3 dimensões é

$$u(x, t) = \frac{1}{r} (\phi(r+t) + \psi(r-t)),$$

$r = |x|$ , em que  $\phi$  e  $\psi$  são funções com valores em  $\mathbb{R}$ .

b. Resolva o problema de Cauchy com condição inicial radial ( $n = 3$ ),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \quad u(x, 0) = f(|x|), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(|x|)$$

usando o conhecimento sobre soluções da equação de onda em  $\mathbb{R}_+$ .

c. Sejam  $u$ ,  $f$  e  $g$  como na parte b. Mostre que  $u(0, t) = f(t) + tf'(t) + tg(t)$ . Conclua que  $u$  não pode ser melhor do que  $C^k$ , se  $f$  é  $C^{k+1}$  e  $g$  é  $C^k$ .

## 7.6. Fórmula para a solução quando $n = 2$ : Abaixamento de ordem.

Vamos agora usar a fórmula de Kirchoff para achar uma expressão para a solução quando  $n = 2$ . O método adotado é chamado de **abaixamento de ordem**. (Em inglês, “method of descent”).

Para tanto, precisamos antes demonstrar um lema bastante simples (e certamente conhecido. É só uma recordação). Depois passaremos para um lema mais técnico e vamos obter uma fórmula para a solução da equação.

LEMA 278. *Seja  $U \subset \mathbb{R}^2$  um aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ . Seja  $S = \{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in U\}$  a superfície que corresponde ao gráfico da função  $f$ . Logo, se  $g : S \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, então*

$$\int_S g(y) dS(y) = \int_U g(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + |\nabla f(x, y)|^2} dx dy.$$

DEMONSTRAÇÃO. Sabemos que  $S$  pode ser descrito pela seguinte parametrização  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

Assim, devemos calcular

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| = \sqrt{\left| \det \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle \end{pmatrix} \right|}.$$

Porém

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \left( 1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)$$

e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \left( 0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right).$$

Portanto

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 & \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} & 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \end{pmatrix} \\ &= \left( 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \right) \left( 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) - \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \\ &= 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \\ &= 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 = 1 + |\nabla f|^2. \end{aligned}$$

Logo

$$\int_S g(y) dS(y) = \int_U g(x, y, f(x, y)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| dx dy = \int_U g(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + |\nabla f(x, y)|^2} dx dy.$$

□

LEMA 279. Seja  $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$  uma função dada e  $\bar{y} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $\bar{y}(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2)$ . Os pontos de  $\mathbb{R}^2$  serão denotados por  $x$  e  $y$  e os pontos de  $\mathbb{R}^3$  serão denotados por  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ . Para cada  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , vamos associar ao ponto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$  definido por  $\bar{x} = (x_1, x_2, 0)$ . Neste caso, temos

$$\int_{\partial B(\bar{x}, r)} \bar{g}(\bar{y}) dS(\bar{y}) = 2 \int_{B(x, r)} g(y) \sqrt{1 + |\nabla \gamma(y)|^2} dy,$$

em que  $\gamma(y) = \sqrt{r^2 - |y - x|^2}$ ,  $\partial B(\bar{x}, r) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^3; |\bar{y} - \bar{x}| = r\}$  e  $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2; |y - x| < r\}$ .

Note que a integral do lado esquerdo é uma integral sobre uma superfície em  $\mathbb{R}^3$ . A integral do lado direito é uma integral sobre um aberto de  $\mathbb{R}^2$ .

DEMONSTRAÇÃO. Antes de mais nada, vamos observar se  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  e  $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$  é definido por  $\bar{x} = (x_1, x_2, 0)$ , então  $\partial B(\bar{x}, r)$  pode ser dividido em 2 superfícies  $S_+$  e  $S_-$  (e mais uma curva que pode ser ignorada para fins de integração). As superfícies  $S_+$  e  $S_-$  são definidas como gráficos das funções  $\gamma : B(x, r) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $-\gamma : B(x, r) \rightarrow \mathbb{R}$ , em que  $(-\gamma)(y) = -\gamma(y)$ .

Assim, pelo Lema 278, temos

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial B(\bar{x}, r)} \bar{g}(\bar{y}) dS(\bar{y}) \\
&= \int_{S_+} \bar{g}(\bar{y}) dS(\bar{y}) + \int_{S_-} \bar{g}(\bar{y}) dS(\bar{y}) \\
&= \int_{B(x, r)} \bar{g}(y_1, y_2, \gamma(y_1, y_2)) \sqrt{1 + |\nabla \gamma(y)|^2} dy + \int_{B(x, r)} \bar{g}(y_1, y_2, \gamma(y_1, y_2)) \sqrt{1 + |\nabla(-\gamma)(y)|^2} dy \\
&= \int_{B(x, r)} g(y_1, y_2) \sqrt{1 + |\nabla \gamma(y)|^2} dy + \int_{B(x, r)} g(y_1, y_2) \sqrt{1 + |\nabla \gamma(y)|^2} dy \\
&= 2 \int_{B(x, r)} g(y_1, y_2) \sqrt{1 + |\nabla \gamma(y)|^2} dy.
\end{aligned}$$

□

Agora vamos supor que  $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty[)$  seja uma função tal que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \Delta u(x, t), & x \in \mathbb{R}^2, & t \geq 0 \\
u(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}^2 \\
\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= h(x), & x \in \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

Vamos definir as funções  $\bar{h} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{g} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\bar{u} : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) &= u(x_1, x_2, t) \\
\bar{g}(x_1, x_2, x_3) &= g(x_1, x_2) \\
\bar{h}(x_1, x_2, x_3) &= h(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

Assim,  $\bar{u}$  é um solução da seguinte equação:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}(\bar{x}, t) &= \Delta \bar{u}(\bar{x}, t), & \bar{x} \in \mathbb{R}^3, & t \geq 0 \\
\bar{u}(\bar{x}, 0) &= \bar{g}(\bar{x}), & \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \\
\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(\bar{x}, 0) &= \bar{h}(\bar{x}), & \bar{x} \in \mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

Portanto, vale a fórmula de Kirchoff: Para  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  e  $\bar{x} = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3$ , temos

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \bar{u}(\bar{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( t \int_{\partial B(\bar{x}, t)} \bar{g}(y) dS(y) \right) + t \int_{\partial B(\bar{x}, t)} \bar{h}(y) dS(y) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{t}{|\partial B(\bar{x}, t)|} \int_{\partial B(\bar{x}, t)} \bar{g}(y) dS(y) \right) + \frac{t}{|\partial B(\bar{x}, t)|} \int_{\partial B(\bar{x}, t)} \bar{h}(y) dS(y) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{t}{4\pi t^2} 2 \int_{B(x, t)} g(y) \sqrt{1 + |\nabla \gamma(y)|^2} dy \right) + \frac{t}{4\pi t^2} 2 \int_{B(x, t)} h(y) \sqrt{1 + |\nabla \gamma(y)|^2} dy
\end{aligned}$$

Observamos agora que  $\gamma(y) = (t^2 - |x - y|^2)^{\frac{1}{2}}$  implica que

$$\partial_{y_j} \gamma(y) = \partial_{y_j} (t^2 - |x - y|^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (t^2 - |x - y|^2)^{-\frac{1}{2}} 2(x_j - y_j) = \frac{x_j - y_j}{\sqrt{t^2 - |x - y|^2}}.$$

Desta maneira, temos que

$$1 + |\nabla \gamma(y)|^2 = 1 + \frac{|x - y|^2}{t^2 - |x - y|^2} = \frac{t^2}{t^2 - |x - y|^2}.$$

Concluimos, assim, que

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{t}{4\pi t^2} 2 \int_{B(x,t)} g(y) \frac{t}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} dy \right) + \frac{t}{4\pi t^2} 2 \int_{B(x,t)} h(y) \frac{t}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{B(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} dy \right) + \frac{1}{2\pi} \int_{B(x,t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} dy \end{aligned}$$

Vamos agora mexer mais um pouco na última expressão. Temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{B(x,t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} dy &= \frac{1}{2\pi t^2} \int_{B(x,t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} dy \\ &= \frac{t^2}{2|B(x,t)|} \int_{B(x,t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} dy \\ &= \frac{1}{2} t^2 \int_{B(x,t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} dy \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{B(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} dy \right) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{B(0,1)} \frac{g(x+tz)}{\sqrt{t^2 - t^2|z|^2}} t^2 dz \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{B(0,1)} \frac{g(x+tz)}{\sqrt{t^2 - t^2|z|^2}} t^2 dz \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( t \int_{B(0,1)} \frac{g(x+tz)}{\sqrt{1 - |z|^2}} dz \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{B(0,1)} \frac{g(x+tz)}{\sqrt{1 - |z|^2}} dz + \frac{1}{2\pi} t \int_{B(0,1)} \frac{\nabla g(x+tz) \cdot z}{\sqrt{1 - |z|^2}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi t^2} \int_{B(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{1 - |\frac{y-x}{t}|^2}} dy + \frac{t}{2\pi t^2} \int_{B(x,t)} \frac{\nabla g(y) \cdot \frac{y-x}{t}}{\sqrt{1 - |\frac{y-x}{t}|^2}} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{B(x,t)} \left( \frac{tg(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} + \frac{t\nabla g(y) \cdot (y-x)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} \right) dy. \end{aligned}$$

Juntando tudo, podemos escrever a expressão no seguinte teorema:

**TEOREMA 280.** *Sejam  $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ ,  $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$  e  $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty[)$  uma função tal que*

$$(7.6.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \Delta u(x, t), & (x, t) &\in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ u(x, 0) &= g(x), & x &\in \mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= h(x), & x &\in \mathbb{R}^2 \end{aligned} .$$

Logo a função  $u$  é dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{B(x,t)} \left( \frac{t^2 h(y) + tg(y) + t\nabla g(y) \cdot (y-x)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} \right) dy.$$

A equação acima é chamada de **Fórmula de Poisson**.

Se  $g \in C^3(\mathbb{R}^2)$  e  $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$ , então a função  $u$  dada pela fórmula de Poisson é contínua em  $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty[$ , de classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}^2 \times ]0, \infty[$  e resolve a Equação (7.6.1).

**DEMONSTRAÇÃO.** Já verificamos que se  $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty[)$  for solução, então  $u$  é dado pela fórmula de Poisson.

Vamos agora mostrar que a fórmula de Poisson de fato nos fornece uma solução. De fato, pelos argumentos anteriores, vimos que

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \int_{B(x,t)} \left( \frac{t^2 h(y) + tg(y) + t \nabla g(y) \cdot (y-x)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} \right) dy \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( t \int_{\partial B(\bar{x},t)} \bar{g}(y) dS(y) \right) + t \int_{\partial B(\bar{x},t)} \bar{h}(y) dS(y) \\ &= \int_{\partial B(\bar{x},t)} (\bar{g}(y) + \nabla \bar{g}(y) \cdot (y-x) + t \bar{h}(y)) dS(y). \end{aligned}$$

Porém, pelo Teorema 276, a função  $\bar{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = \int_{\partial B(\bar{x},t)} (\bar{g}(y) + \nabla \bar{g}(y) \cdot (y-x) + t \bar{h}(y)) dS(y)$$

é uma função contínua em  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty[$  e de classe  $C^2(\mathbb{R}^3 \times ]0, \infty[)$  e resolve a equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}(\bar{x}, t) &= \Delta \bar{u}(\bar{x}, t), & \bar{x} \in \mathbb{R}^3, & t \geq 0 \\ \bar{u}(\bar{x}, 0) &= \bar{g}(\bar{x}), & \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(\bar{x}, 0) &= \bar{h}(\bar{x}), & \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Assim, como a função  $u : \mathbb{R}^2 \times [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $u(x_1, x_2, t) = \bar{u}(x_1, x_2, 0, t)$ , concluímos que  $u$  é contínua em  $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty[$  e de classe  $C^2(\mathbb{R}^2 \times ]0, \infty[)$  e resolve a Equação (7.6.1).  $\square$

### 7.7. Princípio de Huygens

Vamos comparar as expressões para  $n = 2$  e  $n = 3$ .

Para  $n = 2$ , temos

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{B(x,t)} \left( \frac{t^2 h(y) + tg(y) + t \nabla g(y) \cdot (y-x)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} \right) dy.$$

Para  $n = 3$ , temos

$$u(x, t) = \int_{\partial B(x,t)} (g(y) + \nabla g(y) \cdot (y-x) + th(y)) dS(y).$$

Observem que para dimensão 2 temos uma integral em toda a bola e em dimensão 3 apenas na casca da bola. Assim, em dimensão 3,  $u(x, t)$  depende apenas dos valores de  $g$ ,  $h$  e suas derivadas nos pontos  $y$  tais que  $|y-x| = t$ , ao passo que em dimensão 2 depende de  $g$ ,  $h$  e suas derivadas nos pontos  $y$  tais que  $|y-x| \leq t$ .

Vamos buscar entender melhor:

Assim, suponha que  $g$  e  $h$  sejam funções concentradas em  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  (algo como um delta de Dirac. Funções que se anulam fora de um aberto “pequeno” que contém  $x_0$ ).

Em dimensão 3, após um tempo  $t > 0$ , a onda será sentida apenas nos pontos  $x \in \mathbb{R}^n$  tais que  $x_0 \in \partial B(x, t)$ , ou seja,  $|x-x_0| = t$ . De fato, se  $x_0 \notin \partial B(x, t)$ , então  $g(y) = 0$  e  $h(y) = 0$  para  $y \in \partial B(x, t)$ . Portanto

$$u(x, t) = \int_{\partial B(x,t)} (g(y) + \nabla g(y) \cdot (y-x) + th(y)) dS(y) = 0.$$

Assim, se estivermos no ponto  $x$  e uma onda começou no ponto  $x_0$ , o que vai acontecer é o seguinte: Para tempos  $t < |x-x_0|$  não sentimos a onda. No tempo  $t = |x-x_0|$  sentimos a onda. Depois para  $t > |x-x_0|$  não sentimos mais nada. Ou seja, a onda vem concentrada.

Em dimensão 2, a onda será sentida apenas nos pontos  $x \in \mathbb{R}^n$  tais que  $x_0 \in B(x, t)$ , ou seja,  $t \geq |x - x_0|$ , pois se  $x_0 \notin B(x, t)$ , então  $g(y) = 0$  e  $h(y) = 0$  para  $y \in B(x, t)$  e

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{B(x, t)} \left( \frac{t^2 h(y) + t g(y) + t \nabla g(y) \cdot (y - x)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} \right) dy = 0.$$

Assim, se estivermos no ponto  $x$  e uma onda começou no ponto  $x_0$ , o que vai acontecer é o seguinte: Para tempos  $t < |x - x_0|$  não sentimos a onda. No tempo  $t = |x - x_0|$  começamos a sentir a onda. Depois para  $t > |x - x_0|$  ainda podemos senti-la! De fato, por exemplo, se  $g = 0$  e  $h(x_0)$  é concentrado em  $x_0$  com integral 1, então para  $t > |x - x_0|$  teremos

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{B(x, t)} \left( \frac{t^2 h(y) + t g(y) + t \nabla g(y) \cdot (y - x)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} \right) dy \approx \frac{1}{2\pi} \frac{h(x_0)}{\sqrt{t^2 - |x_0 - x|^2}}.$$

Usamos que  $|B(x, t)| = \pi t^2$ . Assim,  $u(x, t) \sim Ct^{-1}$ , ou seja,  $u(x, t)$  vai a zero, mas é diferente de zero.

O Folland dá a seguinte interpretação física para este efeito: Estamos num quarto escuro e alguém no ponto  $x_0 = 0$  acende e apaga a luz. Se estamos no ponto  $x$ , então vemos luz no instante  $t = |x|$  e depois tudo fica escuro de novo. Mas isso porque vivemos num mundo tridimensional.

E se vivêssemos num mundo de dimensão 2? Aí veríamos a luz no instante  $t = |x|$ , mas a sala não ficaria escura para  $t > |x|$ . Ainda veríamos luz, mas ela iria ficando cada vez mais fraca.

Por fim, observamos que podemos resolver a equação para  $n \geq 4$  de forma semelhante ao que fizemos anteriormente. Começamos com  $n$  ímpar e usamos o método de descent para obter a solução para  $n$  par. O que obteremos é parecido. Em dimensão ímpar, a solução depende só de pontos em  $\partial B(x, t)$ . Em dimensão par, a solução depende apenas de pontos em  $B(x, t)$ . O efeito descrito acima continua valendo.

## 7.8. Problema não homogêneos

**7.8.1. Analogia com EDO e princípio de Duhamel.** Assim como fizemos com a equação do Calor ao estudar o princípio de Duhamel para a equação do calor, vamos usar uma analogia com EDO e tentar descobrir uma fórmula para a solução da equação não homogênea.

Consideremos a seguinte equação

$$\begin{aligned} u''(t) &= f(t, u(t)), & t \in [0, \infty[ \\ u(0) &= u_0 \\ u'(0) &= u_1 \end{aligned}$$

Vamos definir  $v = u'$ . Logo

$$\begin{aligned} u'(t) &= v(t), & t \in [0, \infty[ \\ v'(t) &= f(t, u(t)), & t \in [0, \infty[ \\ u(0) &= u_0 \\ v(0) &= u_1 \end{aligned}$$

Assim, podemos estudar uma equação de segunda ordem como um sistema de primeira ordem. Vamos agora supor que  $f(t, u(t)) = au(t) + h(t)$ . Logo o sistema acima pode ser escrito como da seguinte forma matricial:

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h(t) \end{pmatrix}.$$

Assim, definindo

$$X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}, H(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ h(t) \end{pmatrix}, X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

vemos que

$$X'(t) = AX(t) + H(t), X(0) = X_0.$$

Usando a fórmula de variação das constantes, concluímos que  $X(t)$  é dado por

$$X(t) = e^{tA}X_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}H(s)ds.$$

PROPOSIÇÃO 281. *Consideremos  $X(t)$  dado acima.*

1) Denotaremos por  $w_1 : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  e  $w_2 : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  os termos da matriz  $e^{tA}X_0$ , ou seja,  $e^{tA}X_0 = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix}$ . Logo  $w_1$  é solução do problema:

$$(7.8.1) \quad \begin{aligned} w_1''(t) &= aw_1(t), \quad t \in [0, \infty[ \\ w_1(0) &= u_0 \\ w_1'(0) &= u_1 \end{aligned} .$$

2) Fixemos  $s \in \mathbb{R}$  e denotaremos por  $y_1 : [s, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y_2 : [s, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  os termos da matriz  $e^{(t-s)A}H(s)$ , ou seja,  $e^{(t-s)A}H(s) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ . Logo  $y_1$  é solução do problema:

$$(7.8.2) \quad \begin{aligned} y_1''(t) &= ay_1(t), \quad t \in [s, \infty[ \\ y_1(s) &= 0 \\ y_1'(s) &= h(s) \end{aligned} .$$

DEMONSTRAÇÃO. 1) Seja  $W : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $W(t) = e^{tA}X_0 = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix}$ . Assim, vemos que

$$W'(t) = \frac{d}{dt}e^{tA}X_0 = Ae^{tA}X_0 = AW(t)$$

e  $W(0) = X_0$ . Portanto,  $W$  satisfaz a equação diferencial

$$\begin{aligned} W'(t) &= AW(t), \quad t \geq 0 \\ W(0) &= X_0. \end{aligned}$$

que equivale a

$$\begin{aligned} w_1'(t) &= w_2(t), \quad t \in [0, \infty[ \\ w_2'(t) &= aw_1(t), \quad t \in [0, \infty[ \\ w_1(0) &= u_0 \\ w_2(0) &= u_1 \end{aligned}$$

Logo, vemos que  $w_1''(t) = w_2'(t) = aw_1(t)$  e obtemos a Equação 7.8.1.

2) Vamos agora fixar  $s \in \mathbb{R}$  e definimos  $Y : [s, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  por  $Y(t) = e^{(t-s)A}H(s) = \begin{pmatrix} y_1(t, s) \\ y_2(t, s) \end{pmatrix}$ .

Desta maneira, temos

$$Y'(t) = \frac{d}{dt} \left( e^{(t-s)A}H(s) \right) = Ae^{(t-s)A}H(s) = AY(t)$$

e  $Y(s) = e^{(s-s)A}H(s) = H(s)$ . Isto equivale a

$$\begin{aligned} Y'(t) &= AY(t), \quad t \geq s \\ Y(s) &= H(s). \end{aligned}$$

A equação acima nos diz que

$$\begin{aligned} y_1'(t, s) &= y_2(t, s), \quad t \in [s, \infty[ \\ y_2'(t, s) &= ay_1(t, s), \quad t \in [s, \infty[ \\ y_1(s, s) &= 0 \\ y_2(s, s) &= h(s) \end{aligned} ,$$

em que a derivada acima é sempre na variável  $t$ . Desta maneira, vemos que  $y_1''(t) = y_2'(t) = ay_1(t)$  e obtemos a Equação 7.8.2.  $\square$

A proposição acima nos permite concluir o seguinte resultado:

TEOREMA 282. *A solução do problema*

$$\begin{aligned} u''(t) &= au(t) + h(t), \quad t \in [0, \infty[ \\ u(0) &= u_0 \\ u'(0) &= u_1 \end{aligned}$$

é igual a

$$u(t) = w_1(t) + \int_0^t y_1(t, s),$$

em que  $w_1$  é solução da Equação 7.8.1 e  $y_1$  é solução da Equação 7.8.2.

DEMONSTRAÇÃO. Sabemos que se  $u$  é solução do problema, então  $X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ , em que  $v(t) = u'(t)$  é dado por

$$X(t) = e^{tA} X_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} H(s) ds.$$

A função da primeira linha de  $e^{tA} X_0$  é  $t \mapsto w_1(t)$  e a função da primeira linha de  $e^{(t-s)A} H(s)$  é  $t \mapsto y_1(t, s)$ . Assim, o resultado segue.  $\square$

Agora vamos considerar a equação da onda. Note a analogia Equações:

$$\begin{array}{ll} u''(t) = au(t) + f(t), \quad t \in [0, \infty[ & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \Delta u(x, t) + f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(0) = u_0 & u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \\ u'(0) = u_1 & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \end{array} \quad \text{e}$$

Assim, podemos enunciar o seguinte Teorema, também chamado de princípio de Duhamel para a equação da onda. Novamente, vemos que ele nada mais é do que o método de variação de constantes aplicado a equação da onda. Observe que ele é totalmente análogo ao Teorema 282.

TEOREMA 283. *Seja  $n = 1, 2$  ou  $3$  e  $f \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[)$ . Definamos a função  $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$u(x, t) := \int_0^t u(x, s, t) ds,$$

em que para cada  $s \in \mathbb{R}$  fixo, a função  $(x, t) \mapsto u(x, t, s)$  é a única solução do problema abaixo:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t, s) = \Delta u(x, t, s), & x \in \mathbb{R}^n, t > s \\ u(x, s) = 0, & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, s) = f(x, s), & x \in \mathbb{R}^n \end{array} .$$

Logo a função  $u$  é tal que:

i)  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[)$ .

ii)  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \Delta u(x, t) + f(x, t), x \in \mathbb{R}^n, t > 0$

iii) Para cada  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , temos  $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0), t>0} u(x, t) = 0$  e  $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0), t>0} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 0$ . Em outras palavras,  $u$  é solução do problema:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \Delta u(x, t) + f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}^n \end{array} ,$$

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração é simples. Basta observar que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = u(x, t, t) + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(x, s, t) ds = \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(x, s, t) ds$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, t, t) + \int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, s, t) ds \\ &= f(x, t) + \int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, s, t) ds.\end{aligned}$$

Por fim, vemos que

$$\Delta u(x, t) = \Delta \int_0^t u(x, s, t) ds = \int_0^t \Delta u(x, s, t) ds.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= f(x, t) + \int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, s, t) ds \\ &= f(x, t) + \int_0^t \Delta u(x, s, t) ds = f(x, t) + \Delta u(x, t).\end{aligned}$$

Quanto às condições iniciais, basta observar que

$$u(x, 0) = \int_0^0 u(x, s, t) ds = 0$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \int_0^0 \frac{\partial u}{\partial t}(x, s, t) ds = 0.$$

□

**7.8.2. Exemplos do princípio de Duhamel.** Vamos agora ver exemplos da fórmula de Duhamel em dimensões 1 e 3.

EXEMPLO 284. Dimensão  $n = 1$ . Estamos interessados na equação

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) &= 0, & x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= 0, & x \in \mathbb{R}\end{aligned}.$$

Para isto, vamos antes recordar que a solução de

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= h(x), & x \in \mathbb{R}\end{aligned}.$$

é dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy.$$

Logo a solução de

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t, s) &= \Delta u(x, t, s), & x \in \mathbb{R}^n, t > s \\ u(x, s) &= 0, & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, s) &= f(x, s), & x \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

é obtida fazendo uma translação  $t \mapsto t - s$ . Ela é dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y, s) dy.$$

Concluimos que a solução do problema é dado por

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y, s) dy ds \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-s}^{x+s} f(y, t-s) dy ds.$$

em (1), fizemos  $\tilde{s} = t - s$  e depois voltamos a chamar  $\tilde{s}$  de  $s$ .

EXEMPLO 285. Dimensão  $n = 3$ . Estamos interessados na equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \Delta u(x, t) + f(x, t), & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x, 0) &= 0, & x \in \mathbb{R}^3 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= 0, & x \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}.$$

Para isto, vamos antes recordar que a solução de

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \Delta u(x, t), & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}^3 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= h(x), & x \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}.$$

é dada por

$$u(x, t) = \int_{\partial B(x, t)} [th(y) + g(y) + \nabla g(y) \cdot (y - x)] dS(y).$$

Logo a solução de

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t, s) &= \Delta u(x, t, s), & x \in \mathbb{R}^n, t > s \\ u(x, s) &= 0, & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, s) &= f(x, s), & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

é obtida fazendo uma translação  $t \mapsto t - s$ . Ela é dada por

$$u(x, t, s) = \int_{\partial B(x, t-s)} (t-s) f(y, s) dS(y).$$

Concluimos que a solução do problema é dado por

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t (t-s) \left( \int_{\partial B(x, t-s)} f(y, s) dS(y) \right) ds \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{4\pi} \int_0^t \left( \int_{\partial B(x, t-s)} \frac{f(y, s)}{t-s} dS(y) \right) ds \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{4\pi} \int_0^t \left( \int_{\partial B(x, r)} \frac{f(y, t-r)}{r} dS(y) \right) dr \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{4\pi} \int_0^t \left( \int_{\partial B(x, r)} \frac{f(y, t-|y-x|)}{|y-x|} dS(y) \right) dr \\ &\stackrel{(4)}{=} \frac{1}{4\pi} \int_{B(x, t)} \frac{f(y, t-|y-x|)}{|y-x|} dy. \end{aligned}$$

em (1), usamos  $|\partial B(x, t-s)| = 4\pi(t-s)^2$ . Em (2), usamos  $r = t-s$ . Em (3), usamos que  $r = |y-x|$ , em que  $y \in \partial B(x, r)$ . Em (4), usamos o item 3 do Lema 37.

### 7.8.3. Solução fundamental.

## 7.9. Resolvendo a equação de onda usando transformada de Fourier

Vamos estudar agora a equação da onda usando a transformada de Fourier. Novamente, não são necessárias condições de contorno, apenas as duas condições iniciais:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \Delta u(x, t), & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x, 0) &= f(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}.$$

Para resolvê-la, vamos novamente aplicar a transformada de Fourier na variável  $x$ . Vamos supor que  $u$  seja duas vezes derivável e que tanto  $u$  como  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  vão “rapidamente” para zero quando  $|x| \rightarrow \infty$ . Obtemos, assim,

$$\mathcal{F} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) \right) = \mathcal{F}(\Delta u(t, x)).$$

Note que

$$\mathcal{F} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) \right) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(t, x) dx \right)$$

e que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)\right) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \Delta u(x, t) dx \stackrel{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta(e^{-ix\xi}) u(x, t) dx \\ &= -|\xi|^2 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(x, t) dx.\end{aligned}$$

Em (1) usamos integração por partes.<sup>1</sup>

Denotando por  $\hat{u} = \mathcal{F}u$  a transformada de Fourier na variável  $x$ , temos

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(\xi, t) &= -|\xi|^2 \hat{u}(t, \xi), & t > 0, \xi \in \mathbb{R}^n \\ \hat{u}(\xi, 0) &= \hat{f}(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, 0) &= \hat{g}(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^n \end{cases}.$$

A solução geral é dada por

$$\hat{u}(\xi, t) = A(\xi) \cos(t|\xi|) + B(\xi) \operatorname{sen}(t|\xi|).$$

Note que

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, t) = -|\xi| A(\xi) \operatorname{sen}(t|\xi|) + |\xi| B(\xi) \cos(t|\xi|).$$

Usando as condições iniciais, podemos calcular  $A$  e  $B$ :

$$\hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi) \iff A(\xi) = \hat{f}(\xi).$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, 0) = \hat{g}(\xi) \iff |\xi| B(\xi) = \hat{g}(\xi) \iff B(\xi) = \frac{\hat{g}(\xi)}{|\xi|}.$$

Portanto

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) \cos(t|\xi|) + \hat{g}(\xi) \frac{\operatorname{sen}(t|\xi|)}{|\xi|}.$$

Assim, a solução será dada por

$$\begin{aligned}u(t, x) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}(\xi) \cos(t|\xi|)\right) + \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{g}(\xi) \frac{\operatorname{sen}(t|\xi|)}{|\xi|}\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \left(\hat{f}(\xi) \cos(t|\xi|) + \hat{g}(\xi) \frac{\operatorname{sen}(t|\xi|)}{|\xi|}\right) d\xi.\end{aligned}$$

<sup>1</sup>Vamos aqui lembrar como fazer a integral por partes.

$$\begin{aligned}& \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \Delta u(x, t) dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B(0, R)} e^{-ix\xi} \Delta u(x, t) dx \\ &\stackrel{(1)}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_{B(0, R)} \Delta(e^{-ix\xi}) u(x, t) dx + \int_{\partial B(0, R)} e^{-ix\xi} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) dS(x) - \int_{\partial B(0, R)} \frac{\partial}{\partial \nu}(e^{-ix\xi}) u(x, t) dS(x) \right) \\ &\stackrel{(2)}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B(0, R)} \Delta(e^{-ix\xi}) u(x, t) dx \\ &= -|\xi|^2 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(x, t) dx.\end{aligned}$$

Em (1) usamos a segunda identidade de Green. Em (2), usamos que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$  “rapidamente”. (Por exemplo, se  $x \mapsto u(x, t)$  pertence ao espaço de Schwarz).

**7.9.1. Exercícios.**

EXERCÍCIO 286. Considere a equação abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \Delta u(x, t), & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}.$$

Suponha que  $f$  e  $g$  pertençam a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Mostre que existe uma constante  $C > 0$  tal que a solução do problema satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^2 dx \leq C \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2 dx \right).$$

(Dica: Use que  $\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) \cos(t|\xi|) + \hat{g}(\xi) \frac{\text{sen}(t|\xi|)}{|\xi|}$  e Plancherel)

**7.9.2. O problema em uma dimensão.** Em uma dimensão espacial, vemos que

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi, t) &= \hat{f}(\xi) \cos(t|\xi|) + \hat{g}(\xi) \frac{\text{sen}(t|\xi|)}{|\xi|} \\ &= \hat{f}(\xi) \cos(t\xi) + \hat{g}(\xi) \frac{\text{sen}(t\xi)}{\xi}. \end{aligned}$$

Assim,

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1} \left( \hat{f}(\xi) \cos(t\xi) \right) + \mathcal{F}^{-1} \left( \hat{g}(\xi) \frac{\text{sen}(t\xi)}{\xi} \right).$$

Vamos mexer um pouco com a equação acima para obter uma expressão mais simples. Vamos iniciar com a expressão contendo cosseno.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left( \hat{f}(\xi) \cos(t\xi) \right) (x) &= \mathcal{F}^{-1} \left( \hat{f}(\xi) \left( \frac{e^{it\xi} + e^{-it\xi}}{2} \right) \right) (x) \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{F}^{-1} \left( \hat{f}(\xi) e^{it\xi} \right) (x) + \frac{1}{2} \mathcal{F}^{-1} \left( \hat{f}(\xi) e^{-it\xi} \right) (x) = \frac{1}{2} (f(x+t) + f(x-t)). \end{aligned}$$

Na última passagem, usamos as propriedades de transformada de Fourier. (Vocês se lembram? Era simples! De fato, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left( \hat{f}(\xi) e^{it\xi} \right) (x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) e^{it\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x+t)\xi} \hat{f}(\xi) d\xi \\ &= \mathcal{F}^{-1} \hat{f}(x+t) = f(x+t). \end{aligned}$$

e de maneira igual para  $\mathcal{F}^{-1} \left( \hat{f}(\xi) e^{-it\xi} \right) (x)$ .

Por outro lado, sabemos pela Equação (218) do dia 22 de maio, que

$$\mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\text{sen}(t\xi)}{\xi} \right) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |\xi| \leq t \\ 0, & |\xi| > t \end{cases}.$$

Assim, usando a propriedade de convolução, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left( \hat{g}(\xi) \frac{\text{sen}(t\xi)}{\xi} \right) &= \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\text{sen}(t\xi)}{\xi} \right) * \mathcal{F}^{-1}(\hat{g}) \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\text{sen}(t\xi)}{\xi} \right) * g = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\text{sen}(t\xi)}{\xi} \right) (y) g(x-y) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-t}^t g(x-y) dy = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy. \end{aligned}$$

Assim, reobtemos a fórmula de d'Alembert:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x+t) + f(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy.$$

Vamos assumir que  $g$  seja contínua e considerar  $G$  uma primitiva de  $g$ , ou seja,  $G' = g$ . Logo, pelo teorema fundamental do cálculo, temos

$$\frac{1}{2} \int_{-t}^t g(x-y) dy = -\frac{1}{2} G(x-y) \Big|_{-t}^t = \frac{1}{2} (G(x+t) - G(x-t)).$$

Juntando tudo, concluímos que

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (f(x+t) + f(x-t)) + \frac{1}{2} (G(x+t) - G(x-t)).$$

### 7.10. Métodos de energia

Até agora, não tratamos problemas em abertos  $U \subset \mathbb{R}^n$  limitados. Todos os resultados acima forma para  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{R}_+$ .

Usando métodos de energia, ou variacionais, podemos provar facilmente a unicidade de solução para problemas deste tipo, além de resultados de propagação finita dessas soluções, conforme veremos a seguir. O problema de existência de soluções será visto mais a frente.

**7.10.1. Unicidade de soluções da equação da onda.** Começaremos demonstrando o seguinte Teorema sobre unicidade de soluções.

**TEOREMA 287.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$  e funções  $f : U \times ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k : \partial U \times ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  são funções dadas. Logo existe no máximo uma solução  $u \in C^2(\bar{U} \times [0, \infty[)$  do problema abaixo:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \Delta u(x, t) + f(x, t), & x \in U, t > 0 \\ u(x, t) &= k(x, t), & x \in \partial U, t > 0 \\ u(x, 0) &= g(x), & x \in U \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= h(x), & x \in U \end{aligned} .$$

Note que a segunda equação acima nos dá as condições de contorno do tipo Dirichlet. A terceira e a quarta equação nos fornece as condições iniciais. É claro que uma condição necessária para que uma solução exista é que as funções  $f$ ,  $k$ ,  $g$  e  $h$  possuam certa regularidade. De fato, como  $u$  é de classe  $C^2$ , temos, por exemplo, que  $g$  é de classe  $C^2$  e  $h$  é de classe  $C^1$ .

**DEMONSTRAÇÃO.** Suponha que  $u_1$  e  $u_2$  sejam funções  $C^2(\bar{U} \times [0, \infty[)$ . Logo  $w = u_1 - u_2$  é solução do problema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) &= \Delta w(x, t), & x \in U, t > 0 \\ w(x, t) &= 0 & x \in \partial U, t > 0 \\ w(x, 0) &= 0, & x \in U \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) &= 0, & x \in U \end{aligned} .$$

Vamos definir a seguinte função  $E : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_U \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \right)^2 + |\nabla w(x, t)|^2 \right] dx.$$

Pelas condições iniciais, vemos que para  $t = 0$ ,  $\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 0$ . Logo  $\left( \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) \right)^2 = 0$ . Além disso, como  $w(x, 0) = 0$ , temos  $\frac{\partial w}{\partial x_i}(x, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(x + h e_i, 0) - w(x, 0)}{h} = 0$ , em que  $e_i$  é o  $i$ -ésimo vetor da base canônica de  $\mathbb{R}^n$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Portanto,  $|\nabla w(x, 0)|^2 = 0$ . Concluímos que  $E(0) = 0$ . Vamos

agora mostrar que  $E$  é uma função constante. Para tanto, vamos calcular  $\frac{dE}{dt}(t)$ . Temos

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt}(t) &= \int_U \left[ \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) + \nabla w(x, t) \cdot \nabla \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \right] dx \\ &\stackrel{(1)}{=} \int_U \left[ \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \Delta w(x, t) + \nabla w(x, t) \cdot \nabla \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \right] dx \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_U \left[ \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \Delta w(x, t) - \Delta w(x, t) \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \right] dx + \int_{\partial U} \frac{\partial w}{\partial \nu}(x, t) \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) dS(x) \\ &\stackrel{(3)}{=} 0, \end{aligned}$$

em que usamos em (1), que  $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = \Delta w(x, t)$ . Em (2), usamos a primeira igualdade de Green. Em (3), usamos que  $w(x, t) = 0$  para todo  $x \in \partial U$ . Logo  $\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(x, t+h) - w(x, t)}{h} = 0$ .

Concluimos, assim, que  $E$  é uma constante e  $E(0) = 0$ . Logo  $E(t) = 0$  para todo  $t > 0$ . Como  $w \in C^2(\bar{U} \times [0, \infty[)$ , temos que o integrando de  $E$  é positivo e contínuo. Como a integral é igual a zero, concluimos que  $\frac{\partial w}{\partial t}(x, t) = 0$  e  $\nabla w(x, t) = 0$ . Assim, todas as derivadas de  $w$  são iguais a zero. Portanto  $w$  é constante em todas as componentes conexas de  $\bar{U} \times [0, \infty[$ . Como  $w(x, 0) = 0$ , para  $x \in U$ , a função  $w$  só pode ser igual a zero.  $\square$

### 7.10.2. Exercícios.

EXERCÍCIO 288. Sejam dadas funções  $a_{ij} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  tais que  $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Suponha também que exista  $a_0 > 0$  tal que  $\sum_{ij} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq a_0 |\xi|^2$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Considere a seguinte equação

$$(7.10.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x, t) \right).$$

a) Mostre que se  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ ,  $T > 0$ , tem suporte compacto e é uma solução da Equação (7.10.1), então

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) \right] dx, \quad t \in [0, T]$$

é independente de  $t \in [0, T]$ .

b) Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto conexo, limitado de classe  $C^1$ . Mostre que se  $u \in C^2(\bar{U} \times [0, \infty[)$  é solução da Equação (7.10.1), com  $u(x, t) = 0$  para todo  $x \in \partial U$  e  $t \in [0, T]$ , então a função  $t \mapsto E(t)$  é constante. O vetor unitário que aponta para fora de  $U$  está sendo denotado por  $\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \dots, \nu_n(x))$ .

c) Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto conexo, limitado de classe  $C^1$ . Mostre que se  $u \in C^2(\bar{U} \times [0, \infty[)$  é solução da Equação (7.10.1), com  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x, t) \nu_i(x) \right) = 0$  para todo  $x \in \partial U$  e  $t \in [0, T]$ , então a função  $t \mapsto E(t)$  é constante. O vetor unitário que aponta para fora de  $U$  está sendo denotado por  $\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \dots, \nu_n(x))$ .

Dica: Se  $f$  e  $g$  são funções de classe  $C^1$ , então

$$\int_U f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx = - \int_U g \frac{\partial f}{\partial x_i} dx + \int_{\partial U} f(x) g(x) \nu_i(x) dS(x).$$

d) Conclua que, dadas condições iniciais  $u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$  para  $x \in \mathbb{R}^n$  (ou  $x \in U$ ), existe no máximo uma solução da Equação (7.10.1) nas condições do item a), b) ou c).

EXERCÍCIO 289. (Baseado no exercício do Evans, cap. 2 ex. 23 - Prova 2019) Considere a equação de onda unidimensional  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ . Seja  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma solução tal que, para cada  $t \geq 0$ , a função  $x \mapsto u(t, x)$  tenha suporte compacto. Mostre que

i) A energia  $E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 \right] dx$  é constante.

ii) Para  $t$  suficientemente grande, temos a igualdade  $\int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 dx$ .

Lembremos que a solução geral é dada por  $u(x, t) = \frac{1}{2} (g(x+t) + g(x-t)) + \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy$ , em que  $g(x) = u(x, 0)$  e  $h(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$  têm suporte compacto.

**7.10.3. Domínio de dependência.** O método de energia também nos dá uma informação sobre a propagação em tempo finito da equação de onda. Vamos explicar mais adiante o que queremos dizer com isso.

Para demonstrar o resultado dessa seção, precisaremos antes de um lema.

LEMA 290. *Seja  $g : \mathbb{R}^n \times ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $t_0 > 0$ . Vamos definir  $G : ]0, t_0[ \rightarrow \mathbb{R}$  por*

$$G(t) = \int_{B(x_0, t_0-t)} g(x, t) dx.$$

Logo  $G$  é derivável e

$$\frac{dG}{dt}(t) = \int_{B(x_0, t_0-t)} \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) dx - \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} g(x, t) dS(x).$$

DEMONSTRAÇÃO. Inicialmente observamos que

$$G(t) = \int_{B(x_0, t_0-t)} g(x, t) dx = (t_0 - t)^n \int_{B(0,1)} g(x_0 + (t_0 - t)z, t) dz.$$

Logo

$$\begin{aligned} G'(t) &= \int_{B(0,1)} \left[ -z \cdot \nabla g(x_0 + (t_0 - t)z, t) + \frac{\partial g}{\partial t}(x_0 + (t_0 - t)z, t) \right] (t_0 - t)^n \\ &\quad - n(t_0 - t)^{n-1} g(x_0 + (t_0 - t)z, t) dz \\ &= \int_{B(0,1)} \frac{\partial g}{\partial t}(x_0 + (t_0 - t)z, t) (t_0 - t)^n dz \\ &\quad - \int_{B(0,1)} [z \cdot \nabla g(x_0 + (t_0 - t)z, t) (t_0 - t)^n + n(t_0 - t)^{n-1} g(x_0 + (t_0 - t)z, t)] dz \\ &= \int_{B(0,1)} \frac{\partial g}{\partial t}(x_0 + (t_0 - t)z, t) (t_0 - t)^n dz \\ &\quad - \int_{B(0,1)} \nabla_z \cdot (zg(x_0 + (t_0 - t)z, t)) (t_0 - t)^{n-1} dz \\ &= \int_{B(0,1)} \frac{\partial g}{\partial t}(x_0 + (t_0 - t)z, t) (t_0 - t)^n dz \\ &\quad - \int_{\partial B(0,1)} (zg(x_0 + (t_0 - t)z, t)) \cdot \nu(z) (t_0 - t)^{n-1} dS(z) \\ &= \int_{B(0,1)} \frac{\partial g}{\partial t}(x_0 + (t_0 - t)z, t) (t_0 - t)^n dz \\ &\quad - \int_{\partial B(0,1)} g(x_0 + (t_0 - t)z, t) dS(z) (t_0 - t)^{n-1} \\ &= \int_{B(x_0, t_0-t)} \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) dx - \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} g(x, t) dS(x). \end{aligned}$$

□

Agora vamos voltar ao nosso resultado. Antes, vamos definir o cone de luz para trás (backwards wave cone):

$$K(x_0, t_0) := \{(x, t); 0 \leq t \leq t_0, |x - x_0| \leq t_0 - t\}.$$

Com isto, podemos provar o seguinte Teorema:

**TEOREMA 291.** *Seja  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[)$  uma função tal que  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$ , para todo  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty[$ . Se  $u$  e  $\frac{\partial u}{\partial t}$  são iguais a zero em  $B(x_0, t_0) \times \{0\}$ , então  $u = 0$  em  $K(x_0, t_0)$ .*

**DEMONSTRAÇÃO.** Vamos definir  $E : [0, t_0[ \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{B(x_0, t_0-t)} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 + |\nabla u(x, t)|^2 \right] dx.$$

Como o integrando é maior ou igual a zero, concluímos que  $E(t) \geq 0$  para todo  $t \in [0, t_0[$ .

Para  $t = 0$ , temos  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$  para todo  $x \in B(x_0, t_0)$ . Além disso,  $u(x, 0) = 0$  para todo  $x \in B(x_0, t_0)$ . Logo  $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x, 0) = 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $x \in B(x_0, t_0)$ , ou seja,  $\nabla u(x, 0) = 0$  para todo  $x \in B(x_0, t_0)$ . Concluímos que

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_{B(x_0, t_0)} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \right)^2 + |\nabla u(x, 0)|^2 \right] dx = 0.$$

Vamos agora mostrar que  $E(t) \leq E(0)$ . Para tanto, basta calcular a derivada de  $E$ . De fato, temos

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt}(t) &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2} \int_{B(x_0, t_0-t)} \frac{\partial}{\partial t} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 + |\nabla u(x, t)|^2 \right) dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 + |\nabla u(x, t)|^2 \right) dx \\ &= \int_{B(x_0, t_0-t)} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + \nabla u(x, t) \cdot \nabla \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 + |\nabla u(x, t)|^2 \right) dx \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_{B(x_0, t_0-t)} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \Delta u(x, t) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx \\ &\quad + \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} \left[ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 - \frac{1}{2} |\nabla u(x, t)|^2 \right] dx \\ &\stackrel{(3)}{=} \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} \left[ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 - \frac{1}{2} |\nabla u(x, t)|^2 \right] dx \\ &\stackrel{(4)}{\leq} \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} \left[ \frac{1}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right|^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 - \frac{1}{2} |\nabla u(x, t)|^2 \right] dx = 0 \end{aligned}$$

em que usamos em (1) o Lema 290. Em (2), usamos a primeira identidade de Green. Em (3), usamos que  $u$  é solução da equação de onda:  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$ . Em (4), usamos que  $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ . Isto pode ser provado de  $(a - b)^2 \geq 0$ .

Como a derivada de  $E$  é menor ou igual a zero, concluímos que  $E$  é não crescente. Juntando tudo o que sabemos até agora temos:

$$0 \leq E(t) \leq E(0) \leq 0.$$

Desta maneira,  $E(t)$  tem que ser igual a zero para todo  $t$ . Assim,  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 0$  e  $\nabla u(x, t) = 0$  no interior do conjunto  $K(x_0, t_0)$ . Portanto,  $u$  é igual a uma constante em  $K(x_0, t_0)$ . Sabemos que

$u(x, 0) = 0$  em  $B(x_0, t_0) \times \{0\}$ , o que implica que essa constante deve ser igual a zero, ou seja,  $u(x, t) = 0$ , para  $(x, t) \in K(x_0, t_0)$ .  $\square$

#### 7.10.4. Exercícios.

EXERCÍCIO 292. Use o Teorema de domínio de dependência para provar unicidade de soluções da equação da onda em  $\mathbb{R}^n$ , ou seja, mostre que existe no máximo uma solução  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[)$  da equação

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \Delta u(x, t) + f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= h(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}.$$

### 7.11. Existência de soluções

Vamos dar dois exemplos de existência de soluções.

#### 7.11.1. Existência de soluções em intervalos $[0, \pi]$ .

TEOREMA 293. *Sejam  $u_0 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $u_1 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  funções de classe  $C^2$  e  $C^1$ , respectivamente. Suponha que*

$$u_0(0) = u_0(\pi) = \frac{d^2 u_0}{dx^2}(0) = \frac{d^2 u_0}{dx^2}(\pi) = 0 \text{ e } u_1(0) = u_1(\pi) = 0.$$

*Logo existe uma única função  $u \in C^2([0, \pi] \times [0, \infty[)$  que é solução da equação abaixo:*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & t > 0, x \in ]0, \pi[ \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in ]0, \pi[ \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= u_1(x), & x \in ]0, \pi[ \end{cases}.$$

DEMONSTRAÇÃO. A unicidade nós já vimos. Para provar existência, definimos  $\bar{u}_0 : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\bar{u}_1 : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  fazendo expansão ímpar:

$$\bar{u}_0(x) = \begin{cases} u_0(x), & x \in [0, \pi] \\ -u_0(-x), & x \in [-\pi, 0] \end{cases} \text{ e } \bar{u}_1(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in [0, \pi] \\ -u_1(-x), & x \in [-\pi, 0] \end{cases}.$$

Devido às hipóteses do teorema, é fácil ver que as funções acima são de classe  $C^2$  e  $C^1$ , respectivamente. Por fim, definimos  $\tilde{u}_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\tilde{u}_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como as seguintes funções ímpares e  $2\pi$ -periódicas: Para cada  $n \in \mathbb{Z}$  e  $x \in [-\pi, \pi]$ , definimos

$$\tilde{u}_0(x + 2\pi n) = \bar{u}_0(x) \text{ e } \tilde{u}_1(x + 2\pi n) = \bar{u}_1(x).$$

Novamente, vemos que as funções acima são de classe  $C^2$  e  $C^1$ , respectivamente. Pela fórmula de d'Alembert, a função  $\tilde{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2}(\tilde{u}_0(x-t) + \tilde{u}_0(x+t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{u}_1(y) dy$$

é solução do problema abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}(x, t) &= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(x, t), & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ \tilde{u}(x, 0) &= \tilde{u}_0(x), & x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x, 0) &= \tilde{u}_1(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Assim, a restrição de  $\tilde{u}$  ao intervalo  $[0, \pi]$ , que chamaremos de  $u$ , é tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & t > 0, x \in ]0, \pi[ \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in ]0, \pi[ \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= u_1(x), & x \in ]0, \pi[ \end{cases}.$$

Falta, portanto, verificar as condições de contorno. Para elas, temos

$$u(0, t) = \tilde{u}(0, t) = \frac{1}{2} (\tilde{u}_0(-t) + \tilde{u}_0(t)) + \frac{1}{2} \int_{-t}^t \tilde{u}_1(y) dy = 0,$$

já que  $\tilde{u}_0$  e  $\tilde{u}_1$  são ímpares. Além disso, temos

$$u(\pi, t) = \tilde{u}(\pi, t) = \frac{1}{2} (\tilde{u}_0(\pi - t) + \tilde{u}_0(\pi + t)) + \frac{1}{2} \int_{\pi-t}^{\pi+t} \tilde{u}_1(y) dy = 0,$$

já que, pela nossa construção, as funções  $x \mapsto \tilde{u}_0(\pi + x)$  e  $x \mapsto \tilde{u}_1(\pi + x)$  são ímpares.  $\square$

**7.11.2. Existência de soluções em abertos limitados  $U \subset \mathbb{R}^n$ .** Vamos agora estudar a equação de onda.

Consideremos o problema abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \Delta u(x, t), & (x, t) \in U \times (0, \infty) \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial U \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x), & x \in U \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), & x \in U \end{cases},$$

em que  $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ .

Novamente, vamos aplicar os três passos do método de separação de variáveis.

### Primeiro Passo

Procuramos soluções da forma

$$u(x, t) = T(t) X(x),$$

em que  $T : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $X : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

Substituindo na equação da onda, obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (T(t) X(x)) = \Delta (T(t) X(x)).$$

Assim, dividindo tudo por  $T(t) X(x)$ ,

$$\frac{d^2 T}{dt^2}(t) = \frac{\Delta X(x)}{X(x)} = \lambda$$

e obtemos as equações

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T}{dt^2}(t) &= \lambda T(t), \\ \Delta X(x) &= \lambda X(x). \end{aligned}$$

Resolvendo as equações, concluímos que  $T(t) = A \cos(\sqrt{-\lambda}t) + B \text{sen}(\sqrt{-\lambda}t)$ , se  $\lambda \neq 0$ , e  $T(t) = At + B$ , se  $\lambda = 0$ . Para resolver  $X$ , precisamos ir ao segundo passo.

### Segundo Passo

Vamos usar as condições de Dirichlet. Sabemos que  $u(x, t) = 0$  quando  $x \in \partial U$ . Logo quando  $x \in \partial U$ , temos

$$T(t) X(x) = 0 \implies \left( A \cos(\sqrt{-\lambda}t) + B \text{sen}(\sqrt{-\lambda}t) \right) X(x) = 0 \implies X(x) = 0.$$

Obteríamos a mesma conclusão usando  $T(t) = At + B$ , para  $A$  ou  $B$  diferentes de zero.

Concluímos que o método de separação de variáveis nos leva ao Problema (6.9.1). Veremos que o Problema (6.9.1) não tem solução não nula para  $\lambda = 0$ . Logo podemos ignorar a solução  $T(t) = At + B$ .

### Terceiro Passo

Somando todas as soluções do segundo passo, temos

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos(\sqrt{-\lambda_n}t) + b_n \text{sen}(\sqrt{-\lambda_n}t) \right) X_n(x).$$

Devemos, por fim, determinar os coeficientes  $c_n$  através das condições iniciais

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x).$$

Suponha que as funções  $f$  e  $g$  possam ser escritas como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x) \quad \text{e} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n X_n(x),$$

em que  $f_n, g_n \in \mathbb{R}$  e o limite deve ocorrer em algumas das formas estudadas (pontual, uniforme ou  $L^2$ ). Assim, concluímos que a solução é dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( f_n \cos(\sqrt{-\lambda_n} t) + \frac{g_n}{\sqrt{-\lambda_n}} \text{sen}(\sqrt{-\lambda_n} t) \right) X_n(x).$$

Novamente todo o problema se torna resolver (6.9.1).

## Equações não lineares de primeira ordem: Método das Características

Neste capítulo vamos, pela primeira vez, trabalhar com equações não lineares. Nosso objetivo é entender a seguinte equação:

$$\begin{aligned} F(x, u(x), \nabla u(x)) &= 0, & x \in U \\ u(x) &= g(x), & x \in \Gamma \end{aligned} \quad ,$$

em que  $U \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto e  $\Gamma \subset U$  é uma hipersuperfície.

Dado  $x_1 \in U$ , a ideia do método das características é achar uma curva  $\gamma$  adequada que liga um ponto de  $x_0 \in \Gamma$  a  $x_1$ . Esta curva deve ser tal que podemos obter os valores de  $u \circ \gamma$  através de uma solução de uma EDO. Conhecendo os valores de  $u \circ \gamma$ , determinamos  $u(x_1)$  conhecendo  $u(x_0) = g(x_0)$ . Esse método em geral não fornecerá uma solução em todo  $U$ , mas, sob condições adequadas, poderemos mostrar que para cada  $x_0 \in U$ , existe um aberto  $x_0 \subset V \subset U$  onde há uma solução.

É claro que essa estratégia é vaga. Vamos mostrar a seguir como colocá-la em prática em duas situações: problemas semilineares e quasilineares. O último contém o primeiro, mas achamos a apresentação dessa forma mais fácil.

Antes de seguir vamos dar uma interpretação física para a equação do transporte. Ela servirá como o exemplo para as equações semilineares.

**8.0.1. Motivação física.** Para o problema semilinear, podemos fazer a seguinte dedução física da equação do transporte. (É muito semelhante a dedução da equação do calor!).

Consideremos uma substância com densidade  $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que “anda” numa velocidade  $v : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Suponha que em cada ponto  $x \in \mathbb{R}^n$ , exista uma fonte que cria ou destrói essa substância e que a taxa de criação (ou destruição) é denotada por  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  denotar o fluxo dessa substância, então, para que valha uma lei de conservação, deveremos ter, para cada bola aberta  $B \subset \mathbb{R}^n$  a seguinte lei:

taxa de variação em  $B$  = fluxo que entra em  $B$  + criação ou destruição pela fonte  $f$ .

Vamos supor para facilitar que  $u$ ,  $F$  são de classe  $C^1$  e  $f$  é contínua.

Matematicamente, a quantidade de substância em  $B$  é igual a  $\int_B u dx$ . Logo

$$\text{taxa de variação em } B = \frac{d}{dt} \int_B u dx.$$

Se  $F$  é o fluxo dessa substância, então o fluxo que entra em  $B$  é igual a

$$\text{fluxo que entra em } B = - \int_{\partial B} F \cdot \nu dS(x).$$

Como sempre, devemos colocar o sinal  $-$ , pois se  $F \cdot \nu$  for positivo, então a substância está saindo. Por fim, a criação ou destruição pela fonte  $f$  em  $B$  é dada por

$$\text{criação ou destruição pela fonte } f = \int_B f dx.$$

Juntando tudo, temos

$$\frac{d}{dt} \int_B u dx = - \int_{\partial B} F \cdot \nu dS(x) + \int_B f dx.$$

Usando o teorema da divergência, concluímos que

$$\int_B \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \nabla \cdot F(x, t) - f(x, t) \right) dx = 0.$$

Como a equação acima vale para todo  $B$ , concluímos que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \nabla \cdot F(x, t) = f(x, t).$$

Mas quem é  $F$ ? Veja que até agora não usamos a velocidade  $v$ . Vamos usar agora. Como a substância está caminhando numa velocidade  $v$ , então é razoável que o fluxo seja igual a quantidade de substância vezes a velocidade. Assim, devemos ter  $F(x, t) = v(x, t)u(x, t)$ . Se a velocidade for constante, concluímos que  $\nabla \cdot (vu(x, t)) = v \cdot \nabla u(x, t)$ , ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + v \cdot \nabla u(x, t) = f(x, t).$$

Esta é a equação do transporte! Descreve como a densidade da substância está mudando se ela caminha com velocidade  $v$  e se existe uma fonte  $f$ .

A equação que obtemos é semilinear. No entanto, se a fonte depender de  $u$ , então temos  $f(x, t, u(x, t))$ . A equação passa a ser semilinear se a dependência de  $f$  com  $u$  não for linear. Um exemplo poderia ser  $f(x, t) = -u(x, t)^2$ , ou seja, quanto maior a quantidade de  $u^2$ , mais destruição existe.

### 8.1. Problemas semilineares

Para facilitar, vamos considerar um aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto tal que  $\Gamma := U \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \neq \emptyset$ . Assim, nossa hipersuperfície é o conjunto dos pontos  $(x', 0) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$  que pertencem a  $U$ . Consideremos o seguinte problema semilinear:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) &= f(x, u(x)), & x \in U \\ u(x) &= g(x), & x \in \Gamma \end{aligned}$$

em que  $f : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a_j : U \rightarrow \mathbb{R}$  são funções de classe  $C^1$  para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

**TEOREMA 294.** *Nas condições acima, para cada  $x_0 \in \Gamma$ , existe um aberto  $V \subset U$  que contém  $x_0$  e uma função  $u : V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) &= f(x, u(x)), & x \in V \\ u(x) &= g(x), & x \in V \cap \Gamma \end{aligned}$$

A demonstração será feita na seção seguinte junto com os problemas quasilineares. Por enquanto, daremos apenas a receita para achar a solução. A demonstração do teorema seguirá da justificativa dessa receita.

Para tanto, precisamos de algumas definições. Inicialmente definiremos o seguinte campo de vetores  $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$V(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x)).$$

**DEFINIÇÃO 295.** Uma curva integral de  $V$  é um caminho  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  que satisfaz a equação diferencial  $\gamma'(t) = V(\gamma(t))$ . Assim, se  $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ , então

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

**PROPOSIÇÃO 296.** *Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma curva integral com imagem no aberto  $W \subset U$  e  $u : W \rightarrow \mathbb{R}$  uma solução de  $\sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = f(x, u(x))$ ,  $x \in W$ . Logo  $v = u \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma solução da equação  $v'(t) = f(\gamma(t), v(t))$ .*

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração segue da regra da cadeia. De fato, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(t) &= \frac{d}{dt}u \circ \gamma(t) = \nabla u(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \nabla u(\gamma(t)) \cdot V(\gamma(t)) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}(\gamma(t)) a_j(\gamma(t)) = f(\gamma(t), u \circ \gamma(t)) = f(\gamma(t), v(t)). \end{aligned}$$

□

Assim, observamos que, se existir uma curva característica  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\gamma(a) = x_0$  e  $\gamma(b) = x_1$ , então a solução  $u$  no ponto  $u(x_1)$  pode ser encontrada achando  $v(b)$ , em que  $v$  é solução da EDO:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt}(t) &= f(\gamma(t), v(t)), \quad t \in [a, b] \\ v(a) &= u(x_0) = g(x_0). \end{aligned}$$

Assim, se tivermos uma solução  $u : V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que todo ponto  $x_1 \in V \subset U$  pode ser ligado a uma curva integral até  $\Gamma$ , então poderemos determinar  $u(x_1)$  resolvendo uma EDO. Esta é a ideia principal! Isto nos dá uma receita. Seja  $x_0 \in \Gamma$ , queremos achar um aberto  $V \subset U$  e uma função  $u : V \rightarrow \mathbb{R}$  que é solução da Equação.

**TEOREMA 297.** *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto,  $a_1, \dots, a_n \in C^1(U)$ ,  $f \in C^1(U \times \mathbb{R})$  e  $g \in C^1(\Gamma)$ , em que  $\Gamma = U \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$ . Suponha que  $\Gamma \neq \emptyset$ . Logo para cada  $x_0 \in \Gamma$  tal que  $a_n(x_0) \neq 0$ , existe uma vizinhança aberta e conexa  $\tilde{U}$  de  $x_0$  e uma função  $u : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) &= f(x, u(x)), \quad x \in \tilde{U} \\ u(x) &= g(x), \quad x \in \Gamma \cap \tilde{U} \end{aligned}$$

**OBSERVAÇÃO 298.** o conjunto  $\Gamma$  pode ser identificado naturalmente com o aberto

$$\tilde{\Gamma} = \{x \in \mathbb{R}^{n-1}; (x', 0) \in \Gamma\}.$$

Assim,  $g \in C^1(\Gamma)$  significa que  $x' \in \tilde{\Gamma} \mapsto g(x', 0)$  é de classe  $C^1$ .

**Receita para achar soluções de problemas de primeira ordem semilineares:**

- 1) Para cada  $r \in \Gamma$  numa vizinhança  $\tilde{\Gamma}$  de  $x_0$ , calculamos a curva característica  $\gamma_r'(s) = V(\gamma_r(t))$  com valor inicial  $\gamma_r(0) = r$ .
- 2) Calculamos para cada  $r \in \Gamma$  nessa vizinhança  $\tilde{\Gamma}$  de  $x_0$  a solução do problema  $v_r'(s) = f(\gamma_r(s), v_r(s))$  com valor inicial  $v_r(0) = g(r)$ .
- 3) Diminuindo essa vizinhança se preciso, obtemos um difeomorfismo  $G : \tilde{\Gamma} \times ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow V \subset U$  dado por  $G(r, s) = \gamma_r(s)$ .
- 4) Por fim, obtemos uma solução  $u : V \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $u(x) = v(G^{-1}(x))$ .

Vamos terminar dando exemplos.

**EXEMPLO 299.** Equação do transporte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + b \cdot \nabla u(x, t) &= f(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u(x, 0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Aqui  $\nabla$  é o gradiente em  $x$ . Vamos achar a solução seguindo os passos da receita. Aqui o vetor  $V$  é dado por  $V = (b, 1)$ .

1) Dado  $r \in \mathbb{R}^n$ , vamos achar

$$\gamma_r'(s) = V(\gamma_r(t)) = (b, 1), \quad \gamma_r(0) = (r, 0).$$

Assim, devemos ter  $\gamma_r(s) = (r + bs, s)$ .

2) Vamos achar

$$\begin{aligned} v_r'(s) &= f(\gamma_r(s)) \\ v_r(0) &= g(r) \end{aligned} \iff v_r(s) = g(r') + \int_0^s f(\gamma_r(z)) dz.$$

3) Seja  $G(r, s) = (r + bs, s) = (x, t)$ . Logo

$$(r, s) = (x - bt, t).$$

Ou seja,  $G^{-1}(x) = (x - bt, t)$ .

4) Por fim,  $u(x) = v(G^{-1}(x, t))$ , ou seja,

$$u(x, t) = g(x - bt) + \int_0^t f(x + b(z - t), z) dz.$$

EXEMPLO 300. Vamos resolver a equação:

$$\begin{aligned} x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= x^2 \\ u(x, 0) &= \text{sen}(x) \end{aligned}$$

Aqui o vetor  $V$  é dado por  $V = (x, 1)$ .

1) Dado  $r \in \mathbb{R}$ , vamos achar

$$\begin{aligned} x'(s) &= x(s) & x(0) &= r \\ y'(s) &= 1 & y(0) &= 0 \end{aligned} \implies \gamma_r(s) = (re^s, s).$$

Assim, devemos ter  $\gamma_r(s) = (re^s, s)$ .

2) Vamos achar

$$\begin{aligned} v_r'(s) &= (re^s)^2 = r^2 e^{2s} \\ v_r(0) &= \text{sen}(r). \end{aligned} \implies v_r(s) = \text{sen}(r) - \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}r^2 e^{2s}.$$

3) Seja  $G(r, s) = (re^{2s}, s)$ . Logo

$$(re^s, s) = (x, y) \implies s = ye^r = xe^{-y}.$$

Ou seja,  $G^{-1}(x, y) = (xe^{-y}, y)$ .

4) Por fim,  $u(x, y) = v(G^{-1}(x, y))$ , ou seja,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \text{sen}(xe^{-y}) - \frac{1}{2}(xe^{-y})^2 + \frac{1}{2}(xe^{-y})^2 e^{2y} \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2 e^{-2y} + \text{sen}(xe^{-y}). \end{aligned}$$

EXEMPLO 301. Vamos resolver a equação:

$$\begin{aligned} x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= u(x, y)^2 \\ u(x, 0) &= \text{sen}(x) \end{aligned}$$

Aqui o vetor  $V$  é dado por  $V = (x, 1)$ .

1) Dado  $r \in \mathbb{R}$ , vamos achar

$$\begin{aligned} x'(s) &= x(s) & x(0) &= r \\ y'(s) &= 1 & y(0) &= 0 \end{aligned} \implies \gamma_r(s) = (re^s, s).$$

Assim, devemos ter  $\gamma_r(s) = (re^s, s)$ .

2) Vamos achar

$$\begin{aligned} v_r'(s) &= v(s)^2 \\ v_r(0) &= \text{sen}(r). \end{aligned}$$

Vamos resolver da seguinte maneira. Note que  $\frac{v_r'(s)}{v(s)^2} = 1$ . Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^s \frac{v_r'(t)}{v(t)^2} dt &= \int_0^s dt \implies \int_{v(0)}^{v(s)} \frac{dz}{z^2} = s \implies \frac{1}{v(0)} - \frac{1}{v(s)} = s \\ \implies \frac{1}{v(0)} - s &= \frac{1}{v(s)} \implies v(s) = \frac{v(0)}{1 - v(0)s} = \frac{\text{sen}(r)}{1 - \text{sen}(r)s}. \end{aligned}$$

3) Seja  $G(r, s) = (re^{2s}, s)$ . Logo

$$(re^s, s) = (x, y) \implies s = ye^r = xe^{-y}.$$

Ou seja,  $G^{-1}(x, y) = (xe^{-y}, y)$ .

4) Por fim,  $u(x, y) = v(G^{-1}(x, y))$ , ou seja,

$$u(x, y) = \frac{\text{sen}(xe^{-y})}{1 - y\text{sen}(xe^{-y})} .$$

EXEMPLO 302. Vamos agora resolver a equação:

$$\begin{aligned} x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) + y \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) &= u(x, y, z) \\ u(x, y, 0) &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Aqui o vetor  $V$  é dado por  $V = (x, y, 1)$ .

1) Dado  $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$ , vamos achar

$$\begin{aligned} x'(s) &= x(s) & x(0) &= r_1 \\ y'(s) &= y(s) & y(0) &= r_2 \\ z'(s) &= 1 & z(0) &= 0 \end{aligned} \implies \gamma_r(s) = (r_1 e^s, r_2 e^s, s).$$

Assim, devemos ter  $\gamma_r(s) = (r_1 e^s, r_2 e^s, s)$ .

2) Vamos achar

$$\begin{aligned} v_r'(s) &= v(s) \\ v_r(0) &= r_1^2 + r_2^2 \end{aligned} \implies v_r(s) = (r_1^2 + r_2^2) e^s.$$

3) Seja  $G(r_1, r_2, s) = (r_1 e^s, r_2 e^s, s)$ . Logo

$$(r_1 e^s, r_2 e^s, s) = (x, y, z) \implies s = z, r_2 = ye^{-z}, r_1 = xe^{-z}.$$

Ou seja,  $G^{-1}(x, y, z) = (xe^{-z}, ye^{-z}, z)$ .

4) Por fim,  $u(x, y, z) = v(G^{-1}(x, y, z))$ , ou seja,

$$u(x, y, z) = (x^2 + y^2) e^{-2z} e^z = (x^2 + y^2) e^{-z} .$$

Vamos agora mostrar que o método desenvolvido por ser útil também para sistemas da forma abaixo:

$$\sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_N(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x, u_1(x), \dots, u_N(x)) \\ \vdots \\ F_N(x, u_1(x), \dots, u_N(x)) \end{pmatrix} .$$

EXEMPLO 303. Vamos resolver a equação:

$$\begin{aligned} x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= w(x, y) & u(x, 0) &= x \\ x \frac{\partial w}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) &= u(x, y) & w(x, 0) &= 1 \end{aligned}$$

Aqui o vetor  $V$  é dado por  $V = (x, 1)$ .

1) Dado  $r \in \mathbb{R}$ , vamos achar

$$\begin{aligned} x'(s) &= x(s) & x(0) &= r \\ y'(s) &= 1 & y(0) &= 0 \end{aligned} \implies \gamma_r(s) = (re^s, s).$$

Assim, devemos ter  $\gamma_r(s) = (re^s, s)$ .

3) Seja  $G(r, s) = (re^{2s}, s)$ . Logo

$$(re^s, s) = (x, y) \implies s = ye^r = xe^{-y}.$$

Ou seja,  $G^{-1}(x, y) = (xe^{-y}, y)$ .

2) Vamos achar  $v_r(s) = \begin{pmatrix} v_{r1}(s) \\ v_{r2}(s) \end{pmatrix}$ . Observamos que  $f(u, v) = (v, u)$ . Logo, devemos resolver

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} v_{r1}(s) \\ v_{r2}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{r2}(s) \\ v_{r1}(s) \end{pmatrix} \iff \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} v_{r1}(s) \\ v_{r2}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{r1}(s) \\ v_{r2}(s) \end{pmatrix} .$$

Assim,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_{r1}(s) \\ v_{r2}(s) \end{pmatrix} &= \exp \begin{pmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{r1}(0) \\ v_{r2}(0) \end{pmatrix} \\ &= \exp \begin{pmatrix} \cosh(s) & \sinh(s) \\ \sinh(s) & \cosh(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cosh(s) + \sinh(s) \\ r \sinh(s) + \cosh(s) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4) Por fim,  $\begin{pmatrix} u(x, y) \\ w(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(G^{-1}(x, y)) \\ v_2(G^{-1}(x, y)) \end{pmatrix}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= xe^{-y} \cosh(y) + \sinh(y) \\ w(x, y) &= xe^{-y} \sinh(y) + \cosh(y) \end{aligned}$$

## 8.2. Problemas Quasilineares

Vamos agora considerar o seguinte problema:

Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto,  $a_j \in C^1(U \times \mathbb{R})$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $f \in C^1(U \times \mathbb{R})$  e  $g \in C^1(\Gamma)$ , em que  $\Gamma = U \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \neq \emptyset$ . Consideremos o seguinte problema:

$$(8.2.1) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_j(x, u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) &= f(x, u(x)), & x \in \tilde{U} \\ u(x) &= g(x), & x \in \Gamma \cap \tilde{U} \end{aligned}$$

Para este problema, podemos provar o seguinte Teorema:

**TEOREMA 304.** *Suponha que  $x_0 \in \Gamma$  seja tal que  $a_n(x_0, g(x_0)) \neq 0$ , então existe uma vizinhança aberta  $\tilde{U} \subset U$  de  $x_0$  e uma função  $u \in C^1(\tilde{U})$  que é solução do Problema 8.2.1.*

Para este problema vamos definir o seguinte campo de vetores  $V : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  por

$$V(x, z) = (a_1(x, z), \dots, a_n(x, z), f(x, z)).$$

**DEFINIÇÃO 305.** Uma curva integral de  $V$  é um caminho  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  que satisfaz a equação diferencial  $\gamma'(t) = V(\gamma(t))$ . Assim, se  $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t), z(t))$ , então

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_1(x_1(t), \dots, x_n(t), z(t)) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_n(x_1(t), \dots, x_n(t), z(t)) \\ z'(t) &= f(x_1(t), \dots, x_n(t), z(t)) \end{aligned}$$

**PROPOSIÇÃO 306.** *Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\gamma(t) = (x(t), z(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , uma curva integral com imagem no aberto  $W \times \mathbb{R} \subset U \times \mathbb{R}$  e  $u : W \rightarrow \mathbb{R}$  uma solução de  $\sum_{j=1}^n a_j(x, u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = f(x, u(x))$ ,  $x \in W$ . Logo  $v = u \circ x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma solução da equação  $v'(t) = f(\gamma(t))$ .*

**DEMONSTRAÇÃO.** A demonstração segue da regra da cadeia. De fato, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v(t) &= \frac{d}{dt} u \circ x(t) = \nabla u(x(t)) \cdot x'(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}(x(t)) a_j(x(t)) \\ &= f(x(t), u \circ x(t)) = f(x(t), v(t)). \end{aligned}$$

□

Assim, observamos que, se existir uma curva característica  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $\gamma(a) = (x_0, g(x_0))$  e  $\gamma(b) = (x_1, z(b))$ , então a solução  $u$  no ponto  $u(x_1)$  pode ser encontrada achando  $v(b)$ , em que  $v$  é solução da EDO:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt}(t) &= f(x(t), v(t)), & t \in [a, b] \\ v(a) &= u(x_0) = g(x_0). \end{aligned}$$

Assim, se tivermos uma solução  $u : V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que todo ponto  $x_1 \in V \subset U$  pode ser ligado a uma curva integral até  $\Gamma$ , então poderemos determinar  $u(x_1)$  resolvendo uma EDO. Esta é a ideia principal!

Isto nos dá uma receita. Seja  $x_0 \in \Gamma$ , queremos achar um aberto  $V \subset U$  e uma função  $u : V \rightarrow \mathbb{R}$  que é solução da Equação.

**Receita para achar soluções de problemas de primeira ordem quasilineares:**

1) Para cada  $r \in \Gamma$  numa vizinhança  $\tilde{\Gamma}$  de  $x_0$ , calculamos a curva característica  $\gamma_r'(s) = V(\gamma_r(t))$  com valor inicial  $\gamma_r(0) = (r, g(r))$ .

Usaremos a notação  $\gamma_r(s) = (x(s), z(s))$

2) Diminuindo essa vizinhança se preciso, obtemos um difeomorfismo  $G : \tilde{\Gamma} \times ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow V \subset U$  dado por  $G(r, s) = x_r(s)$ .

3) Por fim, obtemos uma solução  $u : V \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $u(x) = z(G^{-1}(x))$ .

Vamos agora ver alguns exemplos.

EXEMPLO 307. Consideremos a equação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + u(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= 0 \\ u(x, 0) &= x \end{aligned}$$

Aqui o vetor  $V$  é dado por  $V = (z, 1, 0)$ .

1) Dado  $r \in \mathbb{R}$ , vamos achar

$$\begin{aligned} t'(s) &= 1 & t(0) &= 0 \\ x'(s) &= z(s), & x(0) &= r \\ z'(s) &= 0 & z(0) &= r \end{aligned} \implies \gamma_r(s) = (r + rs, s, r).$$

Assim, devemos ter  $\gamma_r(s) = (r + rs, s, r)$ .

2) Vamos inverter  $G(r, s) = (r + rs, s, r)$ . Temos

$$(r + rs, s) = (x, t).$$

Logo  $s = t$  e  $r(1 + t) = x$ . Assim,  $r = \frac{x}{1+t}$ . Logo  $G^{-1}(x, t) = \left(\frac{x}{1+t}, t\right)$ .

3) Por fim,  $u(x, t) = z(G^{-1}(x, t))$ . De fato,

$$u(x, t) = \frac{x}{1+t}.$$

EXEMPLO 308. Consideremos a equação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + u(x, t)^2 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= 0 \\ u(x, 0) &= x \end{aligned}$$

Aqui o vetor  $V$  é dado por  $V = (z^2, 1, 0)$ .

1) Dado  $r \in \mathbb{R}$ , vamos achar

$$\begin{aligned} t'(s) &= 1 & t(0) &= 0 \\ x'(s) &= z(s)^2, & x(0) &= r \\ z'(s) &= 0 & z(0) &= r \end{aligned} \implies \gamma_r(s) = (r + r^2s, s, r).$$

Assim, devemos ter  $\gamma_r(s) = (r + r^2s, s, r)$ .

2) Vamos inverter  $G(r, s) = (r + r^2s, s)$ . Temos

$$(r + r^2s, s) = (x, t).$$

Logo  $s = t$  e  $r + tr^2 = x$ .

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4xt}}{2t}.$$

Note que  $x(0, r) = r$ . Assim

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4xt}}{2t} = \begin{cases} -\frac{1}{t} + x, & \text{se o sinal for } - \\ x & \text{se o sinal for } + \end{cases}.$$

Assim, devemos escolher o sinal +. Portanto, Assim,  $r = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4xt}}{2t}$  e  $s = t$ . Logo  $G^{-1}(x, t) = \left( \frac{-1 + \sqrt{1 + 4xt}}{2t}, t \right)$ .

3) Por fim,  $u(x, t) = z(G^{-1}(x, t))$ . De fato,

$$u(x, t) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4xt}}{2t}.$$

Vamos agora ver dois exemplos em que não obteremos uma solução final, apenas uma fórmula implícita.

EXEMPLO 309. Consideremos a equação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + u(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= 0 \\ u(x, 0) &= \phi(x) \end{aligned}$$

Aqui o vetor  $V$  é dado por  $V = (z, 1, 0)$ .

1) Dado  $r \in \mathbb{R}$ , vamos achar

$$\begin{aligned} t'(s) &= 1 & t(0) &= 0 \\ x'(s) &= z(s), & x(0) &= r \\ z'(s) &= 0 & z(0) &= \phi(r) \end{aligned} \implies \gamma_r(s) = (r + \phi(r)s, s, \phi(r)).$$

Assim, devemos ter  $\gamma_r(s) = (r + \phi(r)s, s, \phi(r))$ .

2) Vamos inverter  $G(r, s) = (r + \phi(r)s, s, r)$ . Temos

$$(r + \phi(r)s, s) = (x, t).$$

Logo  $s = t$  e  $r + \phi(r)t = x$ . É difícil obter  $r$  em função de  $x$  e  $t$  só com isso.

3) Mesmo sem inverter  $G$ , sabemos que  $u(x, t) = z(G^{-1}(x, t))$ . Logo

$$u(x, t) = \phi(r(x, t)) = \phi(x - t\phi(r(x, t))) = \phi(x - tu(x, t)).$$

EXEMPLO 310. Consideremos a equação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \nabla \cdot F(u(x, t)) &= 0 \\ u(x, 0) &= \phi(x) \end{aligned},$$

em que  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^1$ . Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + F'(u(x, t)) \cdot \nabla u(x, t) &= 0 \\ u(x, 0) &= \phi(x) \end{aligned},$$

Aqui o vetor  $V$  é dado por  $V = (F'(z), 1, 0)$ .

1) Dado  $r \in \mathbb{R}^n$ , vamos achar

$$\begin{aligned} t'(s) &= 1 & t(0) &= 0 \\ x'(s) &= F'(z(s)), & x(0) &= r \\ z'(s) &= 0 & z(0) &= \phi(r) \end{aligned} \implies \gamma_r(s) = (r + sF'(\phi(r)), s, \phi(r)).$$

Assim, devemos ter  $\gamma_r(s) = (r + sF'(\phi(r)), s, \phi(r))$ .

2) Vamos inverter  $G(r, s) = (r + sF'(\phi(r)), s)$ . Temos

$$(r + sF'(\phi(r)), s) = (x, t).$$

Logo  $s = t$  e  $r + tF'(\phi(r)) = x$ . Mais uma vez, é difícil obter  $r$  em função de  $x$  e  $t$  só com isso.

3) Mesmo sem inverter  $G$ , sabemos que  $u(x, t) = z(G^{-1}(x, t))$ . Logo

$$u(x, t) = \phi(r(x, t)) = \phi(x - tF'(\phi(r(x, t)))) = \phi(x - tF'(u(x, t))).$$

**8.2.1. Prova do Teorema: Por que tudo funciona bem?** Ambas as receitas podem ser justificadas na demonstração do seguinte Teorema (que já foi enunciado anteriormente):

**TEOREMA 311.** *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto,  $a_j \in C^1(U \times \mathbb{R})$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $f \in C^1(U \times \mathbb{R})$  e  $g \in C^1(\Gamma)$ , em que  $\Gamma = U \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \neq \emptyset$ . Consideremos o seguinte problema:*

$$(8.2.2) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_j(x, u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) &= f(x, u(x)), & x \in U \\ u(x) &= g(x), & x \in \Gamma \end{aligned}$$

Suponha que  $x_0 \in \Gamma$  seja tal que  $a_n(x_0, g(x_0)) \neq 0$ , então existe uma vizinhança aberta  $\tilde{U} \subset U$  de  $x_0$  e uma função  $u \in C^1(\tilde{U})$  que é solução do Problema 8.2.2 para todo  $x$  em  $\tilde{U}$ .

**DEMONSTRAÇÃO.** Sabemos que  $V : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  dado por  $V(x, z) = (a_1(x, z), \dots, a_n(x, z), f(x, z))$  é um campo de vetores de classe  $C^1$ . Pela Teoria de EDO, sabemos que dado um ponto  $(x'_0, 0, g(x_0)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , existem constantes  $\delta_0, \delta_1$  e  $\delta_2$  tais que  $B_{\delta_0}(x_0) \subset U$  e uma função  $\Phi : B_{\delta_0}(x_0) \times ]g(x_0) - \delta_1, g(x_0) + \delta_1[ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  com imagem em  $U \times \mathbb{R}$ , chamada de fluxo do campo  $V$ , tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial s}(x, z, s) &= V(\Phi(x, z, s)), & (x, z, s) \in B_{\delta_0}(x_0) \times ]g(x_0) - \delta_1, g(x_0) + \delta_1[ \times ]-\delta_2, \delta_2[ \\ \Phi(x, z, 0) &= (x, z), & B_{\delta_0}(x_0) \times ]g(x_0) - \delta_1, g(x_0) + \delta_1[ \end{aligned}$$

Atenção: Note que  $B_{\delta_0}(x_0)$  é uma bola em  $\mathbb{R}^n$  e  $B_{\delta_0}(x'_0)$  é uma bola em  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

Vamos supor que  $g(r, 0)$  pertença a  $]g(x_0) - \delta_1, g(x_0) + \delta_1[$  se  $|r - x'_0| < \delta_0$ . Para tanto, pode ser necessário diminuir  $\delta_0$ . Para facilitar, vamos manter a mesma notação.

Com essa hipótese, a função  $(r, s) \in B_{\delta_0}(x'_0) \times ]-\delta_2, \delta_2[ \subset \mathbb{R}^n \mapsto \gamma_r(s) \in \mathbb{R}^{n+1}$  definida como

$$\gamma_r(s) = \Phi((r, 0), g(r, 0), s) = (x(r, s), z(r, s)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

é uma função de classe  $C^1$ , pois  $\Phi$  e  $g$  são de classe  $C^1$ , e é tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial s}(r, s) &= a_j(x(r, s), z(r, s)), & (r, s) \in B_{\delta_0}(x'_0) \times ]-\delta_2, \delta_2[ \\ \frac{\partial z}{\partial s}(r, s) &= f(x(r, s), z(r, s)), & (r, s) \in B_{\delta_0}(x'_0) \times ]-\delta_2, \delta_2[ \\ x(r, 0) &= (r, 0), & r \in B_{\delta_0}(x'_0) \\ z(r, 0) &= g(r, 0) & r \in B_{\delta_0}(x'_0) \end{aligned}$$

As duas primeiras equações seguem de  $\frac{\partial \Phi}{\partial s}((r, 0), g(r, 0), s) = V(\Phi((r, 0), g(r, 0), s))$ . As duas últimas equações seguem de  $\Phi((r, 0), g(r, 0), 0) = ((r, 0), g(r, 0))$ . Note portanto que a função  $(r, s) \mapsto \gamma_r(s)$  corresponde a função do passo 1.

Agora vamos definir  $G : B_{\delta_0}(x'_0) \times ]-\delta_2, \delta_2[ \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  por  $G(r, s) = x(r, s)$ . Esta é a função do passo 2. Vamos mostrar que para  $\delta_0$  e  $\delta_2$  pequenos, a função  $G$  é um difeomorfismo de classe  $C^1$  sobre sua imagem. Para tanto vamos usar o teorema da aplicação aberta.

Primeiramente, observamos que  $G$  é de classe  $C^1$ , já que  $(r, s) \mapsto \gamma_r(s)$  é de classe  $C^1$ . Agora, para aplicar o teorema da aplicação aberta, basta mostrar que o Jacobiano de  $G$  no ponto  $(x'_0, 0)$  é invertível. Para isto vamos calcular a matriz Jacobiana de  $G$ . Temos

$$JG(r, s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial r_1}(r, s) & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial r_{n-1}}(r, s) & \frac{\partial G_1}{\partial s}(r, s) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial r_1}(r, s) & \dots & \frac{\partial G_n}{\partial r_{n-1}}(r, s) & \frac{\partial G_n}{\partial s}(r, s) \end{pmatrix}.$$

Vemos que  $G(r, 0) = x(r, 0) = (r, 0)$ , ou seja,  $G_j(r, 0) = r_j$ ,  $1 \leq j \leq n-1$  e  $G_n(r, 0) = 0$ . Assim,  $\frac{\partial G_i}{\partial r_j}(r, 0) = \delta_{ij}$  para  $1 \leq i \leq n-1$  e  $\frac{\partial G_n}{\partial r_j}(r, 0) = 0$ . Em particular,  $\frac{\partial G_i}{\partial r_j}(x'_0, 0) = \delta_{ij}$  para  $1 \leq i \leq n-1$  e  $\frac{\partial G_n}{\partial r_j}(x'_0, 0) = 0$ . Por outro lado,  $\frac{\partial G_j}{\partial s}(r, s) = \frac{\partial x_j}{\partial s}(r, s) = a_j(x(r, s), z(r, s))$ , ou seja,

$$\frac{\partial G_j}{\partial s}(x'_0, 0) = a_j(x(x'_0, 0), z(x'_0, 0)) = a_j((x'_0, 0), g(x'_0, 0)) = a_j(x_0, g(x_0)).$$

Concluimos que

$$JG(x'_0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial r_1}(x'_0, 0) & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial r_{n-1}}(x'_0, 0) & \frac{\partial G_1}{\partial s}(x'_0, 0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial r_1}(x'_0, 0) & \cdots & \frac{\partial G_n}{\partial r_{n-1}}(x'_0, 0) & \frac{\partial G_n}{\partial s}(x'_0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & a_1(x_0, g(x_0)) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{n-1}(x_0, g(x_0)) \\ 0 & \cdots & 0 & a_n(x_0, g(x_0)) \end{pmatrix}.$$

Portanto,  $\det(JG(x'_0, 0)) = a_n(x_0, g(x_0)) \neq 0$ , pela hipótese do Teorema.

Assim, o teorema da aplicação aberta nos diz que diminuindo  $\delta_0$  e  $\delta_2$  se necessário, existe  $\tilde{U} \subset U$  tal que  $G : B_{\delta_0}(x'_0) \times ]-\delta_2, \delta_2[ \rightarrow \tilde{U}$  é um difeomorfismo de classe  $C^1$ .

Vamos, por fim, mostrar que  $u = z \circ G^{-1} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma solução do problema. Para tanto, observamos primeiro que  $G(x', 0) = x(x', 0) = (x', 0)$ . Logo  $(x', 0) = G^{-1}(x', 0)$ . Assim,

$$u(x', 0) = z \circ G^{-1}(x', 0) = z(x', 0) = g(x', 0).$$

A condição inicial é satisfeita.

Agora observamos que  $u \circ G(r, s) = z(r, s)$ . Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} u \circ G(r, s) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}(G(r, s)) \frac{\partial G_j}{\partial s}(r, s) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}(G(r, s)) \frac{\partial x_j}{\partial s}(r, s) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}(G(r, s)) a_j(x(r, s), z(r, s)) \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial s} z(r, s) = f(x(r, s), z(r, s)).$$

Como  $u \circ G(r, s) = z(r, s)$ , temos que  $\frac{\partial}{\partial s} u \circ G(r, s) = \frac{\partial z}{\partial s}(r, s)$ . Portanto,

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}(G(r, s)) a_j(x(r, s), z(r, s)) = f(x(r, s), z(r, s)).$$

Agora vamos denotar  $x = G(r, s) = x(r, s)$ . Logo  $z(r, s) = u \circ G(r, s) = u(x)$ . Assim, temos

$$\sum_{j=1}^n a_j(x, u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = f(x, u(x)),$$

ou seja,  $u$  é uma solução em  $\tilde{U}$ . □

Por fim, vamos terminar vendo dois exemplos abaixo:

EXEMPLO 312. Considere a equação

$$\begin{aligned} -y \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + x \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ u(x, 0) &= x, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}.$$

Essa equação tem solução? Não, pois consideremos as características:

$$x'(s) = -y(s) \text{ e } y'(s) = x(s).$$

Se  $(x(0), y(0)) = (r, 0)$ ,  $r \neq 0$ , então  $(x(s), y(s)) = (r \cos(s), r \sin(s))$ . Vimos que  $u((x(s), y(s)))$  deve satisfazer

$$\frac{d}{ds} u((x(s), y(s))) = 0 \implies u(x(s), y(s)) = \text{constante}.$$

Como em 0 essa constante é igual a  $r$ , concluimos que

$$u(x(\pi), y(\pi)) = u(x(0), y(0)).$$

Mas  $u(x(0), y(0)) = u(r, 0) = r$  e  $u(x(\pi), y(\pi)) = u(-r, 0) = -r$ . Logo temos uma contradição. Assim, vemos que soluções globais nem sempre existem.

EXEMPLO 313. Considere a equação

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x, 0) = x, & x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Neste caso,  $a_2(x, y) = 0$ . Essa equação não tem nenhuma solução nem local. De fato,

$$u(x, 0) = u(x_0, 0) + (x - x_0) \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + \theta(x - x_0), 0) d\theta = u(x_0, 0).$$

Mas  $u(x, 0) = x$  e  $u(x_0, 0) = x_0$ . Assim, dado  $x_0 \in \mathbb{R}$ , não existe nenhum aberto  $U$  que contém  $(x_0, 0)$  e  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $u$  é solução. Caso existisse, então existiria  $(x, 0) \in U$  com  $x \neq x_0$  e  $[x, x_0] \times \{0\} \subset U$  e teríamos a contradição acima.

### 8.3. O problema em hiperfícies

Seja  $\Gamma$  uma hiperfície de classe  $C^1$  contida em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Vamos provar o seguinte teorema:

TEOREMA 314. *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto,  $a_j \in C^1(U \times \mathbb{R})$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $f \in C^1(U \times \mathbb{R})$  e  $g \in C^1(\Gamma)$ . Consideremos o seguinte problema:*

$$(8.3.1) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_j(x, u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = f(x, u(x)), & x \in U \\ u(x) = g(x), & x \in \Gamma \end{cases}.$$

Suponha que  $x_0 \in \Gamma$  seja tal que  $\sum_{j=1}^n a_j(x_0, u(x_0)) \nu_j(x_0) \neq 0$ , em que  $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$  é a normal a superfície  $\Gamma$  então existe uma vizinhança aberta  $\tilde{U} \subset U$  de  $x_0$  e uma função  $u \in C^1(\tilde{U})$  que é solução do Problema 8.3.1 para todo  $x$  em  $\tilde{U}$ .

DEMONSTRAÇÃO. Como  $x_0 \in \Gamma$ , então, já que  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  é uma hiperfície, sabemos que existe um aberto  $U_{x_0}$  que contém  $x_0$  e uma função  $\Phi : U_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  tal que

$$\Phi(x_0) = (y'_0, 0) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$$

e

$$\Phi(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \iff x \in \Gamma \cap U_{x_0}.$$

Em particular, a função  $\phi : \{y' \in \mathbb{R}^{n-1}; (y', 0) \in \Phi(U_{x_0})\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\phi(y') = \Phi^{-1}(y', 0)$  é uma parametrização. Lembramos que  $g \in C^1(\Gamma)$  implica que  $g \circ \phi$  é de classe  $C^1$ .

Nossa demonstração então é simples. Basta definir  $v = u \circ \Phi^{-1}$  e mostrar que  $u$  resolve 8.3.1 se, e somente se,  $v$  resolve uma equação análoga, só que para  $\Gamma$  um semiplano. Como já vimos que existe solução  $v$  se  $\Gamma$  for um pedaço de  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ , concluímos que existe  $v$  e, portanto, existe  $u$ .

Vamos então fazer as mudanças de coordenadas. Se  $u(x) = v(\Phi(x))$ , então

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}(v(\Phi(x))) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_k}(\Phi(x)) \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j}(x).$$

Logo  $v$  deve ser solução de

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_j(x, v(\Phi(x))) \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_k}(\Phi(x)) \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j}(x) = f(x, v(\Phi(x))), & x \in U_{x_0} \\ v(\Phi(x)) = g(x), & x \in U_{x_0} \cap \Gamma \end{cases}.$$

Fazendo a mudança de variável  $y = \Phi(x)$  e chamando  $V_{x_0} = \Phi(U_{x_0})$ , obtemos

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_j(\Phi^{-1}(y), v(y)) \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j}(\Phi^{-1}(y)) \right) \frac{\partial v}{\partial y_k}(y) = f(\Phi^{-1}(y), v(y)), & x \in V_{x_0} \\ v(y) = g(\Phi^{-1}(y)), & x \in V_{x_0} \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \end{cases}.$$

Para terminar a demonstração, basta mostrar que a equação acima tem solução numa vizinhança de  $y_0 = (y'_0, 0) = \Phi(x_0)$ . Para tanto, basta provar que

$$\sum_{j=1}^n a_j(x_0, g(x_0)) \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_j}(x_0) \neq 0.$$

Mas isto corresponde a condição  $\sum_{j=1}^n a_j(x_0, u(x_0))\nu_j(x_0) \neq 0$ . Basta provar que  $\nu(x_0) = \pm \frac{\nabla\Phi_n(x_0)}{|\nabla\Phi_n(x_0)|}$ . Isto é simples. Como  $\Gamma$  pode ser descrito pela parametrização  $\phi$ , temos que uma base do espaço tangente de  $\Gamma$  em  $x_0$  é dada por  $\frac{\partial\phi}{\partial y_1} = \frac{\partial\Phi^{-1}}{\partial y_1}(y_0), \dots, \frac{\partial\phi}{\partial y_{n-1}} = \frac{\partial\Phi^{-1}}{\partial y_{n-1}}(y_0)$ . Basta mostrar que esses vetores são ortogonais a  $\nabla\Phi_n(x_0)$ .

Para verificar isto, lembramos que  $(J\Phi(x_0))(J\Phi^{-1}(y_0)) = I$ , em que  $J\Phi$  e  $J\Phi^{-1}$  são as matrizes Jacobianas. Assim,

$$\sum_{j=k}^n \frac{\partial\Phi_i}{\partial x_k}(x_0) \frac{\partial\Phi_k^{-1}}{\partial y_j}(y_0) = \delta_{ij}.$$

Desta maneira, temos

$$\nabla\Phi_n(x_0) \cdot \frac{\partial\phi}{\partial y_i}(y_0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial\Phi_n}{\partial x_j}(x_0) \frac{\partial\Phi_j^{-1}}{\partial y_i}(y_0) = 0,$$

pois  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Portanto  $i \neq n$ . □

### 8.3.1. Exercícios.

EXERCÍCIO 315. (VASY CAP. 3.1)

i) Resolva  $\text{sen}(y) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = x$ ,  $u(x, 0) = 0$ .

ii) Esboce as curvas características.

EXERCÍCIO 316. (VASY CAP. 3.2)

i) Resolva  $x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u^2$ ,  $u(x, 0) = \cos(x)$  para  $|x|$  pequeno.

EXERCÍCIO 317. (VASY CAP. 3.3)

i) Resolva  $x \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ,  $u(x, 0) = e^{-x^2}$ .

ii) Em que região  $u$  está unicamente determinada?

EXERCÍCIO 318. (VASY CAP. 3.4)

i) Resolva  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = u^2$ ,  $u(x, 0) = e^{-x^2}$ .

ii) Mostre que existe  $T > 0$  onde existe um “blow up”, isto é,  $u$  é de classe  $C^1$  para  $t \in [0, T]$ , mas, para algum  $x_0$ ,  $|u(x_0, t)| \rightarrow \infty$ , quando  $t \rightarrow T^-$ . Quem é  $T$ ?

EXERCÍCIO 319. (VASY CAP. 4.1)

Resolva  $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ,  $u(x, 0) = -x^2$  para  $|t|$  pequeno.

EXERCÍCIO 320. (VASY CAP. 4.2)

Resolva  $e^t \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ,  $u(x, 0) = x$  para  $|t|$  pequeno.

EXERCÍCIO 321. (VASY CAP. 4.3)

Considere a EDP

$$(1+u) \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$u(0, y) = y$$

Resolva a EDP numa vizinhança de  $(0, 0)$ . É possível resolver a EDP numa vizinhança de todo eixo  $y$ ? O que acontece próximo a  $x = 0$  e  $y = -1$ ? Justifique sua resposta.

EXERCÍCIO 322. (FOLLAND CAP. 1.B.1)

Resolva  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u$  com  $u(x, 0) = \cos(x)$ . (Resposta:  $u(x, y) = e^y \cos(x-y)$ ).

EXERCÍCIO 323. (FOLLAND CAP. 1.B.2)

Resolva  $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = u^2$  com  $u(x, 2x) = 1$ . (Resposta:  $u(x, y) = \frac{xy}{(xy-y+2x)}$ ).

EXERCÍCIO 324. (FOLLAND CAP. 1.B.3) Mostre por considerações geométricas que uma solução geral da equação

$$x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0$$

é dada por  $u(x, y) = f(xy)$ . Ache a solução cujo gráfico contém a linha  $u = x = y$ . (Resposta:  $u(x, y) = \sqrt{xy}$ ). O que ocorre com o problema de valor inicial quando ele é dado na superfície  $y = \frac{1}{x}$ ?

EXERCÍCIO 325. (FOLLAND CAP. 1.B.4) Resolva a equação  $u(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 1$  com  $u(x, x) = 0$ . (Resposta:  $u(x, y) = 1 - (1 + 2x - 2y)^{\frac{1}{2}}$ ). Algo estranho ocorre quando consideramos condições iniciais  $u(x, x) = 1$  ao invés de 0. O que é que ocorre?

EXERCÍCIO 326. (EVANS CAP. 3.3) Resolva usando o método das características:

a)  $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 2u$ ,  $u(x_1, 1) = g(x_1)$ .

b)  $u \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} = 1$ ,  $u(x_1, x_1) = \frac{1}{2}x_1$ .

c)  $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + 2x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 3u$ ,  $u(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2)$ .

EXERCÍCIO 327. (Prova de 2019)

a) Resolva a seguinte equação:

$$2 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = u^2, \quad u(x, 0) = e^{-x^2}.$$

A solução está definida para todo o espaço  $\mathbb{R}^2$ ? O método das características garante a existência em todo o espaço  $\mathbb{R}^2$ ?

b) É possível resolver a equação com condições iniciais da forma  $u(2t, t) = e^{-x^2}$ , ou seja, com condições iniciais dadas na reta  $\{(2t, t), t \in \mathbb{R}\}$ ? Se for possível, resolva. Se não for, explique o porquê ocorre um problema.

c) Resolva a seguinte equação:

$$u(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 1, \quad u(x_1, 0) = \frac{1}{2}x_1.$$

EXERCÍCIO 328. (Prova de 2019) Resolva  $x \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = u^2$  com a condição inicial  $u(x, 0) = \text{sen}(x)$ . É possível achar uma solução com a condição  $u(e^{\frac{x}{2}}, x) = \text{sen}(x)$ ? Justifique.

## Problema de Cauchy

Vamos dividir esta seção em duas partes. Começaremos tratando do Problema de Cauchy com condições no semiplano. Depois passaremos para condições de contorno em superfícies.

### 9.1. O problema de Cauchy com condições de contorno em $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ .

Seja  $U = V \times ]-R, R[$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$ , em que  $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$  é um aberto e  $R > 0$  e consideremos a seguinte equação

$$(9.1.1) \quad \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, u(x), \partial^1 u(x), \dots, \partial^{k-1} u(x)) \partial^\alpha u(x) + a_0(x, u(x), \partial^1 u(x), \dots, \partial^{k-1} u(x)) = 0.$$

DEFINIÇÃO 329. Dadas funções  $g_0, \dots, g_{k-1} : V \rightarrow \mathbb{R}$ , o problema de Cauchy consiste em, para cada  $x_0 \in V \times \{0\}$ , achar um aberto  $\tilde{V} \subset V$  e  $0 < \tilde{R} < R$  tal que  $x_0 \in \tilde{V} \times \{0\} \subset U$  e uma função  $u \in C^k(\tilde{U})$ ,  $\tilde{U} = \tilde{V} \times ]-\tilde{R}, \tilde{R}[$ , tal que  $u$  é solução de 9.1.1 em  $\tilde{U}$  e é tal que

$$\begin{aligned} u(x) &= g_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) &= g_1(x) \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \\ \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x_n^{k-1}}(x) &= g_{k-1}(x) \end{aligned}$$

para todo  $x \in \tilde{V} \times \{0\}$ .

Um fato importante é que as condições iniciais permitem determinar as derivadas da solução até ordem  $k-1$  em  $V$ .

PROPOSIÇÃO 330. *Sejam  $g_j \in C^\infty(U)$  e  $u : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^k$  que é uma solução do problema de Cauchy acima. Logo podemos determinar de maneira única as derivadas*

$$\frac{\partial^j u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}(x),$$

para todo  $x \in \tilde{V} \times \{0\}$  e  $k_n \leq k-1$ .

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que se  $k_n \leq k-1$  e  $k_1 + \dots + k_n = j$ , então

$$\frac{\partial^j u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}(x) = \frac{\partial^{j-k_n}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_{n-1}^{k_{n-1}}} \left( \frac{\partial^{k_n} u}{\partial x_n^{k_n}}(x) \right) = \frac{\partial^{j-k_n}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_{n-1}^{k_{n-1}}} (g_{k_n}(x)) = \frac{\partial^{j-k_n} g_{k_n}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_{n-1}^{k_{n-1}}}(x).$$

□

E o que podemos dizer sobre as derivadas de ordem  $k$ ? Mais especificamente, como podemos calcular  $\frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}(x)$ ? Para tanto precisamos da equação original. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} a_{(0, \dots, k)}(x, u(x), \partial^1 u(x), \dots, \partial^{k-1} u(x)) \frac{\partial^k u(x)}{\partial x_n^k} &= a_0(x, u(x), \partial^1 u(x), \dots, \partial^{k-1} u(x)) \\ &\quad - \sum_{|\alpha|=k, \alpha_n < k} a_\alpha(x, u(x), \partial^1 u(x), \dots, \partial^{k-1} u(x)) \partial^\alpha u(x). \end{aligned}$$

Se  $a_{(0,\dots,k)}(x, u(x), \partial^1 u(x), \dots, \partial^{k-1} u(x)) \neq 0$ , então temos

$$\frac{\partial^k u(x)}{\partial x_n^k} = \frac{1}{a_{(0,\dots,k)}(x, u(x), \partial^1 u(x), \dots, \partial^{k-1} u(x))} \left( a_0(x, u(x), \partial^1 u(x), \dots, \partial^{k-1} u(x)) - \sum_{|\alpha|=k, \alpha_n < k} a_\alpha(x, u(x), \partial^1 u(x), \dots, \partial^{k-1} u(x)) \partial^\alpha u(x) \right).$$

Note que a condição  $a_{(0,\dots,k)}(x, u(x), \partial^1 u(x), \dots, \partial^{k-1} u(x)) \neq 0$  foi necessária para isolar  $\frac{\partial^k u(x)}{\partial x_n^k}$ . Observe que  $a_{(0,\dots,k)}(x, u(x), \partial^1 u(x), \dots, \partial^{k-1} u(x))$  é unicamente determinado pelas funções  $g_0, \dots, g_k$ . Isto nos motiva a seguinte definição.

**DEFINIÇÃO 331.** Dizemos que a equação é não característica para a superfície  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$  e para as condições iniciais determinadas por  $g_0, \dots, g_k$  se

$$a_{(0,\dots,k)}(x, u(x), \partial^1 u(x), \dots, \partial^{k-1} u(x)) \neq 0,$$

para todo  $x \in V$ .

## 9.2. O problema de Cauchy em superfícies $\Gamma$ .

O problema de Cauchy pode ser enunciado da seguinte maneira:

**DEFINIÇÃO 332.** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e considere a seguinte equação quasi-linear e escalar:

$$(9.2.1) \quad \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, u(x), \partial^1 u(x), \dots, \partial^{k-1} u(x)) \partial^\alpha u(x) + a_0(x, u(x), \partial^1 u(x), \dots, \partial^{k-1} u(x)) = 0.$$

Seja  $\Gamma \subset U$  uma hiperfície e considere funções  $g_0, \dots, g_{k-1} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ . O problema de Cauchy consiste em, para cada  $x_0 \in \Gamma$ , achar um aberto  $V$  tal que  $x_0 \in V \subset U$  e uma função  $u \in C^k(V)$  tal que  $u$  é solução de 9.2.1 em  $V$  e tal que

$$\begin{aligned} u(x) &= g_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) &= g_1(x) \\ &\vdots \\ \frac{\partial^{k-1} u}{\partial^{k-1} \nu}(x) &= g_{k-1}(x) \end{aligned}$$

para todo  $x \in V \cap \Gamma$ .

Acima, usamos a seguinte definição:

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}(x) := \sum_{|\alpha|=j} \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}(x) \nu^\alpha(x) = \sum_{k_1 + \dots + k_n = j} \frac{\partial^j u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}(x) \nu_1(x)^{k_1} \dots \nu_n(x)^{k_n}.$$

Para resolver o Problema de Cauchy, precisaremos da seguinte hipótese: a superfície  $\Gamma$  não deve ser característica. Com isto, queremos dizer o seguinte:

**DEFINIÇÃO 333.** Dizemos que  $\Gamma \subset U$  é uma superfície não característica para o problema de Cauchy se

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, u(x), \partial^1 u(x), \dots, \partial^{k-1} u(x)) \nu^\alpha(x) \neq 0.$$

Novamente, podemos fazer uma mudança de coordenadas e chegar ao um problema com condição inicial em  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ . Abaixo, vamos considerar o problema semilinear para facilitar as contas.

De fato, seja  $x_0 \in \Gamma$ . Já que  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  é uma hiperfície, sabemos que existe um aberto  $U_{x_0}$  que contém  $x_0$  e uma função  $\Phi : U_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  tal que

$$\Phi(x_0) = (y'_0, 0) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$$

e

$$\Phi(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \iff x \in \Gamma \cap U_{x_0}.$$

Em particular, a função  $\phi : \{y' \in \mathbb{R}^{n-1}; (y', 0) \in \Phi(U_{x_0})\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\phi(y') = \Phi^{-1}(y', 0)$  é uma parametrização. Vamos definir  $v = u \circ \Phi^{-1}$ . Vamos então fazer as mudanças de coordenadas. Se  $u(x) = v(\Phi(x))$ , então

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}(v(\Phi(x))) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_k}(\Phi(x)) \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial v}{\partial y_n}(\Phi(x)) \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_j}(x) + \text{termos sem } \frac{\partial v}{\partial y_n}.$$

Derivando 2 vezes, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l}(\Phi(x)) \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j}(x) \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_i}(x) + \text{termos de ordem } \leq 1 \\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial y_n^2}(\Phi(x)) \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_j}(x) \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_i}(x) + \text{termos sem } \frac{\partial^2 v}{\partial y_n^2} \end{aligned}$$

Se  $|\alpha| = k$ , então

$$\partial^\alpha (v \circ \Phi)(x) = \frac{\partial^k v}{\partial y_n^k}(\Phi(x)) \left( \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1}(x) \right)^{\alpha_1} \dots \left( \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n}(x) \right)^{\alpha_n} + \text{termos sem } \frac{\partial^k v}{\partial y_n^k}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) \\ &= \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) \left( \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1}(x) \right)^{\alpha_1} \dots \left( \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n}(x) \right)^{\alpha_n} \frac{\partial^k v}{\partial y_n^k}(\Phi(x)) + \text{termos sem } \frac{\partial^k v}{\partial y_n^k} \\ &= \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) \nu_1(x)^{\alpha_1} \dots \nu_n(x)^{\alpha_n} \frac{\partial^k v}{\partial y_n^k}(\Phi(x)) + \text{termos sem } \frac{\partial^k v}{\partial y_n^k} \\ &= \left( \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) \nu(x)^\alpha \right) \frac{\partial^k v}{\partial y_n^k}(\Phi(x)) + \text{termos sem } \frac{\partial^k v}{\partial y_n^k} \end{aligned}$$

Com isto concluímos que  $v$  satisfaz

$$(9.2.2) \quad \sum_{|\alpha|=k} b_\alpha(y) \partial^\alpha v(y) + b_0(y, v(y), \partial^1 v(y), \dots, \partial^{k-1} v(y)) = 0.$$

O interessante é que o

$$b_{(0, \dots, 0, k)}(\Phi(x)) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) \nu(x)^\alpha \neq 0.$$

**9.2.1. Exemplos de superfícies características para problemas semilineares.** Vamos considerar problemas de segunda ordem em  $\mathbb{R}^n$  da seguinte forma:

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) + f(x, u(x), \partial^1 u(x), \dots, \partial^{k-1} u(x)) = 0.$$

Neste caso, as superfícies características não dependem das condições das derivadas de  $u$  sobre ela. Assim,  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  é uma hiperfície característica se, e somente se, para todo  $x \in \Gamma$ , a normal  $\nu(x)$  for tal que

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \nu^\alpha(x) = 0,$$

em que  $\nu^\alpha(x) = \nu_1^{\alpha_1}(x) \dots \nu_n^{\alpha_n}(x)$ .

Observe o que ocorre em duas dimensões para operadores de primeira ordem. Como estamos em duas dimensões, as hiperfícies serão curvas.

EXEMPLO 334. Consideremos o operador linear  $a(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ , com  $a(x, y) \neq 0$  e  $b(x, y) \neq 0$  (na verdade, bastaria  $a^2(x, y) + b^2(x, y) \neq 1$ . A hipótese mais forte é só para facilitar). Seja  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva de classe  $C^1$  cuja derivada nunca se anula. Denotemos  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ . Sabemos que sua tangente é dada por  $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ . Logo uma normal, não normalizada, é dada por  $\nu(\gamma(t)) = (-y'(t), x'(t))$ . Quando é que essa curva é característica? Para tanto, devemos ter

$$a(x(t), y(t))\nu_1(x(t), y(t)) + b(x(t), y(t))\nu_2(x(t), y(t)) = 0, \forall t \in [t_0, t_1].$$

Mas isto nos diz que

$$-y'(t)a(x(t), y(t)) + x'(t)b(x(t), y(t)) = 0, \forall t \in [t_0, t_1].$$

Para que isto ocorra, devemos ter

$$y'(t)a(x(t), y(t)) = x'(t)b(x(t), y(t)) \implies \frac{x'(t)}{a(x(t), y(t))} = \frac{y'(t)}{b(x(t), y(t))} = \lambda(t).$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} x'(t) &= \lambda(t)a(x(t), y(t)) \\ y'(t) &= \lambda(t)b(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Como  $\gamma'(t) \neq 0$ , sabemos que  $\lambda$  nunca se anula. Portanto é sempre negativo ou sempre positivo. Suponha que  $\lambda$  seja sempre positivo. Vamos definir  $\tilde{x}(t) = x\left(t_0 + \int_0^t \frac{1}{\lambda(s)} ds\right)$  e  $\tilde{y}(t) = y\left(t_0 + \int_0^t \frac{1}{\lambda(s)} ds\right)$ . Vemos que  $\tilde{\gamma}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$  tem a mesma imagem que  $\gamma$ : trata-se apenas de uma reparametrização. Além disso, vemos que

$$\begin{aligned} \tilde{x}'(t) &= x'\left(t_0 + \int_0^t \frac{1}{\lambda(s)} ds\right) \frac{1}{\lambda(t)} = a\left(x\left(t_0 + \int_0^t \frac{1}{\lambda(s)} ds\right), y\left(t_0 + \int_0^t \frac{1}{\lambda(s)} ds\right)\right) = a(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \\ y'(t) &= y'\left(t_0 + \int_0^t \frac{1}{\lambda(s)} ds\right) \frac{1}{\lambda(t)} = b\left(x\left(t_0 + \int_0^t \frac{1}{\lambda(s)} ds\right), y\left(t_0 + \int_0^t \frac{1}{\lambda(s)} ds\right)\right) = b(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \end{aligned}$$

Ou seja, a imagem da curva característica  $\gamma$  coincide com a imagem de uma curva integral do campo  $V(x, y) = (a(x(t), y(t)), b(x(t), y(t)))$ . Estas curvas integrais também forma chamadas de curvas características quando estudamos o método das características.

Vamos agora ver o que ocorre com equações de segunda ordem em  $\mathbb{R}^n$ .

EXEMPLO 335. Consideramos o operador o Laplaciano  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$  e uma hiperfície  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ . Seja  $\nu : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  o campo de vetores normal a  $\Gamma$ . Logo temos

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x)\nu^\alpha(x) = \nu_1^2(x) + \dots + \nu_n^2(x) = |\nu(x)|^2 = 1 \neq 0.$$

Assim, vemos que nesse caso toda hiperfície é não característica.

EXEMPLO 336. Consideramos a equação do calor  $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$  e uma hiperfície  $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Seja  $\nu : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\nu(x, t) = (\nu_1(x, t), \dots, \nu_{n+1}(x, t))$  o campo de vetores normal a  $\Gamma$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Logo temos

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x, t)\nu^\alpha(x, t) = \nu_1^2(x, t) + \dots + \nu_n^2(x, t).$$

Note que acima temos só  $n$  termos, mas estamos em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . O termo  $\nu_{n+1}(x, t)$  não aparece, pois não há nenhum termo de segunda ordem com a variável temporal.

A superfície  $\Gamma$  é característica se  $\nu_1(x, t) = \dots = \nu_n(x, t) = 0$  para todo  $x \in \Gamma$ . Portanto, devemos ter apenas  $\nu_{n+1}(x) = \pm 1$  e a normal deve ser  $\nu(x) = (0, \dots, 0, \pm 1)$ . Assim é fácil concluir que as únicas hiperfícies são aquelas contidas nos hiperplanos

$$S_{t_0} = \{(x, t_0); x \in \mathbb{R}^n\},$$

em que  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

Em  $\mathbb{R}^2$ , as superfícies características (chamadas também de curvas características, pois é uma curva) serão restrições das curvas  $S_{t_0} = \{(x, t_0); x \in \mathbb{R}\}$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

EXEMPLO 337. Consideramos o operador da onda  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$  e uma hiperfície  $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Seja  $\nu : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\nu(x, t) = (\nu_1(x, t), \dots, \nu_{n+1}(x, t))$ , o campo de vetores normal a  $\Gamma$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Logo temos que

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x, t) \nu^\alpha(x, t) = \nu_1^2(x, t) + \dots + \nu_n^2(x, t) - \nu_{n+1}^2(x, t).$$

Assim, uma superfície é característica se  $\nu_1^2(x, t) + \dots + \nu_n^2(x, t) = \nu_{n+1}^2(x, t)$  para todo  $(x, t) \in \Gamma$ . A típica superfície característica serão cones (chamados de cone de luz) da forma:

$$\mathcal{C}_+ = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}; |x - x_0| = t \text{ e } t > 0\} \quad \mathcal{C}_- = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}; |x - x_0| = t \text{ e } t < 0\}.$$

Podemos verificar isto de maneira simples. Seja  $\phi : \mathbb{R}^n \times ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$\phi(x, t) = (x_1 - x_{01})^2 + \dots + (x_n - x_{0n})^2 - t^2.$$

Assim,  $\phi^{-1}(0) = \mathcal{C}_- \cup \mathcal{C}_+$ . Note que  $\nabla \phi(x, t) = (2(x - x_0), -2t)$ . Logo se  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times ]0, \infty[$ , então  $\nabla \phi(x, t) \neq 0$ , pois  $-2t \neq 0$ . Assim, vemos que  $\mathcal{C}_- \cup \mathcal{C}_+$  é uma hiperfície (corresponde a união de dois cones: um para  $t > 0$  e outro para  $t < 0$ . A ponta  $(x_0, 0)$  foi retirada), já que 0 é um ponto regular da função  $\phi$ . Lembramos que a normal de um ponto  $(x, t)$  em uma superfície regular da forma  $\phi^{-1}(0)$  é dada por  $\nabla \phi(x, t)$ . Assim  $\nu(x, t) = \frac{\nabla \phi(x, t)}{|\nabla \phi(x, t)|}$ . Portanto

$$\begin{aligned} \nu_1^2(x, t) + \dots + \nu_n^2(x, t) - \nu_{n+1}^2(x, t) &= \frac{1}{|\nabla \phi(x, t)|^2} (4|x - x_0|^2 - 4t^2) \\ &= \frac{4}{|\nabla \phi(x, t)|^2} \phi(x, t) = 0. \end{aligned}$$

Assim,  $\mathcal{C}_- \cup \mathcal{C}_+$  são superfícies características.

Em  $\mathbb{R}^2$ , as curvas características serão restrições das curvas  $S_1 = \{(x, t); x = x_0 + t \in \mathbb{R}\}$  ou  $S_2 = \{(x, t); x = x_0 - t \in \mathbb{R}\}$ . Observem que  $S_1 \cup S_2$  também forma dois cones.

### 9.3. Propagação de singularidades

Vamos ver um exemplo onde aparecem naturalmente as curvas características de uma equação de segunda ordem.

Seja  $\Gamma \subset U$  uma curva de classe  $C^1$  contida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Vamos supor que  $U \setminus \Gamma = U_+ \cup U_-$ , ou seja,  $\Gamma$  divide o aberto  $U$  em dois pedaços. Dizemos que uma função  $u : U \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^N$  possui salto em  $x_0 \in \Gamma$  se  $u$  for contínua e existirem os limites

$$u_+(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0, x \in U_+} u(x) \quad \text{e} \quad u_-(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0, x \in U_-} u(x).$$

O salto de  $u$  em  $x_0 \in \Gamma$  é então definido como

$$[u](x_0) = u_+(x_0) - u_-(x_0).$$

Dizemos que  $u$  tem salto em  $\Gamma$ , se  $u$  tiver salto em cada  $x \in \Gamma$ . Se  $u$  for contínua em  $U$ , então  $[u] = 0$ .

TEOREMA 338. *Seja  $U \subset \mathbb{R}^2$  um aberto e  $\Gamma \subset U$  uma curva de classe  $C^1$  que divide  $U$  em dois pedaços. Seja  $a_{ij}$ ,  $b_j$  e  $c : U \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas tais que  $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$  para todo  $x \in U$  e  $u \in C^1(U) \cap C^2(U \setminus \Gamma)$  uma função que satisfaz*

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + c(x)u(x) = 0$$

em  $U \setminus \Gamma$ . Se as derivadas segundas tiverem um salto em  $\Gamma$  e  $\left( \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right], \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right], \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right] \right) \neq (0, 0, 0)$ , então  $\Gamma$  é uma curva característica.

DEMONSTRAÇÃO. Sabemos que  $u$  é de classe  $C^1$  em  $U$ . Logo  $[u] = [\frac{\partial u}{\partial x_1}] = [\frac{\partial u}{\partial x_2}] = 0$  ao longo de  $\Gamma$ . Seja o campo de vetores  $(\nu_1, \nu_2)$  normal a  $\Gamma$ . Assim,  $(\nu_2, -\nu_1)$  é um vetor tangente a  $\Gamma$ . Portanto  $\nu_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - \nu_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$  nos dá a derivada direcional tangente a  $\Gamma$ . Como  $[\frac{\partial u}{\partial x_1}] = 0$  em  $\Gamma$ , temos

$$\nu_2 \frac{\partial}{\partial x_1} [\frac{\partial u}{\partial x_1}] - \nu_1 \frac{\partial}{\partial x_2} [\frac{\partial u}{\partial x_1}] = 0$$

e

$$\nu_2 \frac{\partial}{\partial x_1} [\frac{\partial u}{\partial x_2}] - \nu_1 \frac{\partial}{\partial x_2} [\frac{\partial u}{\partial x_2}] = 0.$$

Assim, obtemos

$$\nu_2 [\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1}] - \nu_1 [\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}] = 0$$

e

$$\nu_2 [\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}] - \nu_1 [\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}] = 0.$$

Pela continuidade de  $a_{ij}$ ,  $b_j$  e  $c$ , concluímos que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) [\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}](x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) [\frac{\partial u}{\partial x_j}](x) + c(x)[u(x)] = 0.$$

Logo

$$a_{11}(x) [\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}](x) + 2a_{12}(x) [\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}](x) + a_{22}(x) [\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}](x) = 0.$$

Concluimos que o vetor  $([\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}], [\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}], [\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}])$  satisfaz um sistema dado pela matriz 3 por 3 abaixo:

$$\begin{pmatrix} \nu_2 & -\nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 & -\nu_1 \\ a_{11}(x) & 2a_{12}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}] \\ [\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}] \\ [\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como o salto não é zero, o determinante da matriz deve ser igual a zero. Assim

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \nu_i(x) \nu_j(x) = a_{11} \nu_1^2(x) + 2a_{12}(x) \nu_1(x) \nu_2(x) + a_{22}(x) \nu_2^2(x) = 0.$$

Isto implica que a curva é característica. □

EXEMPLO 339. Para a equação de Laplace,  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  não tem curvas características. Logo uma solução como descrita acima não existe.

EXEMPLO 340. Para a equação de  $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  as curvas características são da forma  $t = 0$ . Logo a solução só pode ter salto nas retas com tempo constante.

EXEMPLO 341. Por fim, para a equação de onda  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  as curvas características são da forma  $|x - x_0| = t$ . Logo a solução só pode ter salto nessas retas que formam o cone de luz.

#### 9.4. Teorema de Cauchy-Kowalevski

Agora enfim estamos em condições de provar o Teorema de Cauchy-Kowalevski.

TEOREMA 342. (*Cauchy-Kowaleski*) Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto,  $\Gamma \subset U$  uma superfície real-analítica. Consideremos o seguinte problema:

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, \partial u(x), \dots, \partial^{m-1} u(x)) \partial^\alpha u(x) = f(x, \partial u(x), \dots, \partial^{m-1} u(x)), \quad x \in U$$

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}(x) = g_j(x), \quad x \in \Gamma \quad j \in \{0, \dots, m-1\}.$$

Vamos supor que:

i)  $a_\alpha : U \times \mathbb{R}^{nN} \times \mathbb{R}^{n^2N} \times \dots \times \mathbb{R}^{n^mN} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$  é uma função real analítica.

ii)  $f : U \times \mathbb{R}^{nN} \times \mathbb{R}^{2N} \times \dots \times \mathbb{R}^{mN} \rightarrow \mathbb{R}^N$  é uma função real analítica.

iii)  $g_j : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^N$  é uma função real analítica, para todo  $j \in \{0, \dots, m-1\}$ .

Assim, se  $x_0 \in U$  for tal que  $\det \left( \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x_0, \partial^1 u(x_0), \dots, \partial^{m-1} u(x_0)) \nu^\alpha(x_0) \right) \neq 0$ , então existe um aberto  $V \subset U$  que contém  $x_0$  e uma função  $u : V \rightarrow \mathbb{R}^N$  que é solução do problema em  $V$ .

OBSERVAÇÃO 343. 1) Dizemos que  $\Gamma \subset U$  é uma superfície real analítica se para cada  $\tilde{x} \in \Gamma$ , existir um difeomorfismo  $\Phi : W \rightarrow B(0, 1)$ , em que  $W \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto e  $B(0, 1)$  é a bola unitária de  $\mathbb{R}^n$ , tal que  $\Phi(\tilde{x}) = 0$  e  $\Phi(x) \in B(0, 1) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$  se, e somente se,  $x \in \Gamma \cap W$ . Este difeomorfismo deve ser tal que  $\Phi$  e  $\Phi^{-1}$  sejam funções reais analíticas.

2) Dizemos que  $g_j$  é uma função analítica se a função  $\{x' \in \mathbb{R}^{n-1}; |x'| < 1\} \mapsto g_j \circ \Phi^{-1}(x', 0) \in \mathbb{R}^N$  é real analítica.

3) A partir da condição em  $\Gamma$ , é possível determinar  $\partial^j u(x_0)$  para todo  $j < m$  em função de  $g_j$ ,  $j \in \{0, \dots, m-1\}$ . Assim, a condição

$$\det \left( \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x_0, \partial u(x_0), \dots, \partial^{m-1} u(x_0)) \nu^\alpha(x_0) \right) \neq 0$$

é uma condição que pode ser escrita apenas em termos das funções  $g_j$ .

4) Dizer que  $u : V \rightarrow \mathbb{R}^N$  é uma solução em  $V$  significa que

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, \partial u(x), \dots, \partial^{m-1} u(x)) \partial^\alpha u(x) &= f(x, \partial u(x), \dots, \partial^{m-1} u(x)), & x \in V \\ \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}(x) &= g_j(x), & x \in V \cap \Gamma \quad j \in \{0, \dots, m-1\} \end{aligned}$$

**9.4.1. Equivalências.** Provar o teorema da forma acima pode ser bastante complicado. O que faremos agora é mostrar que o problema acima equivale a um problema mais fácil de resolver. Ora, faremos diversos passos.

**Passo 1: Colocação do problema em  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$**

O primeiro passo para achar um problema equivalente mais simples é o seguinte: achamos uma função real analítica  $\Phi : W \rightarrow B(0, 1)$  tal,  $x_0 \in W$ , tal como na observação acima. Assim, a função  $u \circ \Phi^{-1}$  resolve um problema com a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, \partial u(x), \dots, \partial^{m-1} u(x)) \partial^\alpha u(x) &= f(x, \partial u(x), \dots, \partial^{m-1} u(x)), & x \in B(0, 1) \\ \frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}(x) &= g_j(x), & x \in B(0, 1) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \end{aligned}$$

em que  $j \in \{0, \dots, m-1\}$ .

É claro que  $a_\alpha$ ,  $f$  e  $g_j$  não são as mesmas funções anteriores. Mas continuam sendo analíticas, já que são composições de funções analíticas. Além disso, a condição

$$\det \left( \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, \partial u(x_0), \dots, \partial^{m-1} u(x_0)) \nu^\alpha(x_0) \right) \neq 0$$

se transforma, depois da mudança de variável, na condição:

$$\det (a_{(0, \dots, 0, m)}(0, \partial u(0), \dots, \partial^{m-1} u(0))) \neq 0.$$

A função  $a_{(0, \dots, 0, m)}(x, \partial u(x_0), \dots, \partial^{m-1} u(x_0))$  é a que age em  $\frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}(x)$ . Diminuindo a bola  $B(0, 1)$  se necessário para  $B = B(0, r)$ ,  $r \leq 1$ , podemos multiplicar tudo por  $a_{(0, \dots, 0, m)}(x, \partial u(x), \dots, \partial^{m-1} u(x))^{-1}$  e obter o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m} &= - \sum_{|\alpha'|=m-\alpha_n} \sum_{\alpha_n=0}^{m-1} a_{(\alpha', \alpha_n)} \frac{\partial^{(\alpha', \alpha_n)} u}{\partial x'^{\alpha'} \partial x_n^{\alpha_n}}(x) + f, & x \in B \\ \frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}(x) &= g_j(x), & x \in B \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \end{aligned}$$

em que  $j \in \{0, \dots, m-1\}$ .

**Passo 2: Colocando condições iniciais iguais a zero.**

Considerando a equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m} &= - \sum_{|\alpha'|=m-\alpha_n} \sum_{\alpha_n=0}^{m-1} a_{(\alpha',\alpha_n)} \frac{\partial^{(\alpha',\alpha_n)} u}{\partial x'^{\alpha'} \partial x_n^{\alpha_n}}(x) + f, & x \in B \\ \frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}(x) &= g_j(x), & x \in B \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \end{aligned}$$

Vamos definir

$$v(x) = u(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} x_n^j g_j(x', 0).$$

Logo  $\frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x^\alpha} + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} (x_n^j g_j(x', 0))$  e

$$\frac{\partial^k v}{\partial x_n^k}(x', 0) = \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}(x', 0) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} \frac{\partial^k}{\partial x_n^k} (x_n^j g_j(x', 0)) = g_k - g_k = 0.$$

Assim, vemos que  $v$  satisfaz uma equação do tipo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m v}{\partial x_n^m} &= - \sum_{|\alpha'|=m-\alpha_n} \sum_{\alpha_n=0}^{m-1} a_{(\alpha',\alpha_n)} \frac{\partial^{(\alpha',\alpha_n)} v}{\partial x'^{\alpha'} \partial x_n^{\alpha_n}}(x) + f, & x \in B \\ \frac{\partial^j v}{\partial x_n^j}(x) &= 0, & x \in B \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \end{aligned}$$

em que as novas funções  $a_\alpha$  e  $f$  são dependentes das antigas funções  $a_\alpha$  e  $f$  e agora também das funções  $g_j$ . É claro que conhecemos  $u$  se, e somente se, conhecemos  $v$ . Assim, temos um problema equivalente com condições iniciais iguais a zero.

### Passo 3: Diminuição da ordem da EDP

Consideremos a equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m} &= - \sum_{|\alpha'|=m-\alpha_n} \sum_{\alpha_n=0}^{m-1} a_{(\alpha',\alpha_n)} \frac{\partial^{(\alpha',\alpha_n)} u}{\partial x'^{\alpha'} \partial x_n^{\alpha_n}}(x) + f, & x \in B \\ \frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}(x) &= 0, & x \in B \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \end{aligned}$$

Mostraremos que o problema acima equivale a um problema de ordem  $m-1$ .

Para tanto, definiremos  $U_0 = u$ ,  $U_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Assim,  $\frac{\partial U_0}{\partial x_n} = U_n$ ,  $\frac{\partial U_i}{\partial x_n} = \frac{\partial U_n}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$

e

$$\frac{\partial^{m-1} U_0}{\partial x_n^{m-1}} = \frac{\partial^{m-2} U_n}{\partial x_n^{m-2}} \quad (\text{I})$$

$$\frac{\partial^{m-1} U_i}{\partial x_n^{m-1}} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^{m-2} U_n}{\partial x_n^{m-2}}, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (\text{II})$$

Agora observamos que

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}(x) + \sum_{\alpha_n=1}^{m-1} \sum_{|\alpha'| \leq m-\alpha_n} a_\alpha \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}(x) + \sum_{|\alpha'|=m} a_{(\alpha',0)} \frac{\partial^{(\alpha',0)} u}{\partial x^{(\alpha',0)}}(x) = f.$$

Se  $\alpha_n > 0$ , temos

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}(x) = \frac{\partial^{|\alpha'|}}{\partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial^{\alpha_n} u}{\partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha'|}}{\partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial^{\alpha_n-1}}{\partial x_n^{\alpha_n-1}} \frac{\partial u}{\partial x_n} = \frac{\partial^{|\alpha'|}}{\partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial^{\alpha_n-1}}{\partial x_n^{\alpha_n-1}} U_n.$$

Se  $\alpha'_j > 0$ , temos

$$\frac{\partial^{\alpha'} u}{\partial x'^{\alpha'}}(x) = \frac{\partial^{\alpha'-\delta_j} u}{\partial x'^{\alpha'-\delta_j}} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial^{\alpha'-\delta_j} U_j}{\partial x'^{\alpha'-\delta_j}}(x).$$

Assim, vemos que

$$\frac{\partial^{m-1} U_0}{\partial x_n^{m-1}} = \frac{\partial^{m-2} U_n}{\partial x_n^{m-2}} \quad (\text{I})$$

$$\frac{\partial^{m-1} U_i}{\partial x_n^{m-1}} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^{m-2} U_n}{\partial x_n^{m-2}}, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (\text{II})$$

$$\frac{\partial^{m-1} U_n}{\partial x_n^{m-1}}(x) = f - \sum_{\alpha_n=1}^{m-1} \sum_{|\alpha'| \leq m-\alpha_n} a_\alpha \frac{\partial^{|\alpha'|}}{\partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial^{\alpha_n-1} U_n}{\partial x_n^{\alpha_n-1}} - \sum_{|\alpha'|=m} a_{(\alpha',0)} \frac{\partial^{\alpha'-\delta_j} U_j}{\partial x'^{\alpha'-\delta_j}}(x) \quad (\text{III})$$

As condições iniciais são, para  $j = 0, 1, \dots, m - 2$ , que

$$\frac{\partial^j U_i}{\partial x_n^j}(x', 0) = \frac{\partial^j}{\partial x_n^j} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x', 0) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}(x', 0) \right) = 0,$$

se  $i < n$  e

$$\frac{\partial^j U_n}{\partial x_n^j}(x', 0) = \frac{\partial^{j+1} u}{\partial x_n^{j+1}}(x', 0) = 0,$$

já que  $j + 1 \leq m - 1$ . Assim

$$\frac{\partial^j U_i}{\partial x_n^j}(x) = 0, \quad (\text{IV})$$

para  $i \in \{0, \dots, n - 1\}$  e  $j \in \{0, \dots, m - 2\}$ .

Escrevendo  $U = (U_0, \dots, U_n)^T$ , as equações (I), (II), (III) e (IV) podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m-1} U}{\partial x_n^m} &= - \sum_{|\alpha'|=m-1-\alpha_n} \sum_{\alpha_n=0}^{m-1} a_{(\alpha', \alpha_n)}^{(1)} \frac{\partial^{(\alpha', \alpha_n)} U}{\partial x'^{\alpha'} \partial x_n^{\alpha_n}}(x) + f^{(1)}, & x \in B \\ \frac{\partial^j U}{\partial x_n^j}(x) &= 0, & x \in B \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \end{aligned} \quad ,$$

para  $j \in \{0, \dots, m - 2\}$ .

Para finalizar, vamos mostrar que  $U$  é solução do problema acima, então  $u = U_0$  é solução do problema original. Vamos usar um lema.

LEMA 344. *Seja  $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\frac{\partial^k f}{\partial x_n^k}(x) = 0$  e  $\frac{\partial^j f}{\partial x_n^j}(x', 0) = 0$ ,  $j < k$ ,  $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Assim  $f = 0$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Vemos que

$$\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_n^{k-1}}(x) = \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_n^{k-1}}(x', 0) + \int_0^{x_n} \frac{\partial^k f}{\partial x_n^k}(x', s) ds = 0 + 0 = 0.$$

Note que

$$\frac{\partial^{k-2} f}{\partial x_n^{k-2}}(x) = \frac{\partial^{k-2} f}{\partial x_n^{k-2}}(x', 0) + \int_0^{x_n} \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_n^{k-1}}(x', s) ds = 0 + 0 = 0.$$

Continuando o argumento, vemos que

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_n^k}(x) = \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_n^{k-1}}(x) = \frac{\partial^{k-2} f}{\partial x_n^{k-2}}(x) = \dots = \frac{\partial^k f}{\partial x_n^k}(x) = f(x) = 0.$$

□

Por (I), temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m-2}}{\partial x_n^{m-2}} \left( U_n - \frac{\partial U_0}{\partial x_n} \right) &= 0, & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial^j}{\partial x_n^j} \left( U_n - \frac{\partial U_0}{\partial x_n} \right) &= 0, & x \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}, \quad j = 0, 1, \dots, m - 3 \end{aligned}$$

Pelo Lema temos que  $U_n = \frac{\partial U_0}{\partial x_n}$ .

Por (II), temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m-1}}{\partial x_n^{m-1}} \left( U_i - \frac{\partial U_0}{\partial x_i} \right) &= 0, & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial^j}{\partial x_n^j} \left( U_i - \frac{\partial U_0}{\partial x_i} \right) &= 0, & x \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}, \quad j = 0, 1, \dots, m - 2 \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial x_n^{m-1}} \left( U_i - \frac{\partial U_0}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^{m-1} U_i}{\partial x_n^{m-1}} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^{m-1} U_0}{\partial x_n^{m-1}} = \frac{\partial^{m-1} U_i}{\partial x_n^{m-1}} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^{m-2} U_n}{\partial x_n^{m-2}} = 0.$$

Pelo Lema temos que  $U_i = \frac{\partial U_0}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Logo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m-1} U}{\partial x_n^m} &= - \sum_{|\alpha'|=m-1-\alpha_n} \sum_{\alpha_n=0}^{m-1} a_{(\alpha', \alpha_n)}^{(1)} \frac{\partial^{(\alpha', \alpha_n)} U}{\partial x'^{\alpha'} \partial x_n^{\alpha_n}}(x) + f^{(1)}, & x \in B \\ \frac{\partial^j U}{\partial x_n^j}(x) &= 0, & x \in B \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \end{aligned} \quad ,$$

equivale a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m} &= - \sum_{|\alpha'|=m-\alpha_n} \sum_{\alpha_n=0}^{m-1} a_{(\alpha', \alpha_n)} \frac{\partial^{(\alpha', \alpha_n)} u}{\partial x'^{\alpha'} \partial x_n^{\alpha_n}}(x) + f, & x \in B \\ \frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}(x) &= 0, & x \in B \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \end{aligned}$$

#### Passo 4: Equivalência a um problema de primeira ordem

Esse passo é fácil. Vimos que o problema de ordem  $m$  equivale a um problema de ordem  $m - 1$ . Como  $m$  é arbitrário, podemos continuar esse argumento até chegar num problema de primeira ordem do tipo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) &= \sum_{j=1}^{n-1} a_j(x, u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + f(x, u(x)), & x \in B \\ u(x', 0) &= 0, & x \in B \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \end{aligned}$$

#### Passo 5: Eliminação de $x_n$ dos coeficientes da EDP

Consideramos um problema do tipo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) &= \sum_{j=1}^{n-1} a_j(x, u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + f(x, u(x)), & x \in B \\ u(x', 0) &= 0, & x \in B \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \end{aligned}$$

em que  $u : B \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Vamos agora introduzir  $u_{N+1}$  tal que  $\frac{\partial u_{N+1}}{\partial x_n} = 1$  e  $u_{N+1}(x', 0) = 0$ . Logo  $u_N(x) = x_n$ . Assim, se  $v(x) = (u_1(x), \dots, u_N(x), u_{N+1}(x))$ , podemos substituir  $x_n$  por  $v_{N+1}$ , obtendo uma equação do tipo

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x_n}(x) &= \sum_{j=1}^{n-1} a_j(x', v(x)) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) + f(x', v(x)), & x \in B \\ v(x', 0) &= 0, & x \in B \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \end{aligned}$$

É com essa equação que iremos trabalhar.

### 9.5. Demonstração do Teorema de Cauchy-Kowaleski

Vamos agora demonstrar o Teorema de Cauchy-Kowalevski. Estudaremos um problema similar ao original:

**TEOREMA 345.** (*Cauchy-Kowaleski*) *Seja  $B \subset \mathbb{R}^n$  e  $B' \subset \mathbb{R}^{n-1}$  as bolas abertas de raio 1 e centro 0 em  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^{n-1}$ , respectivamente. Consideremos o seguinte problema:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) &= \sum_{j=1}^{n-1} a_j(x', u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + f(x', u(x)), & x \in B \\ u(x', 0) &= 0, & x' \in B' \end{aligned}$$

Vamos supor que:

i)  $a_j : B' \times \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$  é uma função real analítica.

ii)  $f : B' \times \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}^N$  é uma função real analítica.

Então existe uma bola  $B_r = B(0, r) \subset \mathbb{R}^n$  de centro 0 e raio  $0 < r \leq 1$  e  $u : B_r \rightarrow \mathbb{R}^N$  que é solução do problema em  $B_r$ .

Para a demonstração, usaremos o método dos majorantes, conforme a definição abaixo:

**DEFINIÇÃO 346.** Sejam  $f = \sum_{\alpha} f_{\alpha} x^{\alpha}$  e  $g = \sum_{\alpha} g_{\alpha} x^{\alpha}$  duas séries de potências. Dizemos que  $g$  majora  $f$ ,  $g \gg f$ , se  $g_{\alpha} \geq |f_{\alpha}|$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ .

Precisamos de alguns fatos sobre funções que majoram. Antes um lema.

**LEMA 347.** *Seja  $r > 0$  e  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ , em que  $B = \left\{ x \in \mathbb{R}^n; |x| < \frac{r}{\sqrt{n}} \right\}$ , é dado por*

$$f(x) = \frac{r}{r - (x_1 + \dots + x_n)} = \frac{1}{1 - \frac{(x_1 + \dots + x_n)}{r}}.$$

Então essa função é analítica.

DEMONSTRAÇÃO. Primeiramente observamos que

$$\left| \frac{x_1 + \dots + x_n}{r} \right| \leq \frac{|x_1| + \dots + |x_n|}{r} \leq \frac{\sqrt{(|x_1| + \dots + |x_n|)^2}}{r} \leq \frac{\sqrt{n|x|^2}}{r} \leq \frac{\sqrt{n}}{r} |x| < 1.$$

Assim, podemos usar nosso conhecimento sobre série geométrica e concluir que

$$\frac{1}{1 - \frac{(x_1 + \dots + x_n)}{r}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{x_1 + \dots + x_n}{r} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha = \sum_{\alpha} \frac{|\alpha|!}{r^{|\alpha|} \alpha!} x^\alpha.$$

Note que a série converge absolutamente, pois

$$\sum_{\alpha} \frac{|\alpha|!}{r^{|\alpha|} \alpha!} |x^\alpha| = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{|x_1| + \dots + |x_n|}{r} \right)^k = \frac{1}{1 - \left( \frac{|x_1| + \dots + |x_n|}{r} \right)} < 1.$$

□

Com o lema acima, podemos provar o seguinte resultado:

LEMA 348. *Sejam  $f = \sum_{\alpha} f_{\alpha} x^{\alpha}$  e  $g = \sum_{\alpha} g_{\alpha} x^{\alpha}$  duas séries de potências.*

*i) Se  $g \gg f$  e  $g$  converge para  $|x| < r$ , então  $f$  também converge para  $|x| < r$ .*

*ii) Se  $f = \sum_{\alpha} f_{\alpha} x^{\alpha}$  converge absolutamente para  $|x| < r$  e  $0 < s\sqrt{n} < r$ , então  $f$  tem um majorante se  $|x| < \frac{s}{\sqrt{n}}$ .*

DEMONSTRAÇÃO. i) Se  $|x| < r$ , basta observar

$$\sum_{\alpha} |f_{\alpha} x^{\alpha}| \leq \sum_{\alpha} g_{\alpha} |x_1|^{\alpha_1} \dots |x_n|^{\alpha_n} < \infty.$$

ii) Seja  $0 < s\sqrt{n} < r$  e  $y := s(1, \dots, 1)$ . Logo  $|y| = \sqrt{n}s < r$ . Assim,  $\sum_{\alpha} f_{\alpha} y^{\alpha}$  converge absolutamente, ou seja,

$$\sum_{\alpha} |f_{\alpha} y^{\alpha}| < \infty.$$

Portanto, existe  $C > 0$  tal que  $|f_{\alpha} y^{\alpha}| \leq C, \forall \alpha$ . Assim,

$$|f_{\alpha}| \leq \frac{C}{y_1^{\alpha_1} \dots y_n^{\alpha_n}} \leq \frac{C}{s^{|\alpha|}} \leq C \frac{|\alpha|!}{s^{|\alpha|} \alpha!}.$$

Mas

$$g(x) = \frac{Cs}{s - (x_1 + \dots + x_n)} = C \sum_{\alpha} \frac{|\alpha|!}{s^{|\alpha|} \alpha!} x^{\alpha}.$$

Logo  $f \ll g$ , se  $|x| < \frac{s}{\sqrt{n}}$ . □

Por fim, precisamos de um último lema sobre composição de funções analíticas:

LEMA 349. *Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U$  funções reais analíticas. Suponha que  $g(\xi_0) = x_0$  e que, numa vizinhança de  $x_0$  e  $\xi_0$ , temos  $f(x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} (x - x_0)^{\alpha}$  e  $g(\xi) = (\sum_{\alpha} b_{1\alpha} (\xi - \xi_0)^{\alpha}, \dots, \sum_{\alpha} b_{n\alpha} (\xi - \xi_0)^{\alpha})$ . Logo*

$$f \circ g(\xi) = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^n} c_{\gamma} (\xi - \xi_0)^{\gamma},$$

em que  $c_{\gamma} = P_{\gamma}(a_{\alpha}, b_{j\beta})$  é um polinômio nas variáveis  $a_{\alpha}$  e  $b_{j\beta}$  cujos termos são todos não negativos. O polinômio independe de  $f$  e de  $g$ .

DEMONSTRAÇÃO. Observando que  $x_0 = g(\xi_0) = (b_{10}, \dots, b_{n0})$ . Logo  $f \circ g : V \rightarrow \mathbb{R}$  também é real analítica numa vizinhança de  $\xi_0$  e

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f \circ g(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha (x_1 - x_{01})^{\alpha_1} \dots (x_n - x_{0n})^{\alpha_n} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha \left( \sum_{|\beta_1| \neq 1} b_{1\beta_1} (\xi - \xi_0)^{\beta_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left( \sum_{|\beta_n| \neq 1} b_{n\beta_n} (\xi - \xi_0)^{\beta_n} \right)^{\alpha_n} \text{ em} \\ &= \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^n} c_\gamma (\xi - \xi_0)^\gamma, \end{aligned}$$

que  $c_\gamma = P_\gamma(a_\alpha, b_{j\beta})$  é um polinômio nas variáveis  $a_\alpha$  e  $b_{j\beta}$ . Este polinômio só tem termos positivos, afinal para obter os termos basta multiplicar e somar os termos que aparecem na série.  $\square$

Por fim, um último lema necessário:

LEMA 350. *Considere o seguinte sistema para  $m = 1, \dots, N$ :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x) &= \frac{Mr}{r - \sum_{j=1}^{n-1} x_j - \sum_{j=1}^N u_j(x)} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^N \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x) + 1 \right), & x \in \mathbb{R}^n \\ u_m(x', 0) &= 0, & x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \end{aligned}$$

Logo existe uma bola  $B = B(0, r) \subset \mathbb{R}^n$  e uma função analítica  $u : B \rightarrow \mathbb{R}^N$  que resolve o problema.

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos o seguinte problema em  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}(s, t) &= \frac{Mr}{r - s - Nv(s, t)} \left( N(n-1) \frac{\partial v}{\partial s}(s, t) + 1 \right), & (s, t) \in \mathbb{R}^2 \\ v(s, 0) &= 0, & s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Note que se  $v$  é uma solução numa vizinhança de zero, então

$$u_m(x', x_n) = v(x_1 + \dots + x_{n-1}, x_n), \quad m \in \{1, \dots, N\}.$$

é solução do problema original. De fato, temos, para todo  $m \in \{1, \dots, N\}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x) &= \frac{\partial v}{\partial t} \left( \sum_{i=1}^{n-1} x_i, x_n \right) \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial v}{\partial s} \left( \sum_{i=1}^{n-1} x_i, x_n \right), \quad i \in \{1, \dots, n-1\}. \end{aligned}$$

Assim, vemos que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial u_m}{\partial x_i}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial v}{\partial s} \left( \sum_{i=1}^{n-1} x_i, x_n \right) = (n-1) \frac{\partial v}{\partial s} \left( \sum_{i=1}^{n-1} x_i, x_n \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x) &= \frac{\partial v}{\partial t} \left( \sum_{i=1}^{n-1} x_i, x_n \right) \\ &= \frac{Mr}{r - \sum_{i=1}^{n-1} x_i - Nv \left( \sum_{i=1}^{n-1} x_i, x_n \right)} \left( N(n-1) \frac{\partial v}{\partial s} \left( \sum_{i=1}^{n-1} x_i, x_n \right) + 1 \right). \\ &= \frac{Mr}{r - \sum_{i=1}^{n-1} x_i - Nu_m(x)} \left( N \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial u_m}{\partial x_i}(x) + 1 \right) \end{aligned}$$

Note que  $u_1 = \dots = u_m = \dots = u_N$ . Assim,  $\sum_{j=1}^N u_j = Nu_m$  e  $\sum_{j=1}^N \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = N \frac{\partial u_m}{\partial x_i}$ . Assim, para todo  $m$ , temos

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x) = \frac{Mr}{r - \sum_{i=1}^{n-1} x_i - \sum_{j=1}^N u_j(x)} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^N \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x) + 1 \right).$$

Por fim, observe que

$$u_m(x', 0) = v(x_1 + \dots + x_{n-1}, 0) = 0.$$

Agora nos resta resolver o problema em  $v$ . Para tanto, vamos usar método das características! Consideremos

$$(r - s - Nv(s, t)) \frac{\partial v}{\partial t}(s, t) - MrN(n-1) \frac{\partial v}{\partial s}(s, t) = Mr,$$

com  $v(s, 0) = 0$ . Vamos usar  $\tau$  e  $\sigma$  ao invés de  $s$  e  $r$  para não confundir com as variáveis  $s$  e  $r$  que á aparecem no problema.

Assim devemos resolver

$$\begin{aligned} t'(\tau) &= (r - s(\tau) - Nz(\tau)), & t(0) &= 0 \\ s'(\tau) &= -MrN(n-1) & s(0) &= \sigma \\ z'(\tau) &= Mr & z(0) &= 0 \end{aligned} .$$

As variáveis  $s$  e  $z$  são fáceis. Temos

$$z(\tau) = Mr\tau \text{ e } s(\tau) = \sigma - MrN(n-1)\tau.$$

Para a variável  $t$  temos

$$t'(\tau) = r - \sigma + MrN(n-1)\tau - NM\tau, \quad t(0) = 0.$$

Logo

$$t(\tau) = (r - \sigma)\tau + (MrN(n-1) - NM\tau) \frac{\tau^2}{2} = (r - \sigma)\tau + \frac{1}{2}MrN(n-2)\tau^2.$$

Agora, sabemos que a solução será dada por

$$v(s, t) = z(\tau(s, t)).$$

Vamos escrever  $\tau$  em função de  $s$  e  $t$  (mas não de  $\sigma$ !). Assim,  $\sigma = s + MrN(n-1)\tau$  e

$$\begin{aligned} t &= (r - \sigma)\tau + \frac{1}{2}MrN(n-2)\tau^2 \\ &= (r - s)\tau - MrN(n-1)\tau^2 + \frac{1}{2}MrN(n-2)\tau^2 \\ &= (r - s)\tau - \frac{1}{2}MrNn\tau^2. \end{aligned}$$

Logo

$$MrNn\tau^2 - 2(r - s)\tau + 2t = 0.$$

Logo

$$\tau = \frac{(r - s)}{MrNn} \pm \frac{\sqrt{4(r - s)^2 - 8tMrNn}}{2MrNn} = \frac{(r - s)}{MrNn} \pm \frac{\sqrt{(r - s)^2 - 2MrNnt}}{MrNn}.$$

Note que se  $\tau = 0$  implica que  $t = 0$ . Assim,  $t = 0$  deve implicar  $\tau = 0$ , já que devemos ter um difeomorfismo. Colando  $t = 0$  na expressão acima, temos

$$\tau = \frac{(r - s)}{MrNn} \pm \frac{\sqrt{4(r - s)^2 - 8tMrNn}}{2MrNn} = \frac{(r - s)}{MrNn} \pm \frac{\sqrt{(r - s)^2}}{MrNn}.$$

Como  $\tau$  deve ser igual a zero, concluímos que o sinal  $-$  é o correto.

Assim,

$$v(s, t) = Mr\tau(s, t) = \frac{(r - s)}{Nn} - \frac{\sqrt{(r - s)^2 - 2MrNnt}}{Nn}.$$

Portanto,  $u$  é real-analítica, numa vizinhança de zero, por ser composição de funções reais-analíticas.  $\square$

Estamos quase em condições de demonstrar o teorema de Cauchy-Kowalevski. Falta apenas um pequeno resultado.

LEMA 351. Seja  $u : B_r \rightarrow \mathbb{R}^N$  uma função real analítica. Suponha que existisse uma função  $u$  real analítica que seja uma solução da equação abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) &= \sum_{j=1}^{n-1} a_j(x', u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + f(x', u(x)), & x \in B \\ u(x', 0) &= 0, & x' \in B' \end{aligned}$$

Suponha que  $a_j(x', y) = \sum_{\alpha, \beta} A_{j\alpha\beta} x'^{\alpha'} y^\beta$  e  $f(x', y) = \sum_{\alpha, \beta} f_{j\alpha\beta} x'^{\alpha'} y^\beta$ . Logo a função  $u$  é dada por uma série  $u(x) = \sum_{\alpha} u_{\alpha} x^{\alpha}$  e é tal que os coeficientes  $u_{\alpha} \in \mathbb{R}^N$  são unicamente determinados e são dados por

$$u_{\alpha} = Q_{\alpha}(A_{j\alpha\beta}, f_{j\alpha\beta}),$$

em que  $Q_{\alpha}$  são polinômios (funções em  $\mathbb{R}^N$  cujas entradas são polinômios) com coeficientes não negativos que independem de  $A_{j\alpha\beta}$  e  $f_{j\alpha\beta}$ .

DEMONSTRAÇÃO. Vamos denotar  $\alpha = (\alpha', \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^{n-1} \times \mathbb{N}_0$  e mostrar o teorema por indução.

Observamos que se  $\alpha_n = 0$ , então, como  $u(x', 0)$ , temos necessariamente que  $u_{(\alpha', 0)} = 0$ , para todo  $\alpha' \in \mathbb{N}_0^{n-1}$ .

Suponha que o lema valha para  $\alpha_n \leq N$ . Vemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) = \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \sum_{(\alpha', \alpha_n)} u_{(\alpha', \alpha_n)} x'^{\alpha'} x_n^{\alpha_n} \right) = (\alpha_n + 1) \sum_{(\alpha', \alpha_n)} u_{(\alpha', \alpha_n)} x'^{\alpha'} x_n^{\alpha_n}.$$

Do lado direito, só temos derivadas em  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Assim, o termo  $x'^{\alpha'} x_n^{\alpha_n}$  só depende de  $u_{(\sigma', \sigma_n)}$ ,  $\sigma_n \leq \alpha_n$ . Afinal, os termos com  $\sigma_n > \alpha_n$  estarão multiplicados por  $x_n^{\sigma_n}$ . De outra forma, temos

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j(x', u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + f(x', u(x)) = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^n} P_{\gamma} \left( (u_{\alpha})_{\alpha_n \leq \gamma_n}, A_{j\alpha'\beta}, f_{j\alpha'\beta} \right) x'^{\gamma'} x_n^{\gamma_n}.$$

Concluimos que

$$u_{(\alpha', \alpha_n+1)} = \frac{1}{1 + \alpha_n} P_{\alpha} \left( (u_{\sigma})_{\sigma_n \leq \alpha_n}, A_{j\alpha'\beta}, f_{j\alpha'\beta} \right),$$

em que  $P_{\alpha}$  só tem coeficientes não negativos pelo Lema demonstrado lá atrás. Como  $(u_{\sigma})_{\sigma_n \leq \alpha_n}$  é, pela hipótese de indução, também é determinado por polinômios de coeficientes não negativos e  $A_{j\alpha'\beta}$  e  $f_{j\alpha'\beta}$ , concluimos que

$$u_{(\alpha', \alpha_n+1)} = Q_{(\alpha', \alpha_n+1)}(A_{j\alpha'\beta}, f_{j\alpha'\beta}),$$

em que  $Q_{(\alpha', \alpha_n+1)}$  é um polinômio com coeficientes não negativos.  $\square$

Por fim, podemos provar o Teorema de Cauchy-Kowalevski.

DEMONSTRAÇÃO. (Teorema de Cauchy-Kowalevski) Consideremos  $u(x) = \sum_{\alpha} u_{\alpha} x^{\alpha}$  a série com os termos dados por  $u_{\alpha} = Q_{\alpha}(A_{j\alpha'\beta}, f_{j\alpha'\beta})$ . Se esta série convergir, então, pela sua própria construção, concluimos que  $u$  será solução de

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) &= \sum_{j=1}^{n-1} a_j(x', u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + f(x', u(x)), & x \in B \\ u(x', 0) &= 0, & x' \in B' \end{aligned}$$

já que a série de potências de  $\frac{\partial u}{\partial x_n}(x)$  coincidirá com a série de potências de  $\sum_{j=1}^{n-1} a_j(x', u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + f(x', u(x))$  e, portanto, as funções serão iguais. Seja  $M$  e  $r$  tal que a função abaixo

$$(x, y) \mapsto \frac{Mr}{r - \sum_{j=1}^{n-1} x_j - \sum_{j=1}^N y_j}$$

majora todas as componentes de  $a_j$  para todo  $j$  e todas as componentes de  $f$ . Consideremos a equação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x_n}(x) &= \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{a}_j(x', u(x)) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) + \tilde{f}(x', u(x)), & x \in B \\ v(x', 0) &= 0, & x' \in B' \end{aligned}$$

em que todas as componentes de  $\tilde{a}_j$  e  $\tilde{f}$  são dadas pela função

$$(x, y) \mapsto \frac{Mr}{r - \sum_{j=1}^{n-1} x_j - \sum_{j=1}^N y_j}.$$

Assim, o sistema se torna

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_m}{\partial x_n}(x) &= \frac{Mr}{r - \sum_{j=1}^{n-1} x_j - \sum_{j=1}^N y_j} \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) + 1 \right), & x \in B \\ v_m(x', 0) &= 0, & x' \in B' \end{aligned},$$

para  $m \in \{1, \dots, N\}$ . Sabemos que existe uma solução do problema acima pelo LEMA e que se  $v(x) = \sum_{\alpha} v_{\alpha} x^{\alpha}$ , então  $v_{\alpha} = Q_{\alpha}(\tilde{A}_{j\alpha'\beta}, \tilde{f}_{j\alpha'\beta})$ , em que  $\tilde{A}_{j\alpha'\beta}$  e  $\tilde{f}_{j\alpha'\beta}$  corresponde aos termos da expansão de  $\tilde{a}_j$  e  $\tilde{f}$ , respectivamente. Assim

$$|u_{\alpha}| = |Q_{\alpha}(A_{j\alpha'\beta}, f_{j\alpha'\beta})| = Q_{\alpha}(|A_{j\alpha'\beta}|, |f_{j\alpha'\beta}|) \leq Q_{\alpha}(\tilde{A}_{j\alpha'\beta}, \tilde{f}_{j\alpha'\beta}) \leq v_{\alpha},$$

ou seja, a série  $u(x) = \sum_{\alpha} u_{\alpha} x^{\alpha}$  é majorada por uma série convergente. Logo também converge.  $\square$

### 9.6. O problema de Lewy

Consideremos o seguinte problema: Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Dado um operador diferencial linear  $\sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(x) D^{\alpha}$  com coeficientes  $a_{\alpha} \in C^{\infty}(U, \mathbb{C})$ , um ponto  $x_0 \in U$  e uma função  $f \in C^{\infty}(U, \mathbb{C})$ , é verdade que existe um aberto  $V \subset U$  que contém  $x_0$  e uma função  $u \in C^{\infty}(V, \mathbb{C})$  tal que  $\sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(x) D^{\alpha} u(x) = f(x)$  para todo  $x \in V$ ?

Observe premitimos que os coeficientes e as funções acima tenham valores complexos.

O que queremos entender é se a equação

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(x) \partial^{\alpha} u(x) = f(x)$$

tem solução local, ou seja, se para cada  $x_0 \in U$ , existe uma solução  $u$  do problema acima numa vizinhança de  $x_0$ .

Esse é um problema difícil. Vamos mostrar que se as funções são reais analíticas, então a resposta do problema é sim. Uma função  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  é dita real-analítica se tanto a sua parte real como sua parte imaginária forem reais analíticas.

**PROPOSIÇÃO 352.** *Suponha que  $a_{\alpha} : U \rightarrow \mathbb{C}$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  sejam funções reais analítica e  $x_0 \in U$ . Se existir  $\alpha_0 \in \mathbb{N}_0^n$  tal que  $|\alpha_0| = m$  e  $a_{\alpha_0}(x_0) \neq 0$ , então existe um aberto  $V \subset U$  que contém  $x_0$  e uma função  $u : V \rightarrow \mathbb{C}$  que resolve*

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(x) \partial^{\alpha} u(x) = f(x)$$

para todo  $x \in V$ .

**DEMONSTRAÇÃO.** Podemos identificar  $\mathbb{C}$  com  $\mathbb{R}^2$  e, assim,  $u(x) = u_1(x) + iu_2(x)$  pode ser identificado com a função  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$ . Observamos também que podemos identificar  $a_{\alpha}(x) = a_{1\alpha}(x) + ia_{2\alpha}(x)$  com a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{1\alpha}(x) & -a_{2\alpha}(x) \\ a_{2\alpha}(x) & a_{1\alpha}(x) \end{pmatrix}.$$

De fato,

$$(a_{1\alpha}(x) + ia_{2\alpha}(x))(u_1(x) + iu_2(x)) = (a_{1\alpha}(x)u_1(x) - a_{2\alpha}(x)u_2(x)) + i(a_{2\alpha}(x)u_1(x) + a_{1\alpha}(x)u_2(x))$$

e

$$\begin{pmatrix} a_{1\alpha}(x) & -a_{2\alpha}(x) \\ a_{2\alpha}(x) & a_{1\alpha}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1\alpha}(x)u_1(x) - a_{2\alpha}(x)u_2(x) \\ a_{2\alpha}(x)u_1(x) + a_{1\alpha}(x)u_2(x) \end{pmatrix}.$$

Assim, a multiplicação das matrizes corresponde a multiplicação de números complexos. Para a função  $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ , definimos a matriz

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}.$$

Concluimos que o problema  $\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) = f(x)$  em  $\mathbb{C}$  equivale ao seguinte sistema em  $\mathbb{R}^2$ :

$$\sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x) \partial^\alpha U(x) = F(x),$$

em que

$$A_\alpha(x) = \begin{pmatrix} a_{1\alpha}(x) & -a_{2\alpha}(x) \\ a_{2\alpha}(x) & a_{1\alpha}(x) \end{pmatrix}, U(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}, F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}.$$

Agora observamos que existe  $\nu \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tal que

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x_0) \nu^\alpha \neq 0.$$

De fato, suponha que  $\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x_0) \xi^\alpha = 0$  para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Logo

$$\partial_\xi^{\alpha_0} \left( \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x_0) \xi^\alpha \right) = 0 \implies A_{\alpha_0}(x_0) = 0.$$

Mas  $A_{\alpha_0}(x_0) = \begin{pmatrix} a_{1\alpha_0}(x_0) & -a_{2\alpha_0}(x_0) \\ a_{2\alpha_0}(x_0) & a_{1\alpha_0}(x_0) \end{pmatrix} \neq 0$ , pois  $a_{\alpha_0}(x_0) \neq 0$ . Isto é uma contradição. Concluimos que existe  $\xi_0$  tal que  $\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x_0) \nu^\alpha \neq 0$ . Note que  $\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x_0) \nu^\alpha$  será uma matriz da forma:

$$\begin{pmatrix} \eta_1 & -\eta_2 \\ \eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix}$$

já que é soma de matrizes com a forma acima. Como  $\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x_0) \nu^\alpha \neq 0$ , concluimos que  $\eta_1$  ou  $\eta_2$  são diferentes de zero. Assim,

$$\det \left( \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x_0) \nu^\alpha \right) = \det \begin{pmatrix} \eta_1 & -\eta_2 \\ \eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix} = \eta_1^2 + \eta_2^2 \neq 0.$$

Consideremos agora um hiperplano  $\Gamma$  que passa por  $x_0$  cuja normal é  $\nu$ . Assim, temos que

$$\det \left( \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x) \nu^\alpha \right) \neq 0$$

para todo  $x \in B(x_0, r) \cap \Gamma$ , desde que  $r > 0$  seja suficientemente pequeno. Consideremos agora o problema

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x) \partial^\alpha U(x) &= F(x), & x \in B(x_0, r) \\ U(x) &= 0, & x \in B(x_0, r) \cap \Gamma \end{aligned}$$

Estamos então nas condições do Teorema de Cauchy-Kowalevsky. Assim, existe  $0 < \tilde{r} < r$  e  $U : B(x_0, \tilde{r}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $U$  é solução do problema acima em  $B(x_0, \tilde{r})$ . Portanto, se  $U(x) = (u_1(x), u_2(x))$ , então  $u : B(x_0, \tilde{r}) \rightarrow \mathbb{C}$  dado por  $u(x) = u_1(x) + iu_2(x)$  é solução de

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) &= f(x), & x \in B(x_0, \tilde{r}) \\ u(x) &= 0, & x \in B(x_0, \tilde{r}) \cap \Gamma \end{aligned}$$

□

Agora uma questão que podemos levantar é a seguinte: e se  $f$  for só  $C^\infty$ ? Então sempre existe uma solução  $u$ ? A resposta é não!

Consideremos o seguinte problema em  $\mathbb{R}^3$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, t) + i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, t) - 2i(x + iy) \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = f(x, y, t).$$

O problema acima satisfaz todas as condições do Teorema anterior. Os coeficientes são todos reais analíticos. Porém... Olhem o que ocorre:

**TEOREMA 353.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^3$  um aberto que contém 0 e  $f \in C(U)$ . Suponha que exista  $V \subset U$  aberto que contém zero e uma função  $u \in C^1(V)$  tal que*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, t) + i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, t) - 2i(x + iy) \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = f(x, y, t), \forall (x, y, t) \in V.$$

*Logo existe uma vizinhança  $W$  aberta de zero tal que  $f : W \rightarrow \mathbb{C}$  é real-analítica.*

**DEMONSTRAÇÃO.** Veja Teorema 1.48 do Folland. □

**COROLÁRIO 354.** *Considere a função*

$$f(x, y, t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & (x, y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ]0, \infty[ \\ 0, & (x, y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ]-\infty, 0] \end{cases}.$$

*Essa função não é real analítica em nenhuma vizinhança de zero, pois a série de Taylor no ponto 0 é igual a zero. Portanto, a série não converge para a função  $f$  em nenhum aberto  $B(0, r) \subset \mathbb{R}^3$ ,  $r > 0$ . Assim o problema*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, t) + i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, t) - 2i(x + iy) \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = f(x, y, t)$$

*não tem solução  $C^1$  (e, claro, nem  $C^\infty$ ) em nenhuma vizinhança de 0, já que isso implicaria a real analiticidade da função  $f$ .*

### 9.6.1. Exercícios.

**EXERCÍCIO 355.** (FOLLAND CAP. 1.D.2)

Transforme a equação  $\Delta u = f$  definida em  $\mathbb{R}^n$  num sistema de primeira ordem usando a construção feita em sala de aula. Use como hiperplano o conjunto  $x_n = 0$ .

**EXERCÍCIO 356.** (FOLLAND CAP. 1.D.3)

Para entender como as ideias do Teorema de Cauchy-Kowalevski funcionam num contexto mais simples, prove o seguinte teorema sobre equações diferenciais ordinárias definidas em  $\mathbb{C}$ .

Suponha que  $p(z) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m z^m$  e  $q(z) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m z^m$  são holomorfas no disco  $|z| < R$  (portanto, as séries convergem absolutamente e uniformemente em todo disco de raio menor do que  $R$ ). Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$u''(z) = p(z) u'(z) + q(z) u(z), \quad u(0) = c_0, \quad u'(0) = c_1.$$

a) Mostre que se  $u(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$  satisfaz a equação acima, então

$$c_{m+2} = \frac{1}{(m+2)(m+1)} \sum_{j=0}^m [(j+1) c_{j+1} p_{m-j} + c_j q_{m-j}].$$

Assim, os coeficientes são unicamente determinados.

b) Suponha que  $P_m \geq |p_m|$  e  $Q_m \geq |q_m|$  para todo  $m \geq 0$ , e seja  $P(z) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m z^m$  e  $Q(z) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m z^m$ . Mostre que se  $U(z) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m z^m$  satisfaz

$$U''(z) = P(z) U'(z) + Q(z) U(z), \quad U(0) = C_0, \quad U'(0) = C_1,$$

com  $C_0 \geq |c_0|$  e  $C_1 \geq |c_1|$ , então  $C_m \geq |c_m|$ .

c) Suponha que  $r < R$ . Mostre que as condições do item b) são satisfeitas se tomarmos  $P_m = Kr^{-m}$  e  $Q_m = K(m+1)r^{-m}$  para  $K$  suficientemente grande, de tal forma que  $P(z) = K(1 - \frac{z}{r})^{-1}$  e

$Q(z) = K\left(1 - \frac{z}{r}\right)^{-2}$ . Mostre também que a solução geral de  $U''(z) = P(z)U'(z) + Q(z)U(z)$  é uma combinação linear de  $\left(1 - \frac{z}{r}\right)^\alpha$  e  $\left(1 - \frac{z}{r}\right)^\beta$  para coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  adequados.

d) Conclua que existe uma única função  $u$  holomorfa no disco  $|z| < R$  que é solução de

$$u''(z) = p(z)u'(z) + q(z)u(z), \quad u(0) = c_0, \quad u'(0) = c_1.$$

EXERCÍCIO 357. (QING HAN CAP. 7.3) Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - u(x, t) &= 0 \text{ em } \mathbb{R} \times ]0, \infty[ \\ u(x, 0) = x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= -x \end{aligned}$$

Ache uma solução como série de potências em torno do  $(0, 0)$  e identifique essa solução.

EXERCÍCIO 358. (EVANS CAP. 4.2) Considere a seguinte equação de Laplace  $\Delta u = 0$  em  $\mathbb{R}^2$  com as condições iniciais:

$$u(x_1, 0) = 0 \text{ e } \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) = \frac{1}{n} \text{sen}(nx_1).$$

Procure uma solução da forma  $u(x_1, x_2) = f(x_1)g(x_2)$  e conclua que  $u(x_1, x_2) = \frac{1}{n^2} \text{sen}(nx_1) \text{senh}(nx_2)$ . O que ocorre com  $u$  quando  $n \rightarrow \infty$ ? Compare o comportamento da solução com o das condições iniciais quando  $n \rightarrow \infty$ . (Isto nos diz de certa forma que a solução deste problema não é contínua em relação aos dados iniciais. O exemplo é de Hadamard).

EXERCÍCIO 359. (EVANS CAP. 4.9) Mostre que a linha  $t = 0$  é característica (ou seja, não é não-característica) para a equação do calor  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ . Mostre que não existe uma solução analítica da equação do calor em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  com  $u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}$ . (Dica: Assuma que exista uma solução, calcule seus coeficientes e conclua que a série diverge. O exemplo é de Kowalevski).

EXERCÍCIO 360. (QING HAN CAP. 7.6) Sejam  $a, b_{ij}$  funções analíticas definidas em uma vizinhança de  $0 \in \mathbb{R}^2$  e  $\varphi, \psi$  analíticas em uma vizinhança de  $0$  em  $\mathbb{R}$ . Em uma vizinhança da origem em  $\mathbb{R}^2$ , considere

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b_{11}u + b_{12}v = f \\ \frac{\partial v}{\partial x} + b_{12}u + b_{22}v = g \end{cases}$$

com a condição  $u(x, 0) = \varphi(x)$  e  $v(0, t) = \psi(t)$

Seja  $(u, v)$  uma solução suave em uma vizinhança da origem. Prove que todas as derivadas de  $u$  e  $v$  são expressas em termos daquelas de  $a, b_{ij}, f, g, \varphi$  e  $\psi$  em  $0$ . (Para facilitar, mostre ao menos que é possível calcular as derivadas de ordem menor ou igual a 2 de  $u$  e  $v$  no ponto  $(0, 0)$  apenas em função de  $a, b_{ij}, f, g, \varphi, \psi$  e suas derivadas na origem.)

EXERCÍCIO 361. (Prova de 2019)

a) Considere a equação da onda:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = 0 \\ u(x_1, 0) = f(x_1) \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) = g(x_1) \end{cases}$$

Considere  $U_0 = u$ ,  $U_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}$  e  $U_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2}$ . Escreva a equação acima da forma equivalente

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(U_0, U_1, U_2) = \left( F_1 \left( U_i, \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, j \neq 2 \right), F_2 \left( U_i, \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, j \neq 2 \right), F_3 \left( U_i, \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, j \neq 2 \right) \right).$$

Encontre as funções  $F_1, F_2$  e  $F_3$ . Qual deve ser a condição inicial  $(U_0(x_1, 0), U_1(x_1, 0), U_2(x_1, 0))$ ?

b) Suponha que  $u(x_1, x_2) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk} x_1^j x_2^k$ ,  $c_{jk} \in \mathbb{R}$ , seja solução de  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) =$

0. Ache uma relação entre os coeficientes de  $c_{(j+2)k}$  e  $c_{j(k+2)}$ . Se  $f(x_1) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j x_1^j$ ,  $f_j \in \mathbb{R}$ , e  $g(x_1) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j x_1^j$ ,  $g_j \in \mathbb{R}$ , determine os coeficientes  $c_{j0}$  e  $c_{j1}$ , para  $j \in \mathbb{N}_0$ , em função de  $f_j$  e  $g_j$ . Use as relações obtidas entre os coeficientes para determinar a solução no caso em que  $f(x_1) = x_1$  e  $g(x_1) = 1$ . (Dica: A solução é bem simples!)

## CAPÍTULO 10

### Notação

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

Dizemos que  $f \in L^1(U)$  se  $\int_U |f(x)| dx < \infty$ .

Dizemos que  $f \in L^2(U)$  se  $\int_U |f(x)|^2 dx < \infty$ .

Dizemos que uma função contínua  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  pertence a  $L^\infty(U)$  se  $f$  é limitada.

dia 2 de setembro: [meet.google.com/hpm-xfme-pmj](https://meet.google.com/hpm-xfme-pmj)

dia 4 de setembro: [meet.google.com/vim-tpyi-bok](https://meet.google.com/vim-tpyi-bok)

dia 9 de setembro: [meet.google.com/hjq-ksix-hhm](https://meet.google.com/hjq-ksix-hhm)

dia 11 de setembro: [meet.google.com/nnw-udjr-rpt](https://meet.google.com/nnw-udjr-rpt)