A Lógica do Descobrimento Matemático

Provas e Refutações

Imre Lakatos

Organizado por
John Worrall e Elie Zahar

Cultura Científica

ZAHAR EDITORES

Título original:

Proofs and Refutations — The Logic of Mathematical Discovery

Traduzido da primeira edição inglesa, publicada em 1976 pela CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, de Londres, Inglaterra

capa de

ÉRICO

1978

Direitos para a língua portuguesa adquiridos por

ZAHAR EDITORES

Caixa Postal 207, ZC-00, Rio

que se reservam a propriedade desta versão

Impresso no Brasil

SH

Índice

Guessing

PREFÁCIO DOS ORGANIZADORES

Nosso grande amigo e professor Imre Lakatos morreu inesperadamente, em 2 de fevereiro de 1974, quando, como de costume, estava empenhado em muitos projetos intelectuais. Um dos mais importantes desses projetos era a publicação da versão modificada e ampliada deste brilhante ensaio, *A Lógica do Descobrimento Matemático*, publicado em quatro partes no *British Journal for the Philosophy of Science*, *14*, 1963-64. Lakatos de há muito havia contratado a publicação deste livro, mas adiava sempre a entrega dos originais, na esperança de emendar e aperfeiçoar ainda mais o ensaio, além de acrescentar-lhe considerável material. Este livro foi sobremaneira retardado pela diversidade de seus interesses quanto à filosofia da ciência física, mas, finalmente, no verão de 1973, decidiu ele dar prosseguimento à publicação. Durante aquele verão, discutimos com ele o plano da edição, e esforçamo-nos por produzir um livro que estivesse o mais possível de acordo com os desejos de Lakatos, não obstante, agora, pesarosos por sua ausência.

Assim é que incluimos três novas seções em acréscimo ao original, "Provas e Refutações" (que nesta edição passa a ser o Capítulo I). Primeiramente, acrescentamos uma segunda parte ao texto principal, referente à prova vetor-algébrica de Poincaré da conjectura Descartes-Euler. Essa parte baseia-se no Capítulo II da tese doutoral de Lakatos em Cambridge, em 1961. (O original do ensaio "Provas e Refutações" era uma versão muito alterada e aperfeiçoada do Capítulo I dessa tese.) Parte do Capítulo III dessa tese torna-se, neste volume, o Apêndice I, que contém ainda um estudo de caso no método de provas e refutações. Refere-se à prova de Cauchy do teorema de que o limite de qualquer série convergente de funções contínuas é em si contínuo. O Capítulo II do texto principal e o Apêndice I devem dirimir a dúvida, freqüentemente expressa por matemáticos que leram "Provas e Refutações", de que, embora o método de análise-prova definido por Lakatos possa ser aplicado ao estudo dos poliedros, assunto que é "quase empírico" e em que os contra-exemplos são facilmente perceptíveis, pode ser inaplicável a matemáticas "reais". A terceira seção adicional (Apêndice II) também se baseia numa parte do Capítulo III da tese de Lakatos. Refere-se às conseqüências de sua posição quanto ao desenvolvimento, apresentação e ensino da matemática.

Uma das razões de delongas de Lakatos na publicação do seu trabalho foi ter ele reconhecido que parte desse material extra, embora contendo muitas questões novas e desenvolvimento de sua posição, carecia de mais apuro e pesquisa histórica. Isso se aplica, sobretudo, ao material (no Apêndice I) referente a Cauchy e Fourier. Também reconhecemos certas dificuldades e ambigüidades, bem como a falta de algo mais nesse material. Contudo, somos de parecer que não devíamos alterar o que Lakatos escreveu. Quanto à elaboração e acréscimo de material, nenhum de nós estava em condições de proporcionar a longa e pormenorizada pesquisa histórica que o assunto requer. Diante das alternativas de não publicar o trabalho ou então publicá-lo inacabado, optamos pela última. Achamos que há muito interesse nele, e esperamos que esta publicação venha a estimular outros estudiosos no sentido de ampliá-lo e corrigi-lo, se necessário.

De modo geral, não achamos correto modificar o conteúdo do material deixado por Lakatos, mesmo naquelas partes em que, com certeza, ele próprio teria mudado a sua posição. Restringimo-nos, portanto, a assinalar (em notas indicadas mediante asteriscos) algumas daquelas coisas que teríamos tentado persuadir Lakatos a modificar para fins da presente publicação. (Sem dúvida, sua posição intelectual mudou consideravelmente nos treze anos decorridos desde seu doutoramento até sua morte. As principais modificações em sua filosofia geral revelam-se nos seus trabalhos [1970]. Lakatos pensava que sua metodologia de programas de pesquisa científica tinha importantes implicações quanto à sua filosofia da matemática.)

Quanto à apresentação, preocupamo-nos em deixar o material como o próprio Lakatos o teria publicado (isto é, o Capítulo I do ensaio principal) quase totalmente sem alteração (com exceção de uns poucos erros de imprensa e evidentes lapsos mínimos). Contudo, modificamos consideravelmente o material anteriormente inédito — embora, reiteremos, apenas quanto à forma, e não quanto ao conteúdo. Como isso pode parecer um tanto fora do comum, cabe-nos justificar nossa atitude em poucas palavras.

Lakatos sempre teve muito cuidado quanto à apresentação de trabalhos seus a serem publicados, e antes da publicação ele sempre distribuía numerosas cópias a colegas e amigos, solicitando críticas, sugestões e aprimoramentos. Estamos certos de que o material inédito ora publicado teria sido tratado do mesmo modo, e que as alterações teriam sido ainda mais drásticas do que as que ousamos fazer. Nosso conhecimento (pela experiência pessoal) das dificuldades que Lakatos enfrentou para apresentar sua posição do modo mais claro possível obrigou-nos a tentar melhorar a apresentação deste material do melhor modo a nosso alcance. É certo que as novas seções apresentadas não estão redigidas da melhor maneira como deviam, caso o próprio Lakatos tivesse revisto o material em que se baseiam, mas achamos que sempre estivemos muito perto de Lakatos, e bastante familiarizados com suas publicações anteriores, de modo a podermos tentar a apresentação do seu trabalho como ele próprio o teria feito.

É-nos sobremodo agradável a oportunidade de lançar este livro que encerra um dos trabalhos mais importantes de Lakatos sobre a filosofia da matemática, pois nos permite saldar parte da dívida intelectual e pessoal que temos para com ele.

JOHN WORRALL
ELIE ZAHAR

AGRADECIMENTOS

O material em que se baseou este livro teve longa e variada história, como em parte já mencionamos no Prefácio. De acordo com os agradecimentos feitos por Lakatos no seu ensaio original de 1963-64 (reimpresso aqui como Capítulo I), aquele trabalho começou em ~~em~~ 1958-59, no King's College, Cambridge, e foi lido pela primeira vez no Seminário Karl Popper, na London School of Economics, em março de 1959. Outra versão foi acrescentada à sua tese de doutorado em Cambridge, em 1961, na qual o restante deste livro também se baseia. A tese foi preparada sob a supervisão do Professor R. B. Braithwaite. Quanto à tese, Lakatos agradeceu o patrocínio financeiro da Fundação Rockefeller e declara ter "recebido muita ajuda, estímulo e crítica valiosa do Dr. T. J. Smiley". No restante dos agradecimentos de Lakatos, lemos'

> Ao preparar esta última versão na London School of Economics, o autor cuidou de tomar nota sobretudo das críticas e sugestões dos Drs. J. Agassi, I. Hacking, Professores W. C. Kneale e R. Mon~~t~~tague, A. Musgrave, Professor M. Polanyi e J. W. N. Watkins. O tratamento do método de antiexceção foi aperfeiçoado sob o estímulo das observações críticas dos Professores G. Pólya e B. L. Van der Warden. A distinção dos métodos de antimonstro e ajuste de monstro foi sugerida por B. MacLennan.
>
> O ensaio deve ser visto sob o pano de fundo da heurística matemática revivida por Pólya e da filosofia crítica de Popper.

Ao preparar este livro, os editores tiveram a cooperação de John Bell, Mike Hallet, Mosché Machover e Jerry Ravetz, que muito gentilmente leram rascunhos do Capí-

tulo II e os Apêndices, contribuindo com fecundas críticas.

Cabe-nos, também, agradecer o trabalho de Sandra D. Mitchel e especialmente de Gregory Currie, que cuidadosamente criticaram nosso remanejamento do material deixado por Lakatos.

J. W.
E. Z.

INTRODUÇÃO DO AUTOR

Não poucas vezes na história do pensamento, acontece que, quando surge um poderoso método novo, o estudo daqueles problemas que podem ser tratados mediante o novo método avança rapidamente e atrai para si as atenções, ao passo que o restante tende a ser desprezado ou mesmo esquecido, e seu estudo relegado a um segundo plano.

Quanto à Filosofia da Matemática, parece ter acontecido isso em nosso século, em decorrência do desenvolvimento dinâmico da metamatemática.

O tema da metamatemática é uma abstração de matemática em que teorias matemáticas são substituídas por sistemas formais, provas por certas seqüências de fórmulas bem constituídas, definições por "dispositivos abreviados", "teoricamente dispensáveis" mas "tipograficamente convenientes".[1] Essa abstração foi vislumbrada por Hilbert de modo a proporcionar poderosa técnica para o enfoque de alguns problemas da metodologia da matemática. Ao mesmo tempo, há problemas que caem fora da categoria de abstrações matemáticas. Entre estes estão todos os problemas referentes à matemática não-formal (*inhaltliche*) e ao seu progresso, e todos os problemas relacionados à lógica situacional da solução de problemas matemáticos.

Chamarei de escola "formalista" a escola de filosofia matemática que tende a identificar matemática com sua abstração axiomática formal (e a filosofia da matemá-

---

[1] Church [1956], I, pp. 76-7. Cf. também Peano [1894], p. 49 e Russell e Whitehead [1910-13], I, p. 12. Trata-se de parte integral do programa euclidiano tal como formulado em Pascal [1659]: Cf. Lakatos [1962], p. 158.

tica com metamatemática). Uma das mais claras afirmações da posição formalista encontra-se em Carnap [1937]. Carnap quer que (*a*) "a filosofia seja substituída pela lógica da ciência...", (*b*) "que a lógica da ciência nada mais seja que a sintaxe lógica da linguagem da ciência...", (*c*) "que a metamatemática seja a sintaxe da linguagem matemática" (pp. xiii e 9). Ou então: a filosofia da matemática deve ser substituída pela metamatemática.

O formalismo desliga a história da matemática da filosofia da matemática, uma vez que, de acordo com o conceito formalista de matemática, não há propriamente história da matemática. Qualquer formalista concordaria basicamente com a observação de Russell, "romanticamente" feita, mas com intenção séria, segundo a qual *Laws of Thought* (*Leis do Pensamento*) (1854), de Boole, foi "o primeiro livro escrito sobre matemática".[2] O formalismo nega o *status* de matemática à maioria do que comumente tem sido considerado matemática, e nada pode dizer sobre o seu progresso. Nenhum dos períodos "criativos" e dificilmente qualquer dos períodos "críticos" das teorias matemáticas seriam admitidos no céu formalista em que as teorias matemáticas habitam como o serafim, expurgado de todas as impurezas da incerteza terrestre. Contudo, os formalistas deixam, em geral, uma pequena porta traseira aberta para anjos caídos: se acontecer que, por algumas "misturas de matemática e algo mais", pudermos encontrar sistemas formais "que os incluem em certo sentido", então eles também podem ser admitidos (Curry [1951], pp. 56-7). Nessas condições, Newton teve que esperar quatro séculos até Peano e Russell, e Quine abriu-lhe as portas do céu pela formalização dos *Calculus*. Dirac é mais afortunado: Schwartz salvou-lhe a alma ainda em vida. Talvez devamos mencionar aqui a condição paradoxal do metamatemático: por padrões formalistas, ou mesmo dedutivistas, ele não é um matemático honesto. Dieudonné fala sobre "a necessidade absoluta imposta a qualquer matemático que *cuide de integridade*

[2] Russell [1901]. O ensaio foi de novo publicado como Capítulo 5 de Russell ([1918], sob o título "A Matemática e os Metafísicos". Na edição Penguin de 1953, a citação pode ser encontrada à p. 74. No prefácio de seu [1918], Russell diz sobre o ensaio: "Sua tônica é em parte explicada pelo fato de que o editor solicitou-me tornasse o artigo o mais romântico possível."

intelectual" (itálicos meus) de apresentar seus raciocínios sob forma axiomática ([1939], p. 225).

Sob o atual domínio do formalismo, é-se tentado a parafrasear Kant: a história da matemática, à falta da orientação da filosofia, tornou-se *cega*, ao passo que a filosofia da matemática, voltando as costas aos fenômenos mais curiosos da história da matemática, tornou-se *vazia*.

O "formalismo" é o baluarte da filosofia do positivismo lógico. De acordo com o positivismo lógico, o enunciado só é significativo se for ou "tautológico" ou empírico. Uma vez que a matemática não-formal não é "tautológica" nem empírica, deve ser destituída de significado, puro despropósito.[3] Os dogmas do positivismo lógico têm sido prejudiciais para a *história e filosofia da matemática*.

O objetivo destes ensaios é enfocar alguns problemas da *metodologia da matemática*. Emprego a palavra "metodologia" em sentido análogo ao de "heurística",[4] de Pólya e Bernays, e "lógica do descobrimento" ou "lógica situacional",[5] de Popper. A recente expropriação do termo "metodologia da matemática" para servir como sinônimo de "metamatemática" tem, fora de dúvida, um toque formalista. Indica que, na filosofia formalista da matemática, não há lugar adequado para metodologia como lógica do descobrimento.[6] De acordo com os formalistas, mate-

---

[3] Segundo Turquette, as proposições goedelianas são destituídas de sentido ([1950], p. 129). Turquette argumenta contra Copi para quem visto serem *verdades a priori*, mas não analíticas, elas refutam a teoria analítica do *a priori* ([1949] e [1950]). Nenhum dos dois observa que a posição peculiar das proposições goedelianas deste ponto de vista é que esses teoremas são de matemática não-formal, e que, de fato, eles estão discutindo a posição da matemática não-formal num caso particular.

[4] Pólyia [1945], sobretudo p. 102, e também [1954], [1962a]; Bernays [1947], esp. p. 187.

[5] Popper [1934], depois [1945], sobretudo p. 90 (ou na quarta edição [1962], p. 97); e também [1957], pp. 147.

[6] Podemos ilustrar isto, por exemplo, por Tarski [1930*a*] e Tarski [1930*b*]. No primeiro ensaio, Tarski emprega o termo "ciências dedutivas" *explicitamente* como abreviação de "ciências dedutivas formalizadas". Diz ele: "Disciplinas dedutivas formalizadas constituem o campo de pesquisa da matemática aproximadamente no mesmo sentido em que entidades espaciais constituem o campo de pesquisa em geometria." Esta sensata formulação recebe uma curiosa torcedura imperialista no segundo ensaio: "As disciplinas dedutivas constituem

mática é matemática formalizada. Mas que se pode *descobrir* numa teoria formalizada? Duas espécies de coisas. *Primeiro*, pode-se descobrir a solução de problemas que a máquina Turing devidamente programada poderia resolver em tempo finito (como, por exemplo: certa pretensa prova é ou não uma prova?). Nenhum matemático tem interesse em obedecer ao monótono "método" mecânico preconizado por tais processos decisórios. *Segundo*, pode-se descobrir soluções para problemas (tais como: será teorema certa fórmula numa teoria não conclusiva)

---

o tema da metodologia das ciências dedutivas quase no mesmo sentido em que as entidades espaciais constituem o tema da geometria e os animais, o da zoologia. É claro, nem todas as disciplinas dedutivas são apresentadas em forma apropriada para objetos de investigação científica. Não são apropriadas, por exemplo, aquelas que não repousam numa base lógica definida, não têm regras rigorosas de inferência, e os teoremas das quais são formulados na linguagem coloquial via de regra ambígua e inexata — numa palavra, aquelas que não são formalizadas. Por conseguinte, as investigações metamatemáticas limitam-se à discussão de disciplinas dedutivas formalizadas." A inovação consiste em que, enquanto a primeira formulação declarava que o tema da metamatemática são as disciplinas dedutivas formalizadas, a segunda formulação declara que o tema da metamatemática limita-se às disciplinas dedutivas formalizadas tão-somente porque as ciências dedutivas não formalizadas não são objetos apropriados para investigação científica. Isso implica que a pré-história de uma disciplina formalizada não possa ser tema de investigação científica — diferentemente da pré-história de uma espécie zoológica, que pode ser tema de uma teoria da evolução muito científica. Ninguém terá dúvida de que alguns problemas de teoria matemática só podem ser enfocados depois de formalizados, assim como alguns problemas sobre os seres humanos (por exemplo, os referentes à sua anatomia) só podem ser enfocados após sua morte. Mas poucos irão inferir disso que os seres humanos "só são apropriados para investigação científica" quando apresentados sob forma "morta", e que, por conseguinte, as pesquisas biológicas limitam-se à discussão de seres humanos mortos — muito embora eu não ficasse surpreso se algum discípulo entusiasta de Vesalius nos gloriosos dias da anatomia primitiva, quando surgiu o novo método de dissecação, identificasse a biologia com a análise de corpos mortos.

No prefácio de seu [1914], Tarski amplia sua atitude negativa quanto à possibilidade de qualquer espécie de metodologia que não sejam sistemas formais: "Um curso na metodologia das ciências empíricas... deve, em geral, limitar-se a estimativas e críticas de tentativas e esforços mal sucedidos." A razão é que as ciências empíricas não são científicas: porque Tarski define uma teoria científica como "um sistema de proposições asseridas, dispostas de acordo com certas regras" (*ibidem*).

em que só se pode ser orientado pelo "método" do "vislumbre indisciplinado e boa sorte"?

Ora, essa fria alternativa entre o racionalismo da máquina e o irracionalismo da suposição cega não prevalece no caso da matemática viva:[7] uma investigação de matemática *não-formal* ensejará fecunda lógica situacional para matemáticos operosos, lógica situacional que nem é mecânica nem irracional, mas que não pode ser reconhecida e muito menos estimulada pela filosofia formalista.

A história da matemática e a lógica do descobrimento matemático, isto é, a filogênese e a ontogênese do pensamento matemático,[8] não se podem desenvolver sem a crítica e rejeição definitiva do formalismo.

Mas a filosofia formalista da matemática tem raízes muito profundas. É o último elo na longa corrente das filosofias *dogmatistas* da matemática. Por mais de dois mil anos, tem havido discussão entre *dogmáticos* e *céticos*. Os dogmáticos sustentam que — graças ao poder do intelecto ou dos sentidos, ou de ambos — podemos alcançar a verdade e saber que a alcançamos. Os céticos, por outro lado, afirmam que não podemos atingir a verdade de

---

[7] Uma das mais perigosas extravagâncias da filosofia formalista é o hábito de (1) declarar alguma coisa — corretamente — sobre sistemas formais; (2) depois dizer que isso se aplica à "matemática" — o que também é certo se aceitarmos a identificação da matemática com sistemas formais; (3) depois, com uma sub-reptícia alteração do significado do termo, empregar "matemática" no sentido comum. Assim, diz Quine ([1951], p. 87) que "isto reflete a situação matemática característica; o matemático descobre sua prova por vislumbre e boa sorte, de modo não previsto, mas, em seguida, outros matemáticos conferem sua prova". Mas, não raro, conferir uma prova *comum* (não formal) é tarefa muito delicada, e acertar com um "engano" exige tanto vislumbre e sorte quanto para acertar com a prova: a descoberta de "enganos" em provas não formais pode às vezes levar décadas — se não séculos.

[8] H. Poincaré e G. Pólya propõem aplicar a "lei biogenética fundamental" de E. Haeckel sobre a ontologia resumindo a filogenia ao desenvolvimento mental, sobretudo ao desenvolvimento mental matemático. (Poincaré [1908], p. 135, e Pólya [1962*b*]). Citando Poincaré: "Os zoólogos afirmam que o desenvolvimento do embrião de um animal reproduz, em resumo, toda a história dos seus antepassados através do tempo geológico. Parece acontecer o mesmo com o desenvolvimento das mentes... Por esta razão, a história da ciência deve ser nosso primeiro guia" (C. B. Halsted, tradução autorizada, p. 437).

modo algum (a menos que mediante a experiência mística), ou que não podemos saber se alcançamos isto ou aquilo. Nesse grande debate, em que os argumentos são, por vezes, atualizados, a matemática tem sido o orgulhoso reduto do dogmatismo. Sempre que o dogmatismo matemático caía em "crise", vez por outra nova versão proporcionava autêntico rigor e fundamentos decisivos, com isso restaurando a imagem da matemática autoritária, infalível e irrefutável, "a única Ciência que até aqui aprouve a Deus conceder à humanidade" (Hobbes [1651], p. 15). Os céticos, em maioria, resignaram-se à impenetrabilidade dessa fortaleza da epistemologia dogmática.[9] Um desafio está agora vencido.

O núcleo desse estudo de caso desafiará o formalismo matemático, mas não desafiará diretamente as posições últimas do dogmatismo matemático. Seu modesto objetivo é formular a questão de que a matemática não-formal, semi-empírica, não progride mediante monótono aumento do número de teoremas indubitavelmente estabelecidos, mas mediante incessante aperfeiçoamento de opiniões por especulação e crítica, pela lógica das provas e refutações. Dado, porém, que a metamatemática é paradigma de matemática não-formal, semi-empírica, atualmente em rápido progresso, o ensaio, por implicação, será também um desafio ao moderno dogmatismo matemático. O estudante da recente história da metamatemática identificará os padrões aqui expostos em seu próprio campo.

A forma dialogada deve refletir a dialética do caso; significa conter uma espécie de *racionalidade reconstruída ou história* "destilada". *A verdadeira história aparecerá nas notas de pé de página, a maioria das quais, portanto, deve ser tomada como parte orgânica deste ensaio.*

---

[9] Para uma análise do papel da matemática na controvérsia entre dogmatismo e ceticismo, veja-se meu [1962].

I

1. *Um Problema e uma Conjectura*

O diálogo dá-se numa sala de aula imaginária. A turma está interessada num *PROBLEMA*: haverá uma relação entre o número de vértices V, o número de arestas A e o número de faces F dos poliedros — sobretudo dos *poliedros regulares* — análoga à relação trivial entre o número de vértices e arestas de *polígonos*, isto é, ~~haverá~~ há tantas arestas quanto vértices: $V = A$? Esta última relação permite-nos classificar os *polígonos* de acordo com o número de arestas (ou vértices): triângulos, ~~retângulos~~ quadriláteros, pentágonos etc. Relação análoga permitiria classificar *poliedros*.

Os participantes do diálogo, depois de muita tentativa e erro, observam que para todos os poliedros regulares $V - A + F = 2$.[1] Alguém aventura o *palpite* de que

[1] Observado pela primeira vez por Euler [1758*a*]. Seu problema original era a classificação de poliedros, cuja dificuldade foi acentuada no sumário editorial: "Enquanto em geometria plana os polígonos *(figurae rectilineae)* podiam ser classificados muito facilmente de acordo com o número de lados, o qual é evidentemente sempre igual ao número de seus ângulos, em estereometria a classificação dos poliedros *(corpora hedris planis inclusa)* representa problema muito mais difícil, visto que somente o número de faces é insuficiente para esse fim."

A chave para o resultado de Euler foi a invenção dos conceitos de vértice e aresta: foi ele quem primeiro observou que, além do número de faces, o número de pontos e linhas na superfície do poliedro determina o seu caráter (topológico). É interessante que ele tenha estado ansioso por acentuar a novidade de sua estrutura conceitual, e que tenha inventado o termo "*acies*" (aresta) em vez do antigo "*latus*" (lado), visto que *latus* era um conceito poligonal, ao passo que ele queria um conceito poliedral. Por outro lado, mantinha o lf isso pode aplicar-se a qualquer poliedro. Outros tentam falsear esta *conjectura*, tentando pô-la a prova de muitos modos diferentes, com resultado satisfatório. Os resultados *corroboram* a conjectura, e sugerem que ela pode ser *provada*. É a esta altura — depois das fases *problema* e *conjectura* — que entramos em sala.[2] O professor tem como plano de aula precisamente oferecer uma *prova*.

2. *Uma Prova*

PROFESSOR: Em nossa última aula, chegamos a uma conjectura referente aos poliedros, isto é, que para todos os poliedros $V - A + F = 2$, em que V é o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces. Pusemo-la à prova por diversos métodos. Mas ainda não a comprovamos. Alguém terá descoberto uma prova?

ALUNO SIGMA: "Quanto a mim, devo admitir que não fui capaz ainda de vislumbrar uma prova rigorosa desse teo-

---

termo "*angulus solidus*" para os seus vértices em formato de pontas. Tem sido recentemente admitido que a prioridade do resultado cabe a Descartes. A base para isso é um manuscrito de Descartes [c.1639] copiado por Leibniz, em Paris, do original em 1675-6, redescoberto e publicado por Foucher de Careil em 1860. A prioridade não deve ser atribuída a Descartes sem restrições. É certo que Descartes declara que o número de ângulos planos iguala $2\phi + 2\alpha - 4$ em que por ϕ ele entende o número de faces e por α o número de ângulos sólidos. Certo é também que ele declara haver duas vezes mais ângulos planos que arestas *(latera)*. Essas declarações conjuntas, evidentemente, dão a fórmula de Euler. Mas Descartes não chegou a esse ponto, visto que pensava ainda em termos de ângulos (planos e sólidos) e faces, e não fez uma alteração revolucionária consciente dos conceitos de vértices ~~não~~ 0 dimensionais, arestas unidimensionais e faces bidimensionais como base necessária e suficiente para a plena caracterização topológica de poliedros.

[2] Euler testou a conjectura a fundo pelas conseqüências. Conferiu-a para prismas, pirâmides etc. Podia ter acrescentado que a proposição de que existem apenas cinco corpos regulares é também conseqüência da conjectura. Outra conseqüência suspeitada é a proposição até aqui corroborada de que quatro cores são suficientes para colorir um mapa.

A fase de *conjecturar* e *testar* no caso de $V - A + F = 2$ é discutida em Pólya ([1954], vol. 1, as primeiras cinco seções do terceiro capítulo, pp. 35-41). Pólya parou nesse ponto, e não trata da fase da prova — embora, evidentemente ele observe a necessidade de uma heurística de "problemas a provar" ([1945], p. 144). Nossa discussão inicia onde Pólya deixa a questão.

rema... Como, porém, a verdade dele ficou patente em tantos casos, não pode haver dúvida de que ela valha para qualquer sólido. Assim, a proposição me parece satisfatoriamente demonstrada."[3] Mas se o senhor tem uma prova, por favor, apresente-a.

PROFESSOR: De fato, tenho uma. Consiste da seguinte reflexão. Primeiro passo: Imaginemos que o poliedro seja oco, com uma superfície feita de borracha fina. Se removermos uma das faces, podemos estender a superfície restante no quadro-negro, sem rasgá-la. As faces e arestas ficarão deformadas, as arestas poderão ficar curvas, mas V e A não se alterarão, de modo que se, e ~~apenas~~ se somente $V - A + F = 2$ para o poliedro original, $V - A + F = 1$ para essa estrutura plana — lembra que removemos uma face. A Figura 1 mostra o desenho plano para o caso de um cubo. Segundo passo: agora, triangulamos nosso mapa — que, na verdade, parece um mapa geográfico. Desenhamos diagonais (possivelmente curvilíneas) naqueles polígonos (possivelmente curvilíneos) que já não são ainda triângulos (possivelmente curvilíneos). Ao desenharmos cada diagonal, aumentamos tanto A como F de um, de modo que o total $V - A + F$ não se alterará (Fig. 2).

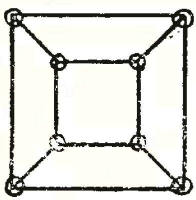


Fig. 1

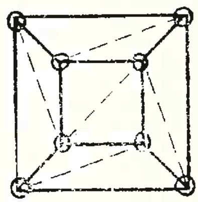


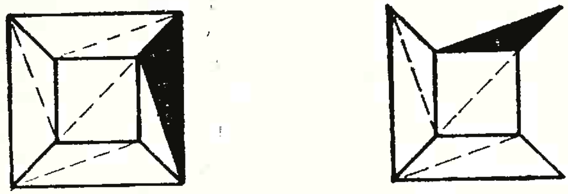
Fig. 2

Terceiro passo: do desenho triangulado, retiramos agora os triângulos um a um. Para remover um triângulo nós ou removemos uma aresta — com o que uma face ~~ou~~ e uma aresta desaparecem (Fig. 3(*a*)), ou removemos duas arestas e um vértice — com o que uma face, duas arestas e um vértice desaparecem (Fig. 3(*b*)). Desse modo, se $V - A + F = 1$ antes de o triângulo ser removido, assim continua depois que o triângulo for removido. No final

[3] Euler ([1758*a*], p. 119 e p. 124). Mais tarde, porém [1758*b*], ele propôs uma prova.

desse processo, temos um único triângulo. Para este caso, é verdadeira a fórmula $V - A + F = 1$. Desse modo, provamos nossa conjectura.[4]

ALUNO DELTA: Agora o senhor pode chamá-la de *teorema*. Não se vê o que mais exista de conjectural no caso.[5]



(*a*) Fig 3 (*b*)

ALUNO ALFA: Tenho alguma dúvida. Percebo que essa experiência pode ser feita para um cubo ou para um tetraedro, mas como posso saber que poderá ser feita para *qualquer* poliedro? Por exemplo, o senhor está seguro de que *qualquer poliedro, depois de retirarmos uma de suas faces, pode ser esticado planamente no quadro-negro*? Tenho minhas dúvidas quanto ao primeiro passo.

ALUNO BETA: O senhor está seguro de que *ao triangular o mapa teremos sempre uma nova face para uma nova aresta*? Tenho dúvidas quanto ao segundo passo.

ALUNO GAMA: O senhor está certo de que *há apenas duas alternativas — o desaparecimento de uma aresta ou então de duas arestas e um vértice — quando se retiram os triângulos um a um*? O senhor tem mesmo certeza de que *ficamos com um único triângulo no final desse processo*? Tenho dúvidas quanto ao terceiro passo.[6]

PROFESSOR: É claro, não tenho certeza.

---

4 Essa idéia de prova decorre de Cauchy [1813*a*].

5 A opinião de Delta de que essa prova determinou o "teorema" fora de dúvida foi partilhada por muitos matemáticos no século XIX, como por exemplo Crelle [1826-7], 2, pp. 668-71, Matthiessen [1863], p. 449, Jonquières [1890*a*] e [1890*b*]. Citando uma passagem característica: "Depois da prova de Cauchy, tornou-se absolutamente indubitável que a elegante relação $V + F = A + 2$ aplica-se a todos os tipos de poliedros, tal como Euler declarou em 1752. Em 1811 toda incerteza deve ter desaparecido" (Jonquières [1890*a*], pp. 111-12).

6 A turma é um tanto avançada. Para Cauchy, Poinsot e muitos outros excelentes matemáticos do século XIX, essas questões não existiam.

ALFA: Mas, neste caso, estamos em situação pior que antes! Em vez de uma conjectura, temos agora pelo menos três! E o senhor chama isto de "prova"!

PROFESSOR: Reconheço que o nome tradicional de "prova" no caso por mim dado pode, corretamente, ser considerado um tanto enganador. Sou de parecer que ela não estabelece a verdade da conjectura.

para este experimento mental

DELTA: Então, para que serve ela? A seu ver, que é que uma prova matemática prova?

PROFESSOR: Trata-se de uma questão sutil que tentarei responder mais tarde. Até lá, proponho mantermos o termo consagrado pelo tempo, aceitando "prova" como uma *experiência mental* — ou *"semi-experiência"* —*que sugere a decomposição da conjectura original em subconjectura ou lemas*, assim *encaixando-a* num corpo de conhecimento possivelmente muito distante. Nossa "prova", por exemplo, encaixou a conjectura original — sobre cristais, ou, digamos, sólidos — na teoria das folhas de borracha. Descartes ou Euler, pais da conjectura original, certamente nem sonharam com isto. [7]

[7] Experiência mental *(deiknymi)* era o mais antigo padrão de prova matemática. Prevaleceu na matemática grega pré-euclidiana (cf. A. Szabó [1958]).

Para matemáticos antigos, era lugar-comum que conjecturas (ou teoremas) precedam provas na ordem heurística. Isso decorria da precedência heurística da "análise" em relação à "síntese". (Para excelente discussão, veja-se Robinson [1936]). De acordo com Proclos, "é... necessário saber de antemão o que se procura" (Heath [1925], I, p. 129). "Eles diziam que teorema é aquilo que é proposto com vistas à demonstração da própria coisa proposta" — diz Pappus (*ibid.* I, p. 10). Os gregos não pensavam muito em proposições que lhes ocorriam no curso da dedução, sobre as quais não tivessem feito suposições anteriormente. Chamavam-nas de *porismos*, corolários, resultados casuais decorrentes da prova de um teorema ou da solução de um problema, resultados não diretamente procurados, mas que apareciam, como que por acaso, sem trabalho a mais constituindo, como o diz Proclus, uma espécie de fruta caída *(ermaion)* ou presente *(kerdos)* (*ibid.* I, p. 278). Lemos no sumário editorial de Euler (1756-7) que teoremas aritméticos "foram descobertos muito antes que sua verdade tivesse sido confirmada por rígidas demonstrações". Tanto o editor como Euler empregam para esse processo de descoberta o termo moderno "indução" em vez de a antiga "análise" *(ibid.)*. A precedência heurística do resultado sobre o argumento, do teorema sobre a prova, tem profundas raízes no folclore matemático. Citemos algumas variações sobre um tema conhecido: Diz-se que Crísipo escreveu a Eleantes: "Mande-me um teorema e lhe acharei as provas" (cf. Diógenes Laércio [c.200], VII. 179). Diz-se

3. *Crítica da Prova Mediante Contra-Exemplos Locais, Mas não Globais*

PROFESSOR: Esta decomposição da conjectura sugerida pela prova abre novas perspectivas para testagem. A decomposição desdobra a conjectura numa frente mais ampla, de modo que a nossa crítica tem mais alvos. Temos agora pelo menos três oportunidades para contra-exemplos em vez de apenas uma!

GAMA: Já exprimi meu desacordo quanto ao seu terceiro lema (isto é, que ao retirarmos triângulos da rede que resultou do esticamento e subseqüente triangulação, temos apenas duas possibilidades: retiramos uma aresta ou retiramos duas arestas e um vértice). Suspeito que possam surgir outros padrões quando retirarmos um triângulo.

PROFESSOR: Suspeita não é crítica.

GAMA: E *contra-exemplo*, por acaso, é crítica?

PROFESSOR: Certamente. As conjecturas desprezam desaprovação e suspeita, mas não podem ignorar contra-exemplos.

TETA (à parte): As conjecturas são obviamente muito diferentes daqueles que as representam.

GAMA: Proponho um contra-exemplo trivial. Tomemos a estrutura triangular resultante da execução das duas primeiras operações num cubo (fig. 2). Ora, se retirarmos um triângulo de *dentro* dessa estrutura, como poderíamos retirar uma peça num jogo de quebra-cabeça, retiro um triângulo sem retirar uma única aresta ou um

---

que Gauss reclamava: "Há muito tempo tenho meus resultados; mas não sei ainda como devo chegar a eles" (cf. Arber [1945], p. 47), e Riemann: "Se eu tivesse só teoremas! Bem facilmente então eu acharia as provas". (Cf. Hölder [1924], p. 487). Pólya acentua: "Tem-se que supor um teorema matemático antes de prová-lo" ([1954], vol. 1, p. vi). guess (adivinhar)

O termo "semi-experimento" é tirado do citado sumário editorial de Euler [1753]. De acordo com o editor: "Como devemos referir os números puramente ao intelecto, dificilmente podemos compreender como observações e semi-experimentos podem ser de valor na investigação da natureza dos números. Contudo, de fato, como mostrarei com muito boas razões, as propriedades dos números conhecidas hoje foram descobertas, na maioria, pela observação..." (Tradução de Pólya; em seu [1954], I, p. 3 ele equivocadamente atribui a citação a Euler).

quasi-experiment

vértice. Assim, o terceiro lema é falso — e não apenas no caso do cubo, mas para *todos* os poliedros, exceto o tetraedro, na estrutura plana da qual todos os triângulos são limites de triângulos. Sua prova, professor, comprova o teorema de Euler para o tetraedro. Mas já *sabíamos* que $V - A + F = 2$ para o tetraedro, então que é que ela comprova?

PROFESSOR: Você tem razão. Mas observe que o cubo que serve de contra-exemplo para o terceiro lema não é também contra-exemplo para a conjectura principal, visto que para o cubo $V - A + F = 2$. Você demonstrou a pobreza do argumento — a prova — mas não a falsidade de nossa conjectura.

ALFA: Nesse caso, o senhor despreza a sua prova?

PROFESSOR: De modo algum. Crítica não significa necessariamente destruição. Aperfeiçoarei minha prova, de modo a que ela suporte a crítica.

GAMA: De que modo?

PROFESSOR: Antes de mostrar de que modo, permitam-me que introduza a seguinte terminologia. Chamarei de "*contra-exemplo local*" aquele que refutar um lema (sem necessariamente refutar a conjectura principal), e chamarei de "*contra-exemplo global*" aquele que refutar a própria conjectura principal. Assim, o seu contra-exemplo é local, mas não global. Um contra-exemplo local, porém, não global é crítica da prova, mas não da conjectura.

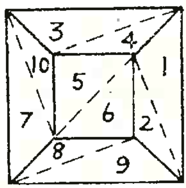


Fig. 4

GAMA: Assim sendo, a conjectura pode ser verdadeira, mas a sua prova não serve para ela.

PROFESSOR: Mas eu posso, facilmente, elaborar, e *melhorar a prova*, substituindo o lema falso por um outro ligeiramente modificado, que o seu contra-exemplo não refutará. Não mais discuto que *a retirada de qualquer triângulo segue um dos dois padrões mencionados*, mas que, *em cada fase da operação de retirada a remoção de qualquer triângulo limítrofe segue um desses padrões.* Voltando à minha experiência mental, tudo o que temos a fazer é inserir uma única palavra no terceiro passo, isto é, que "da estrutura triangulada retiramos agora os triângulos *limítrofes* um a um". Você concordará em que foi preciso apenas uma insignificante observação para corrigir a prova. [8]

GAMA: Não acho que sua observação tenha sido tão insignificante; de fato, ela foi muito engenhosa. Para esclarecer isso, mostrarei que ela é falsa. Tomemos de novo a estrutura plana do cubo e retiremos oito dos dez triângulos na ordem dada na fig. 4. Na remoção do oitavo triângulo, que é certamente um triângulo limítrofe, retiramos duas arestas e nenhum vértice — o que altera $V - A + F$ em 1. E ficamos com os dois triângulos 9 e 10 desligados.

PROFESSOR: Bem, eu poderia salvar minha posição dizendo que eu queria dizer por triângulo limítrofe aquele cuja retirada não desmonta a estrutura. Mas a honestidade intelectual me impede de fazer modificação sub-reptícia em minha posição mediante sentenças iniciadas com "eu queria dizer...". De modo que admito agora que devo *substituir* a segunda versão da operação de retirada de triângulo por uma terceira versão: que retiramos os triângulos um a um de modo a que não se altere $V - A + F$.

KAPA: De bom grado, concordo em que o lema correspondente a esta operação é verdadeiro, a saber, se retirarmos os triângulos um a um de modo que $V - A + F$ não se altere, então $V - A + F$ não se altera.

PROFESSOR: Não. O lema é que os triângulos em nossa estrutura podem ser de tal modo numerados que, ao retirá-los na ordem certa, $V - A + F$ não se alterará até que atinjamos o último triângulo.

KAPA: Mas como se construiria esta ordem certa, se acaso ela existe? [9] Sua primeira experiência mental deu a ins-

---

[8] Lhulier, ao corrigir de modo semelhante a prova de Euler, diz que ele fez apenas uma "mínima observação" ([1812-13*a*], p. 179). O próprio Euler, contudo, desistiu da prova, visto que notou a dificuldade mas não pôde fazer aquela "mínima observação".

[9] Cauchy pensava que a instrução para achar em cada estágio um triângulo que possa ser retirado ou pela retirada de duas arestas

trução: retirar os triângulos em qualquer ordem. Sua experiência mental modificada deu a instrução: retirar triângulos limítrofes em qualquer ordem. Agora o senhor diz que temos de seguir uma ordem determinada, mas o senhor não diz qual seja a ordem, nem se ela acaso existe. Assim, sua experiência mental cai por terra. O senhor melhorou a análise da prova, isto é, a lista de lemas; mas a experiência mental que o senhor chamou de "prova" desapareceu.

RO: Só o terceiro passo desapareceu.

KAPA: Além disso, o senhor terá *melhorado* o lema? As suas duas primeiras versões simples pelo menos pareciam trivialmente verdadeiras antes de refutadas; mas a versão extensa, remendada, nem mesmo parece plausível. O senhor acredita realmente que ela resiste à refutação?

PROFESSOR: Proposições "plausíveis" ou mesmo "trivialmente verdadeiras" em geral são prontamente refutadas: conjecturas complicadas, implausíveis, amadurecidas na crítica, podem atingir a verdade.

ÔMEGA: E que acontece mesmo que suas "conjecturas complicadas" forem falseadas e então o senhor não puder substituí-las por outras não falseadas? Ou então, se o senhor *não* conseguir melhorar mais o argumento por remendo local? O senhor teve êxito no caso de um contra-exemplo local que não era global ao substituir o lema refutado. Mas que acontece se o senhor não tiver êxito na próxima vez?

PROFESSOR: Boa questão. Anotarei para tratarmos dela amanhã.

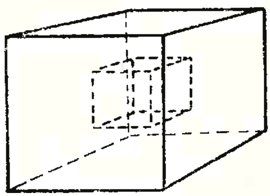


Fig. 5

e um vértice ou uma aresta pode ser trivialmente executada para qualquer poliedro [1813*a*], p. 79). Isto se relaciona com a incapacidade de imaginar um poliedro que não seja homeomórfico com a esfera.

4. *Crítica da Conjectura Mediante Contra-Exemplos Globais*

ALFA: Tenho um contra-exemplo que falseará seu primeiro lema — mas se trata também de contra-exemplo para a conjectura principal, isto é, será também um contra-exemplo global.

PROFESSOR: Ora bem! Muito interessante. Vejamo-lo.

ALFA: Imaginemos um sólido determinado por um par de cubos — par de cubos, um dos quais incluso no outro, mas que não toca o outro (fig. 5). O cubo oco falseia o seu primeiro lema, porque, ao retirar uma face do cubo interno, o poliedro não será extensível num plano. Nem adianta retirarmos uma face do cubo externo. Além disso, para cada cubo $V - A + F = 2$, de modo que para o cubo oco $V - A + F = 4$.

PROFESSOR: Boa demonstração. Chamemo-la *Contra-exemplo 1.*[10] E daí?

(*a*) *Rejeição da conjectura. Método da rendição.*

GAMA: Professor, a sua tranqüilidade me deixa perplexo. Um único contra-exemplo refuta uma conjectura tanto quanto dez. A conjectura e sua prova falharam completamente. Mãos ao alto! O senhor tem que se render. Jogue fora a falsa conjectura, esqueça-a e tente um enfoque radicalmente novo.

PROFESSOR: Concordo com você em que a *conjectura* recebeu severa crítica pelo contra-exemplo de Alfa. Mas é falso que a *prova* tenha "*falhado completamente*". Se, por ora, você concordar com minha primeira proposta no sentido de empregar a palavra "prova" com referência a uma "experiência mental que leve à decomposição da

---

10 Esse contra-exemplo 1 foi notado pela primeira vez por Lhulier ([1812:13*a*], p. 194). Mas o editor Gergonne acrescentou (p. 186) que ele mesmo notara isso muito antes do ensaio de Lhulier. Não é o caso de Cauchy, que publicou sua prova um ano antes. E esse contra-exemplo seria redescoberto vinte anos mais tarde por Hessel ([1832], p. 16). Tanto Lhulier como Hessel foram levados à sua descoberta por coleções minerais nas quais notaram alguns cristais duplos, em que o cristal interno não é translúcido, mas o externo sim. Lhulier reconhece o estímulo da coleção de cristal de seu professor e amigo Pictet ([1812-13*a*], p. 188). Hessel refere-se a cubos de sulfureto de chumbo contidos em cristais de floreto de cálcio translúcidos ([1832], p. 16).

conjectura original em subconjecturas", em vez de empregá-la no sentido de "garantia de verdade certa", não deve tirar essa conclusão. Minha prova, com certeza, comprova a conjectura de Euler no primeiro sentido, mas não necessariamente no segundo. Você está interessado apenas em provas que "provem" o que pretendemos provar. Estou interessado em provas mesmo que elas não realizem a tarefa pretendida. Colombo não chegou à Índia, mas descobriu coisa muito interessante.

ALFA: De acordo com sua filosofia, então — embora um contra-exemplo local (se não global ao mesmo tempo) seja crítica da prova, mas não da conjectura — um contra-exemplo global é crítica da conjectura, mas não necessariamente da prova. O senhor concorda em render-se quanto à conjectura, mas defende a prova. Mas se a conjectura é falsa, que é neste mundo que prova a prova?

GAMA: Sua analogia com Colombo desmorona. Aceitar um contra-exemplo global deve significar rendição total.

(b) *Rejeição do contra-exemplo. O método do antimonstro*

DELTA: Mas por que aceitar o contra-exemplo? Provamos nossa conjectura — ela é agora um teorema. Admito que ela se choca com o chamado "contra-exemplo". Temos que nos desfazer de um dos dois. Mas por que nos desfazermos do teorema se ele foi comprovado? É a "crítica" que tem de ser banida. É falsa crítica. Este par de cubos, um dentro do outro, não é absolutamente um poliedro. É um *monstro*, um caso patológico, e não um contra-exemplo.

GAMA: Por que não? *Poliedro é um sólido cuja superfície consiste de faces poligonais.* E meu contra-exemplo é um sólido determinado por faces poligonais.

PROFESSOR: Chamemos a esta definição de *Def. 1.*[11]

DELTA: Sua definição está incorreta. Um poliedro deve ser uma *superfície*: ele tem faces, arestas, vértices, pode ser deformado, estendido num quadro-negro, e nada tem

11 A *Definição* 1 ocorre pela primeira vez no século XVIII; p. ex. "Dá-se o nome de sólido poliedral, ou simplesmente poliedro, a qualquer sólido ligado por planos ou faces planas" (Legendre [1809], p. 160). Definição semelhante é dada por Euler ([1758*a*]. Euclides, embora definindo cubo, octaedro, pirâmide, prisma, não define o termo genérico poliedro, mas às vezes o emprega (p. ex. Livro XII, Segundo Problema, Prop. 17).

a ver com o conceito de "sólido". *Poliedro é uma superfície que consiste de um sistema de polígonos.*

PROFESSOR: Chame a isso de *Def. 2.*[12]

DELTA: Desse modo, o senhor realmente nos mostrou *dois* poliedros — *duas* superfícies, uma completamente dentro da outra. Uma mulher com o filho no útero não é contra-exemplo da tese de que os seres humanos têm uma cabeça.

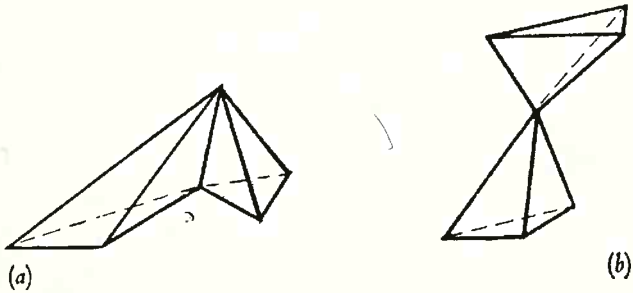


Fig. 6

ALFA: Ora pois! Meu contra-exemplo gerou novo conceito de poliedro. Ou você tem coragem de afirmar que por poliedro você *sempre* entendeu uma superfície?

PROFESSOR: Por ora, aceitemos a *Def.* 2 de Delta. Você pode agora refutar nossa conjectura se por poliedro entendemos uma superfície?

ALFA: Certamente. Tomemos dois tetraedros que tenham uma aresta em comum (fig. 6 (*a*)). Ou, tomemos dois tetraedros que tenham um vértice em comum (fig. 6 (*b*)). Ambos esses gêmeos estão ligados, ambos constituem uma

12 Encontramos a *Definição* 2 implicitamente em um dos ensaios de Jonquières lidos na Academia Francesa contra os que pretendiam refutar o teorema de Euler. Esses ensaios são um tesouro de técnicas anti-monstro. Ele troveja contra o monstruoso par de cubos encaixados de Lhulier: "Esse sistema não é realmente um poliedro, mas um par de poliedros distintos, cada qual independente do outro... Poliedro, pelo menos do ponto de vista clássico, só merece o nome se, antes de tudo o mais, um ponto puder mover-se continuamente sobre toda a sua superfície; não é o caso aqui... Essas primeiras exceções de Lhulier podem, portanto, ser descartadas" ([1890*b*], p. 170). Essa definição — comparada com a *Definição* 1 — é muito bem aceita por topologistas analíticos, que não estão absolutamente interessados na teoria dos poliedros como tais, mas apenas como auxiliares da teoria das superfícies.

única superfície. E vocês podem conferir que para ambos $V - A + F = 3$.

PROFESSOR: *Contra-Exemplos 2a e 2b.*[13]

DELTA: Causa-me admiração sua imaginação doentia, mas é claro que eu não quis dizer que *qualquer* sistema de polígonos seja um poliedro. Por poliedro entendo um *sistema de polígonos dispostos de tal modo que (1) exatamente dois polígonos se encontrem em cada aresta e (2) seja possível ir de dentro de qualquer polígono para o interior de qualquer outro polígono por uma via que jamais cruza qualquer aresta num vértice.* Os seus dois primeiros gêmeos serão excluídos pelo primeiro critério em minha definição, e os segundos gêmeos pelo segundo critério.

PROFESSOR: *Def. 3.*[14]

ALFA: Admira-me sua patológica habilidade em inventar uma definição após outra como barricadas contra a falsificação de suas idéias insignificantes. Por que não definir logo o poliedro como um sistema de polígonos que satisfaz a equação $V - A + F = 2$? Esta Definição Perfeita...

KAPA: *Def. P.*[15]

ALFA: ...liquidaria a questão de uma vez por todas. Não haveria necessidade de investigar o assunto mais a fundo.

DELTA: Mas não existe no mundo um só teorema que não possa ser falseado por monstros.

PROFESSOR: Sinto interrompê-los. Como vimos, a refutação mediante contra-exemplos depende do significado dos

---

13 Os contra-exemplos 2*a* e 2*b* foram omitidos por Lhulier e descobertos pela primeira vez por Hessel ([1832], p. 13).

14 A *Definição* 3 surge pela primeira vez para impedir tetraedros gêmeos em Möbius ([1865], p. 32). Encontramos essa perturbadora definição reproduzida em alguns manuais modernos do modo usual autoritário do "acredite se quiser"; a história passada desse antimonstro — que pelo menos o explicaria — não é contada (p. ex. Hilbert e Cohn-Vossen [1956], p. 290).

15 A *Definição P*, de acordo com a qual a eulerianidade seria uma característica definicional de poliedros, foi pela primeira vez sugerida de fato por R. Baltzer: "Os poliedros comuns são de fato chamados (segundo Hessel) de poliedros eulerianos. Seria mais adequado achar um nome especial para poliedros não autênticos *(uneigentliche)*" ([1862] vol. 2, p. 207). A referência a Hessel é infeliz: Hessel empregava o termo "euleriano" simplesmente como abreviação para poliedros para os quais a relação de Euler vale, distinguindo-se poliedros não-eulerianos ([1832], p. 19). Para *Def. P* veja-se também a citação de Schläfli na nota seguinte.

termos em questão. Se um contra-exemplo tiver que ser crítica objetiva, temos de concordar com o significado dos nossos termos. *Podemos* chegar a tal acordo ao definir o termo onde a comunicação falhar. Quanto a mim, não defini "poliedro". Presumi a *familiaridade* com o conceito, isto é, a capacidade de distinguir alguma coisa que é um poliedro de uma coisa que não é poliedro — o que alguns lógicos chamam de conhecimento da extensão do conceito de poliedro. Aconteceu que a extensão do conceito não era totalmente óbvia: *as definições são freqüentemente propostas e discutidas quando surgem contra-exemplos.* Sugiro que agora consideremos as definições rivais juntas, e deixemos para depois a discussão das diferenças nos resultados que se seguirão da escolha de diferentes definições. Alguém poderá oferecer algo que mesmo a definição mais restritiva permita como verdadeiro contra-exemplo?

KAPA: Inclusive *Def. P*?

PROFESSOR: Excetuando *Def. P.*

urchin

GAMA: Posso. Consideremos este *Contra-Exemplo 3*: um poliedro estrelado — a que chamarei de *ouriçocacheiro* (fig. 7). Consiste de 12 pentágonos em estrela (fig. 8). Tem 12 vértices, 30 arestas e 12 faces pentagonais — o que se pode conferir por contagem. Desse modo, a tese de Descartes-Euler não é verdadeira absolutamente, visto que para este poliedro $V - A + F = -6$. [16]

DELTA: Por que você pensa que o seu "ouriçocacheiro" é um poliedro?

GAMA: Então, você não percebe? Trata-se de um poliedro cujas faces são doze pentágonos estelados. Ele satisfaz à nossa última definição: é um "sistema de polígonos dispostos de modo que (1) com exatidão dois polígonos

---

16 O "ouriço" foi pela primeira vez discutido por Kepler em sua teoria cosmológica ([1619], Lib. II, XIX e XXVI, na p. 72 e 82-3 e Lib. V, Cap. I, p. 293, Cap. III, p. 299 4 Cap. IX, XLVII). O nome de "ouriçocacheiro" é dado por Kepler (*"cui nomen Echino feci"*). A fig. 7 é copiada de seu livro (p. 79) que contém também outra imagem na p. 293. Independentemente, Poinsot redescobriu-a e foi ele quem observou que a fórmula de Euler não se aplicava a ele ([1810], p. 48). O termo agora padronizado "dodecaedro estelado pequeno" é de Cayley ([1859], p. 125). Schläfli admitia poliedros estelados em geral, no entanto rejeitava nosso dodecaedro estelado pequeno como um monstro. De acordo com ele, "não se trata de autêntico poliedro, porque não satisfaz a condição $V - A + F = 2$" ([1852] § 34).

se encontrem em cada aresta, e (2) é possível ir de cada polígono a cada outro polígono sem jamais cruzar um vértice do poliedro".

DELTA: Mas então você nem mesmo sabe o que vem a ser um polígono! *Polígono é um sistema de arestas dispostas de modo que (1) duas arestas se encontrem exatamente em cada vértice, e (2) as arestas não têm absolutamente pontos em comum, exceto os vértices.*

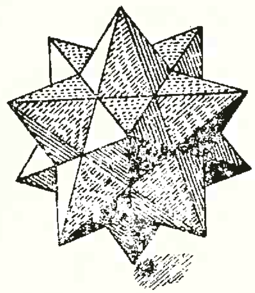


Fig. 7

Poliedro estelado de Kepler em que cada face é sombreada de modo diferente a fim de mostrar quais os triângulos que pertencem à mesma face pentagonal.

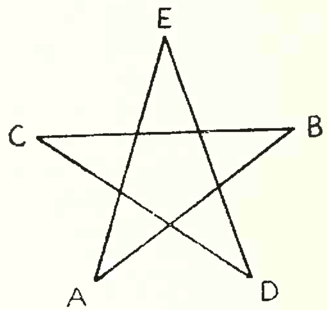


Fig. 8

PROFESSOR: Chamemos a isto de *Def. 4.*

GAMA: Não vejo por que você inclui a segunda cláusula. A definição correta de polígono deve conter apenas a primeira cláusula.

PROFESSOR: *Def. 4'.*

GAMA: A segunda cláusula nada tem a ver com a essência de um polígono. Veja bem: se eu levanto qualquer aresta um pouco, o pentágono estelado é já um polígono mesmo no sentido que você lhe dá. Você imagina o polígono desenhado a giz no quadro-negro, mas você deve imaginá-lo como uma estrutura em madeira: então fica claro que aquilo que você pensa ser um ponto em comum não é realmente um ponto, mas dois pontos diferentes, um acima do outro. Você está iludido por encaixar o polígono num plano — você deve esticar os membros dele no espaço! [17]

DELTA: Você se importa em me dizer qual é a *área* de um pentágono estelado? Ou você diria que alguns polígonos não têm área?

GAMA: Não foi você mesmo quem disse que um poliedro nada tem a ver com a idéia de solidez? Por que agora sugere que a idéia de polígono deva estar ligada à idéia de área? Concordamos em que o poliedro é uma superfície fechada com arestas e vértices — então por que não concordar em que o polígono é simplesmente uma curva fechada com vértices? Mas se você insiste na sua idéia, estou disposto a definir a área de um polígono estelado. [18]

---

[17] A disputa quanto a se o polígono deve ser definido de modo a incluir polígonos estelados ou não *(Def. 4* ou *Def. 4')* é muito antiga. O argumento exposto em nosso diálogo — que os polígonos estelados se tornam comuns quando metidos num espaço de mais elevadas dimensões — é um argumento topológico moderno, mas muitos outros podem ser expostos. Assim é que Poinset, ao defender os polígonos estelados argumentava com razões tiradas da geometria analítica: "... todas essas distinções (entre polígonos estelados e polígonos comuns) são mais aparentes do que reais, e desaparecem completamente no tratamento analítico, no qual as diversas espécies de polígonos são perfeitamente inseparáveis. À aresta de um polígono regular corresponde uma equação com raízes reais, que simultaneamente produz as arestas de todos os polígonos regulares da mesma ordem. Assim, não é possível obter as arestas de um heptágono regular inscrito, sem, ao mesmo tempo, achar arestas de heptágonos da segunda e terceira espécies. Inversamente, dada a aresta de um heptágono regular, pode-se determinar o raio do círculo no qual ele pode ser inscrito, mas ao fazê-lo, encontraremos três diferentes círculos correspondentes às três espécies de heptágonos que podem ser construídos em dada aresta; igualmente para outros polígonos. Assim, temos razão em dar o nome de 'polígono' a essas novas figuras esteladas" ([1810], p. 26). Schröder emprega o argumento hankeliano: "A extensão a frações racionais do conceito ~~força~~ de potência originariamente associado apenas com números inteiros foi muito fecunda em álgebra; isso sugere que tentemos fazer a mesma coisa em geometria sempre que a oportunidade se apresente..." ([1862], p. 56). Em seguida mostra que podemos achar uma interpretação geométrica para o conceito de polígonos de p/q lados nos polígonos estelados.

[18] A alegação de Gama de que pode definir a área de polígonos estelados não é engodo. Alguns dos que defenderam o conceito mais amplo de polígono resolveram o problema expondo um conceito mais amplo de área poligonal. Há um modo bastante óbvio de fazer isso no caso de polígonos estelados. Podemos tomar a área de um polígono como a soma das áreas dos triângulos isósceles que unem o centro do círculo inscrito ou circunscrito aos lados. Nesse caso, é claro, algumas "porções" do polígono estelado serão contadas mais

PROFESSOR: Deixemos essa discussão por um momento, e continuemos como antes. Consideremos as duas últimas definições juntas — *Def. 4* e *Def. 4'*. Alguém poderá dar contra-exemplo para a nossa conjectura, que satisfaça a *ambas* as definições de polígonos?

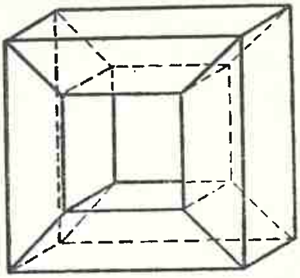


Fig. 9

moldura

ALFA: Tenho um. Consideremos uma ***estrutura-imagem*** como esta (fig. 9). Trata-se de um poliedro de acordo com quaisquer das definições até aqui propostas. Não obstante, vocês descobrirão, ao contar os vértices, arestas e faces, que $V - A + F = 0$.

PROFESSOR: *Contra-exemplo 4.* [19]

BETA ~~ALFA:~~ Isso significa que é o fim de nossa conjectura. É realmente uma pena, porque ela satisfazia a tantos casos. Mas parece que perdemos nosso tempo.

ALFA: Delta, estou espantado. Você não diz nada? Você não pode definir este novo contra-exemplo fora da existência? Eu pensava que não havia hipótese alguma no mundo que você não pudesse livrar de falseamento com

---

de uma vez. No caso de polígonos irregulares em que não obtivemos um ponto distinto, podemos ainda tomar qualquer ponto como origem e tratar triângulos negativamente orientados como tendo áreas negativas (Meister [1771], p. 179). Surge — e isso pode certamente ser esperado como uma "área" — que a área assim definida não dependerá da escolha da origem (Möbius [1827], p. 218). É claro que está em aberto a questão com os que pensam ter-se razão em chamar o número produzido por esse cálculo uma "área"; embora os defensores da definição Meister-Möbius a chamassem "A definição certa", "única cientificamente fundamentada" (R. Haussner [1906], pp. 114-15). O essencialismo tem sido um aspecto permanente das disputas definicionais.

[19] Encontramos o contra-exemplo 4 também no clássico de Lhulier [1812-13*a*], à p. 185 — e Gergonne também acrescentou que o conhecia. Mas Grunert não o conhecia catorze anos mais tarde ([1827], nem Poinset o conhecia quarenta e cinco anos depois ([1858], p. 67).

um apropriado truque lingüístico. Rende-se agora? Concorda, finalmente, em que ~~não~~ existem poliedros não-eulerianos? É incrível!

DELTA: Você deve realmente achar um nome mais apropriado para as suas pragas não-eulerianas e não nos enganar a todos chamando-os de "poliedros". Mas estou, aos poucos, perdendo interesse em seus monstros. Estou desgostando de seus lamentáveis "poliedros", para os quais o belo teorema de Euler não se aplica.[20] Eu procuro ordem e harmonia na matemática, mas você apenas propaga anarquia e caos.[21] Nossas atitudes são irreconciliáveis.

Conservador

ALFA: O que você é, é um tóri fora de moda! Você culpa a maldição dos anarquistas por prejudicar sua "ordem" e "harmonia", e "resolve" as dificuldades mediante recomendações verbais.

PROFESSOR: Ouçamos a mais recente definição salvadora.

ALFA: O senhor quer dizer o mais recente truque lingüístico, a mais recente redução do conceito de "poliedro"! Delta dissolve problemas reais em vez de solucioná-los.

DELTA: Eu não *reduzo* conceitos. Você é que os *amplia*. Por exemplo, essa estrutura-imagem não é absolutamente um poliedro autêntico.

ALFA: Por quê?

DELTA: Tome um ponto arbitrário no "túnel" — espaço determinado pela estrutura. Estenda um plano através desse ponto. Você verá que qualquer plano desses tem sempre *dois* diferentes cortes transversais, o que determina na estrutura-imagem dois polígonos distintos, completamente desligados um do outro! (fig. 10).

ALFA: E daí?

---

20 Trata-se de paráfrase de uma carta do escrito de Hermite a Stieltjes: "Afasto-me com um frêmito de horror dessa lastimável praga de funções que não têm derivadas" ([1893]).

21 "Pesquisas que lidam com... funções violando leis que se esperavam universais, foram consideradas quase como a propagação da anarquia e caos onde gerações passadas procuraram ordem e harmonia" (Saks [1933], Prefácio). Saks menciona aqui as batalhas febris entre antimonstros (como Hermite!) e refutacionistas que caracterizaram nas últimas décadas do século XIX (e de fato princípios do século XX) o desenvolvimento da moderna teoria da função real, "o ramo da matemática que trata dos contra-exemplos" (Munroe [1953], Prefácio). A batalha igualmente feroz que grassou entre os oponentes e protagonistas da lógica matemática moderna e teoria dos conjuntos foi uma continuação direta disso. Vejam-se também notas 24 e 25.

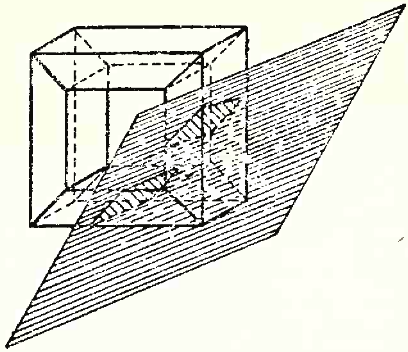
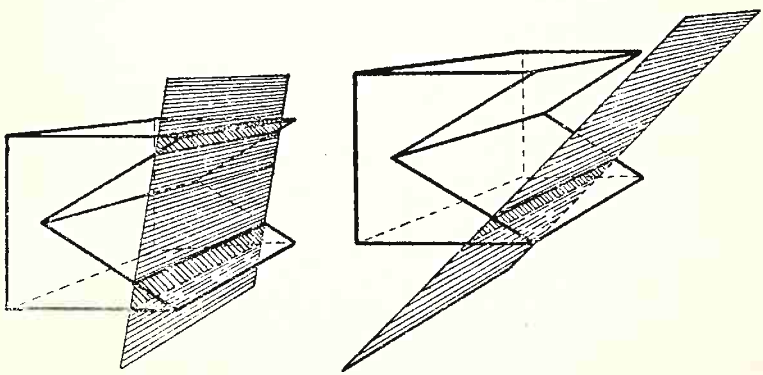


Fig. 10

DELTA: *No caso de um poliedro autêntico, através de qualquer ponto arbitrário no espaço haverá pelo menos um plano cujo corte transversal com o poliedro consistirá de um único polígono.* No caso dos poliedros convexos, *todos* os planos satisfarão essa exigência, onde quer que tomemos o ponto. No caso dos poliedros côncavos *comuns*, alguns planos terão mais interseções, mas sempre haverá alguns que tenham apenas uma (fig. 11, (*a*) e (*b*)). No caso dessa estrutura-imagem, se tomarmos o ponto no túnel, todos os planos terão dois cortes transversais. Como, então, você pode chamar isto de um poliedro?

Fig. 11



(*a*) (*b*)

PROFESSOR: Esta parece outra definição, desta vez definição *implícita*. Chamemo-la de *Def. 5.*[22]

ALFA: Uma série de contra-exemplos, uma série de definições conflitantes, definições que não pretendem conter coisa alguma de novo, mas ser apenas novas revelações da riqueza de um antigo conceito, que parece ter tantas cláusulas "ocultas" quantos contra-exemplos há. *Para todos os poliedros* $V - A + F = 2$ parece inabalável, uma antiga verdade "eterna". É curioso pensar que certa vez existiu uma hipótese maravilhosa, cheia de desafio e emoção. Agora, devido às mágicas mudanças de sentido que vocês estão fazendo, ela se converteu numa convenção pobre, uma espécie de dogma desprezível. (*Deixa a sala de aula*).

DELTA: Não posso compreender como um jovem competente como Alfa pode desperdiçar seu talento apenas com apartes fora de propósito. Ele parece grávido na gestação de monstruosidades. Mas as monstruosidades nunca vão à frente, nem no mundo natural nem no mundo do pensamento. A evolução sempre segue um padrão harmonioso e ordenado.

GAMA: Os geneticistas podem facilmente refutar o que você disse. Você não ouviu dizer que as mutações que produzem monstruosidades desempenham papel considerável na macroevolução? Eles chamam esses monstros mutantes de "monstros esperançosos". Parece-me que os contra-exemplos de Alfa, embora monstros, são "monstros esperançosos".[23]

---

22 A *Definição 5* foi exposta pelo incansável antimonstro E. de Jonquières para excluir o poliedro com um túnel de Lhuilier (estrutura-imagem): "Nem esse complexo poliedral é um verdadeiro poliedro no sentido comum da palavra, porque se tomamos qualquer plano através de um ponto arbitrário dentro de um dos túneis que passam diretamente através do sólido, o corte transversal resultante será composto de dois polígonos distintos completamente desligados um do outro; isso pode ocorrer com poliedros comuns para certas posições do plano de interseção, isto é, no caso de alguns poliedros côncavos, mas não para todos eles" ([1890*b*], pp. 170-1). Fica-se imaginando se Jonquières observou que essa sua *Definição 5* exclui também alguns poliedros esferóides côncavos.

23 Não devemos esquecer que aquilo que hoje aparece como um monstro será amanhã a origem de uma linha de adaptação especial... Realcei ainda mais a importância de mutações raras, mas extremamente plenas de conseqüências afetando índices de processos embriônicos decisivos que poderiam ensejar o que se pode denominar

DELTA: Seja como for, Alfa abandonou a luta. Não teremos monstros agora.

GAMA: Eu tenho um novo monstro. Ele satisfaz a todas as restrições nas Def. 1, 2, 3, 4 e 5, mas $V - A + F = 1$. Este *Contra-exemplo 5* é um simples cilindro. Ele tem três faces (o topo, o fundo e o rolo), 2 arestas (dois círculos) e nenhum vértice. É um poliedro de acordo com a sua definição: (1) exatamente dois polígonos em cada aresta e (2) é possível ir de dentro de qualquer polígono ao interior de qualquer outro polígono por uma via que jamais cruza uma aresta num vértice. E você tem que aceitar as faces como polígonos autênticos, visto que satisfazem as suas exigências: (1) exatamente duas arestas encontram-se em cada vértice e (2) as arestas não têm quaisquer pontos em comum, exceto os vértices.

DELTA: Alfa esticava conceitos, mas você os rasga! Suas "arestas" não são arestas! *Uma aresta tem dois vértices*!

PROFESSOR: *Def. 6*?

GAMA: Mas por que negar *status* de "aresta" a arestas com um ou possivelmente nenhum vértice? Você costumava contrair conceitos, mas agora você os mutila a tal ponto que quase nada sobra!

DELTA: Mas você não percebe a futilidade dessas chamadas refutações? "Até agora, quando um novo poliedro era inventado, era para algum fim prático; hoje, eles são inventados expressamente para descobrir falhas nos raciocínios de nossos antepassados, e nada se obterá deles mais do que isso. Nosso assunto virou um museu de horrores onde um poliedro normal comum pode ficar feliz se lhes destinarem um cantinho obscuro." [24]

---

monstros esperançosos, monstros que dariam início a uma nova linha evolucionária se adaptados em algum nicho ambiental vazio". (Goldschmidt [1933], pp. 544 e 547). Minha atenção foi chamada para esse ensaio por Karl Popper.

24 Paráfrase de Poincaré ([1908], pp. 131-2). O texto original, por inteiro, é este: "A Lógica às vezes produz monstros. Há meio século temos visto surgir uma multidão de funções bizarras que tentam assemelhar-se o menos possível às funções normais que servem a algum fim. Não há mais continuidade, ou talvez continuidade, mas não derivadas etc. Além do mais, desse ponto de vista lógico, essas estranhas funções é que são as mais gerais, e aquelas que se espera encontrar sem procurar não mais aparecem a não ser como caso especial. Resta para elas um cantinho.

Até hoje, quando uma nova função era inventada, o era para algum fim prático; hoje, são inventadas expressamente para mostrar

GAMA: Acho que, se quisermos aprender alguma coisa realmente a fundo, temos que estudá-la não em sua forma "normal, regular, usual, mas em estado crítico, na febre, na paixão. Se quiserem conhecer o corpo saudável, normal, estudem-no quando anormal, quando estiver doente. Se quiserem conhecer as funções, estudem suas singularidades. Se quiserem conhecer os poliedros comuns, estudem seu aspecto louco. Assim é que se pode levar a análise matemática até o âmago da questão.[25] Mas, mesmo que basicamente você tivesse razão, não percebe a futilidade do seu método *ad hoc*? Se você quiser traçar uma linha limite entre contra-exemplos e monstros, você não pode fazê-lo aos arrancos.

PROFESSOR: Acho que devemos recusar a estratégia de Delta para tratamento dos contra-exemplos globais, embora devamos congratular-nos com ele por sua hábil execução. Poderíamos, com propriedade, rotular seu método de *método do antimonstro*. Empregando-o, podemos eliminar qualquer contra-exemplo para a conjectura original por, às vezes, hábeis redefinições do poliedro, mas sempre *ad hoc*, de seus termos definidores, ou dos termos definidores de seus termos definidores. Devemos, porém, tratar os contra-exemplos com mais respeito, e não exorcizá-los obstinadamente, alcunhando-os de monstros. O principal engano de Delta é talvez seu preconceito dogmático na interpretação da prova matemática: ele acha que uma prova necessariamente comprova o que se quer provar. Minha interpretação de prova permitirá que seja "provada" uma falsa conjectura, isto é, que seja decomposta em subconjecturas. Se a conjectura for falsa, espero certamente que pelo menos uma das subconjecturas seja falsa. Mas a decomposição pode ser ainda interessante! Não me perturbo se encontrar um contra-exemplo para uma conjectura "provada"; estou até mesmo disposto a "provar" uma falsa conjectura!

---

erros no raciocínio de nossos antepassados, e nada mais se obterá delas além disso.

Se a lógica fosse o guia exclusivo do professor, será necessário começar com as funções mais gerais, isto é, com as mais bizarras. O iniciante é que teria de se haver com esse museu teratológico..." (G. B. Halsted, Trad. autorizada, pp. 435-6). Poincaré discute o problema com respeito à situação na teoria das funções reais — mas isso não faz qualquer diferença.

[25] Paráfrase de Denjoy ([1919], p. 21).

Provai

TETA: Não acompanho você.

KAPA: Ele segue precisamente o Novo Testamento: "~~Julgai~~ todas as coisas; retende o que é bom" (I Tessalonicenses, 5:21).

(c) *Aperfeiçoamento da conjectura pelos métodos de antiexceção. Exclusões por partes. Retirada estratégica ou ação cautelosa.*

BETA: Suponho, professor, que o senhor vai explicar as suas enigmáticas observações. Mas, pedindo desculpas por minha impaciência, devo fazer um desabafo.

PROFESSOR: Prossiga.

(Alfa volta à sala de aula.)

BETA: Acho tolos alguns aspectos dos argumentos de Delta, mas chego a crer que há um núcleo sensato neles. Parece-me, agora, que nenhuma conjectura é válida de um modo geral, mas válida apenas em certo domínio restrito que exclui as *exceções*. Sou contra apelidá-las de "monstros" ou "casos patológicos". Isto equivaleria à decisão metodológica de não considerar esses interessantes *exemplos* no devido lugar, dignos de um estudo especial. Mas também sou contra o termo "contra-exemplo"; é de se admiti-los como exemplos em igualdade de condições com os exemplos de apoio, mas de certo modo os pintam com cores sombrias, de modo que, como Gama, entra-se em pânico ao enfrentá-los, e se é tentado a desistir de todas as provas belas e habilidosas. Não. Eles são apenas *exceções*.

SIGMA: Eu também sou dessa opinião. O termo "contra-exemplo" tem certo quê agressivo e ofende a quem inventou as provas. "Exceção" é o termo correto. "Há três espécies de proposições matemáticas:

1. Aquelas que são sempre verdadeiras e às quais não há restrições nem exceções. Por exemplo, a soma dos ângulos de todos os triângulos planos é sempre igual a dois ângulos retos.

2. Aquelas que repousam em algum princípio falso, e portanto não podem ser admitidas de modo algum.

3. Aquelas que, embora girem em torno de princípios verdadeiros, admitem restrições ou exceções em certos casos..."

ÉPSILON: Quê?

SIGMA: "...Não se deve confundir falsos teoremas com teoremas sujeitos a certa restrição."[26] Diz o provérbio: *A exceção confirma a regra.*

ÉPSILON (dirigindo-se a KAPA): Quem é esse maluco? Ele devia aprender um pouco de lógica.

KAPA (a ÉPSILON): E sobre triângulos planos não-euclidianos.

DELTA: Acho embaraçoso ter que prever que nesta discussão Alfa e eu deveremos provavelmente estar do mesmo lado. Ambos argumentamos com base na verdade ou falsidade de uma proposição e discordamos apenas quanto a se o teorema de Euler, em particular, é verdadeiro ou falso. Mas Sigma quer que admitamos uma terceira categoria de proposições que sejam "em princípio" verdadeiras, mas "admitam exceções em certos casos". Concordar com uma coexistência pacífica de teoremas e exceções significa lançar confusão e caos em matemática.

ALFA: *D'accord.*

ETA: Eu não pretendia interferir na brilhante argumentação de Delta, mas acho agora que seria proveitoso se eu resumidamente explicasse a história do *meu* desenvolvimento intelectual. Em meus tempos escolares, tornei-me — como você diria — um antimonstro, não como defesa contra tipos Alfa, mas como defesa contra tipos Sigma. Lembro-me de ter lido num periódico sobre o teorema de Euler: "Brilhantes matemáticos apresentaram provas da validade geral do teorema. Contudo, ele padece de exceções... é necessário chamar a atenção para essas exceções, visto que até mesmo autores modernos nem sempre reconhecem essas exceções explicitamente."[27] Esse ensaio não era um exercício isolado de diplomacia. "Embora em manuais de geometria e em conferências sempre se assinale que o belo teorema de Euler $V + F = A + 2$ seja sujeito a 'restrição', em alguns casos, ou 'não pareça vá-

---

[26] Bérard [1818-19], p. 347 e p. 349.

[27] Hessel [1832], p. 13. Hessel redescobriu as exceções de Lhulier em 1832. Logo depois de submeter seu manuscrito ele se encontrou ao acaso com Lhulier [1812-13*a*]. Decidiu, porém, não retirar o ensaio, a maioria de cujos resultados já tinha sido publicada, pois ele pensava que a questão havia sido tratada por "recentes autores" que ignoravam aquelas exceções. Por acaso, aliás, um dos autores vinha a ser o Redator do jornal ao qual Hessel submetera o ensaio: A. L. Crelle. Em seu manual [1826-7] ele "provava" que o teorema de Euler era verdadeiro para *todos* os poliedros (vol. 2, pp. 668-71).

lido', não se aprende a verdadeira razão dessas exceções." [28] Ora, examinei as "exceções" muito cuidadosamente e cheguei à conclusão de que elas não satisfazem à verdadeira definição das entidades em questão. De modo que a prova e o teorema podem ser restabelecidos, e a caótica coexistência dos teoremas e exceções desaparece.

ALFA: A caótica posição de Sigma pode servir como explicação para a sua atitude antimonstro, mas não como uma escusa, quanto mais uma justificativa. Por que não eliminar o caos, aceitando as credenciais do contra-exemplo e rejeitando o "teorema" e a "prova"?

ETA: Por que devo rejeitar a prova? Nada vejo de errado nela. Você vê? Minha posição antimonstro parece-me mais racional do que sua recusa da prova.

PROFESSOR: Este debate mostrou que o ser antimonstro pode obter audiência mais solidária quando procede do dilema de Eta. Mas voltemos a Beta e Sigma. Foi Beta quem batizou as exceções com o nome de contra-exemplos. Sigma concordou com Beta...

BETA: Estou satisfeito com que Sigma tenha concordado comigo, mas receio não possa concordar com ele. Há, certamente, três tipos de proposições: verdadeiras, irremediavelmente falsas e remediavelmente falsas. Este último tipo pode ser aperfeiçoado para converter-se em proposições verdadeiras, acrescentando-se uma cláusula restritiva que declare as exceções. Eu jamais "atribuo a fórmulas um domínio indeterminado de validade. Na realidade, as fórmulas, em sua maioria, só são verdadeiras se satisfeitas certas condições. Determinando essas condições e, naturalmente, fixando rigorosamente o significado dos termos que emprego, faço com que desapareça toda a incerteza." [29] Assim, como vocês percebem, não defendo qualquer espécie de coexistência pacífica entre fórmulas não confirmadas e exceções. Eu comprovo minhas fórmulas e converto-as em fórmulas *perfeitas*, como aquelas da primeira classe de Sigma. Isto significa que *aceito* o método antimonstro na medida em que sirva para encontrar o *domínio de validade*

---

[28] Matthiessen ([1863], p. 449). Matthiessen refere-se aqui a Heis e Eschweiler, autores de *Lehrbuch der Geometrie* e ao *Lehrbuch der Stereometrie* de Grumert. Entretanto, Matthiessen não resolve o problema — como Eta — como antimonstro, mas — como Ro — por ajustamento do monstro (Cf. nota 48).

[29] Da introdução de Cauchy ao seu célebre [1821].

da conjectura original; *rejeito-o*, na medida em que funcione como truque lingüístico para salvar "belos" teoremas mediante conceitos restritivos. Essas duas funções do método de Delta devem ser mantidas separadas. Gostaria de batizar *meu* método, que é caracterizado pela primeira dessas funções apenas, como "método antimonstro". Vou empregá-lo para determinar rigorosamente o domínio em que a conjectura de Euler prevalece.

PROFESSOR: Que vem a ser o "domínio rigorosamente determinado" dos poliedros eulerianos que você prometeu? Que é a sua "fórmula perfeita"?

BETA: *Para todos os poliedros que não têm cavidades* (*como o par de cubos encaixados*) *e túneis* (*como a estrutura imagem*), $V - A + F = 2$.

PROFESSOR: Tem certeza?

BETA: Sim, tenho certeza.

PROFESSOR: Que dizer dos tetraedros gêmeos?

BETA: Desculpe. *Para todos os poliedros que não têm cavidades, túneis ou "estrutura múltipla"*, $V - A + F = 2$.[30]

PROFESSOR: Percebo. Concordo com sua prática de melhorar a conjectura em vez de imediatamente admiti-la ou abandoná-la. Prefiro-a ao método antimonstro e ao de rendição. Não obstante, tenho duas objeções. Primeiro, afirmo que é insustentável sua alegação de que o seu método não apenas aperfeiçoa, mas "torna perfeita" a conjectura, que a "faz rigorosamente correta", que "faz desaparecerem todas as incertezas".

BETA: De fato?

---

30 Lhulier e Gergonne parecem ter estado seguros de que a lista de Lhulier enumerava todas as exceções. Lemos na introdução a essa parte do ensaio: "Facilmente nos convenceremos de que o Teorema de Euler é verdadeiro em geral, para todos os poliedros, sejam eles convexos ou não, exceto naqueles casos que serão especificados..." (Lhulier [1812-13*a*], p. 177). Depois lemos de novo no comentário de Gergonne: "... as exceções especificadas que parece serem as únicas que podem ocorrer..." (*Ibid.*, p. 188). Mas de fato Lhulier omitiu o tetraedro gêmeo, que só foi observado vinte anos depois por Hessel ([1832]). É digno de nota que alguns notáveis matemáticos, inclusive matemáticos com vivo interesse em metodologia como Gergonne, pudessem acreditar que era idôneo o método de antiexceção. A crença é semelhante à do "método de divisão" em lógica indutiva, de acordo com a qual pode haver completa enumeração de explicações possíveis de um fenômeno, e, portanto, se pudermos eliminar todas menos uma pelo método do *experimentum crucis*, então a última é comprovada.

anti-exceção ?

PROFESSOR: Você deve admitir que cada nova versão de sua conjectura é apenas uma eliminação *ad hoc* de um contra-exemplo que acabou de surgir. Quando depara com cubos encaixados, você exclui poliedros com *cavidades*. Se acontece de você observar uma estrutura-imagem, você exclui poliedros com *túneis*. Aprecio sua mente aberta e observadora; notar essas exceções é muito bom, mas acho que valeria a pena injetar algum método no seu tateio cego de "exceções". É bom admitir que "todos os poliedros são eulerianos" é apenas uma conjectura. Mas por que dar *status* de teorema que também não seja conjectural a "todos os poliedros sem cavidades, túneis e que não sejam eulerianos"? Como você pode estar certo de ter enumerado *todas* as exceções?

BETA: O senhor pode mencionar uma que eu não tenha levado em conta?

ALFA: Que é que você diz do meu ouriçocacheiro?

GAMA: E o meu cilindro?

PROFESSOR: Não preciso nem mesmo de nova "exceção" concreta para meu argumento. Meu argumento era para a *possibilidade* de outras exceções.

BETA: Talvez o senhor tenha razão. Não se deve mudar de posição toda vez que surge um contra-exemplo. Não se deve dizer: "Se não ocorrer exceção do fenômeno, a conclusão deve ser declarada de modo geral. Mas se acontecer depois que apareça qualquer exceção, a conclusão deve ser declarada à medida que ocorra." [31] Vejamos. Primeiro admitimos que para *todos* os poliedros $V - A + F = 2$, porque verificamos valer para cubos, octaedros, pirâmides e prismas. Certamente não podemos aceitar "este miserável modo de inferir do particular para o geral". [32] Não admira que surjam exceções; o surpreendente é que não as descobríssemos muito antes. A meu ver isto se deve a que nos ocupávamos excessivamente de poliedros *convexos*. Logo que outros poliedros surgiram, nossas generalizações não mais prevaleceram. [33] Assim, em vez de excluir exceções uma a uma, devemos traçar a linha limítrofe de maneira discreta, mas seguramente: Todos os poliedros convexos são eulerianos. [34] E espero que o senhor admita

In

---

[31] I. Newton [1717], p. 380.

[32] Abel [1826*a*]. Sua crítica parece dirigir-se contra o indutivismo euleriano.

[33] Isso também é parafraseado da citada carta, na qual Abel estava ocupado em eliminar as exceções aos "teoremas" gerais sobre funções

que nada há de conjectural quanto a isto: trata-se de um teorema.

GAMA: E o meu cilindro? Ele é convexo!

BETA: É uma piada!

PROFESSOR: Esqueçamos o cilindro por um momento. Podemos fazer alguma crítica mesmo sem o cilindro. Nesta nova versão modificada do método de exclusão de exceções, que Beta vislumbrou tão agilmente em resposta à minha crítica, a retirada uma a uma foi substituída por uma retirada estratégica para um domínio que se esperava seguro para a conjectura. Você está agindo com prudência. Mas estará tão a salvo quanto pensa? Você ainda não tem garantia de que não haverá exceções no interior de sua fortaleza. Além do mais, existe o perigo oposto. Você não teria excluído demasiado radicalmente, deixando numerosos poliedros eulerianos fora dos muros? Nossa conjectura original podia ter sido um exagero, mas sua tese "aperfeiçoada" parece-me muito mais uma subestimativa; no entanto, você não pode estar seguro de que também não seja um exagero.

Mas gostaria de expor também minha *segunda* objeção: o seu argumento esquece a prova; ao supor o domínio de validade da conjectura, parece que você não precisa de prova alguma. Sem dúvida, você não acredita que as provas sejam redundantes?

BETA: Nunca disse isso.

---

e com isso estabelecer rigor absoluto. O trecho original (inclusive a citação anterior) é este: "Em Análise Superior, pouquíssimas proposições são comprovadas com rigor definitivo. *Acha-se em toda parte o miserável modo de inferir do particular ao geral,* e é milagre que tal processo leve só raramente ao que são chamados paradoxos. É realmente muito interessante procurar a razão. A meu ver a razão deve encontrar-se no fato de que *os analistas têm-se ocupado sobretudo com funções que podem ser expressas como progressões geométricas. Logo que apareçam outras funções — o que, com certeza, é raramente o caso — não mais se prossegue* e até que se começa a tirar falsas conclusões, segue-se uma multidão infinita de erros, todos amparando uns aos outros..." (itálicos meus). Poinsot descobriu que generalizações indutivas "em geral" causam transtornos na teoria dos poliedros assim como na teoria dos números: "As propriedades, em maioria, são individuais e não obedecem a qualquer lei geral" ([1810], § 45). A curiosa característica dessa cautela quanto à indução é que ela diminui seu eventual transtorno ante o fato de que o universo (de fatos, números, poliedros) realmente contém milagrosas exceções.

PROFESSOR: Certo, você não disse. Mas você descobriu que nossa prova não confirmava nossa conjectura original. Confirmará sua conjectura aperfeiçoada? Responda-me.

BETA: Bem... [34]

ETA: Muito obrigado, professor, por esse argumento. O embaraço de Beta mostra claramente a superioridade do difamado método antimonstro. Porque dizemos que a prova confirma o que pretendemos provar e nossa resposta é inequívoca. Não permitimos que contra-exemplos impertinentes destruam respeitáveis provas à vontade, mesmo que estejam disfarçados como humildes "exceções".

BETA: Não acho de modo algum embaraçoso ter que elaborar, melhorar e — o senhor há de me desculpar — tornar *perfeita* minha metodologia sob o estímulo da crítica. Minha resposta é esta. Rejeito a conjectura original como falsa porque há exceções a ela. Rejeito também a prova porque as mesmas exceções são exceções pelo menos para um dos lemas. (Em sua terminologia isto equivaleria: um contra-exemplo global é necessariamente também um contra-exemplo local.) Alfa se deteria neste ponto, visto que a refutação parece satisfazer completamente suas necessidades intelectuais. Mas eu prossigo. Ao restringir adequadamente tanto a conjectura como a prova ao domínio próprio, eu torno perfeita a *conjectura* que agora será *verdadeira*, e torno perfeita a *prova* basicamente sadia que agora será *rigorosa* e obviamente não mais conterá lemas falsos. Vimos, por exemplo, que nem todos os poliedros podem ser estendidos num plano depois de se lhes retirar uma face. Mas todos os poliedros *convexos* o podem. Com razão, posso chamar de *teorema* a minha conjectura aperfeiçoada e rigorosamente comprovada. Reafirmo: "*Todos os poliedros convexos são eulerianos*". [35]

---

34 Isso também tem muito a ver com o método de Abel. Do mesmo modo, Abel restringia o domínio de teoremas suspeitos sobre funções a progressões geométricas. Na história da conjectura de Euler, essa restrição a poliedros convexos era muito comum. Legendre, por exemplo, após dar a sua definição geral de poliedro (Cf. nota 11), apresenta uma prova que, por um lado, certamente não se aplica a todos os seus poliedros gerais, mas, por outro, aplica-se a mais que poliedros convexos. Contudo, em nota adicional, em tipos miúdos (reflexão posterior após tropeçar com exceções nunca vistas?), ele restringe, modesta, mas seguramente, a poliedros convexos ([1809], pp. 161, 164, 228).

35 Muitos matemáticos operosos ficam intrigados sobre o valor da prova, já que elas não provam. Por um lado, sabem pela experiência

Para os poliedros convexos, todos os lemas serão manifestamente verdadeiros e a prova, que não era rigorosa em sua falsa generalidade, será rigorosa para o domínio restrito de poliedros convexos. Deste modo, professor, respondi à sua questão.

PROFESSOR: Então os lemas, que pareciam manifestamente verdadeiros antes do aparecimento da exceção, parecerão de novo manifestamente verdadeiros... até o descobrimento da próxima exceção. Você admite que "todos os poliedros são eulerianos" era uma suposição; você acaba de admitir que "todos os poliedros sem cavidades e túneis são eulerianos" era também suposição; por que não admitir que "todos os poliedros convexos são eulerianos" é mais uma suposição?!

BETA: Agora não se trata de "suposição", mas de *vislumbre*!

PROFESSOR: Não me agrada o seu pretencioso "vislumbre". Respeito a suposição consciente, porque ela decorre das melhores qualidades humanas: coragem e modéstia.

BETA: Eu propus um teorema: "Todos os poliedros convexos são eulerianos." O senhor oferece apenas um sermão contra ele. Não pode apresentar um contra-exemplo?

PROFESSOR: Você não pode saber se tenho um contra-exemplo. Você *melhorou* a conjectura original, mas não

---

que as provas são falíveis, mas, por outro, sabem por sua endoutrinação dogmática que provas autênticas devem ser infalíveis. Matemáticos aplicados em geral resolvem esse dilema mediante uma crença, envergonhada, mas firme, de que as provas dos matemáticos puros são "completas" e assim realmente provam. Os matemáticos puros, porém, sabem melhor — eles têm respeito apenas pelas "provas completas" dos lógicos. Se lhes perguntarem, porém, a utilidade, a função, de suas "provas incompletas", quase todos ficam perdidos. Por exemplo, G. H. Hardy tem grande respeito pela exigência dos lógicos de provas formais, mas quando quis caracterizar prova matemática "com a qual nós os matemáticos estamos familiarizados", fê-lo do seguinte modo: "Falando rigorosamente, não existe o que se chama de prova matemática; em última análise, podemos, no máximo questionar...; ...provas são o que Littlewood e eu chamamos de *tolice*, enfeites retóricos para efeitos psicológicos, imagens à margem de uma conferência, artifícios para estimular a imaginação dos alunos" ([1928], p. 18). R. L. Wilder acha que prova é "apenas um processo de teste que aplicamos a sugestões de nossa intuição" ([1944], p. 318). G. Pólya observa que provas, mesmo incompletas, estabelecem conexões entre fatos matemáticos e isto nos ajuda a mantê-los na memória: as provas proporcionam um sistema mnemotécnico ([1945], pp. 190-191).

pode alegar que a tornou *perfeita* e que atingiu perfeito rigor em sua prova.

BETA: O senhor pode?

PROFESSOR: Nem eu posso. Mas acho que meu método de melhorar conjecturas será um aperfeiçoamento do seu, porque estabelecerei uma unidade, uma verdadeira integração entre provas e contra-exemplos.

BETA: Estou pronto a aprender.

(d) *O método de ajuste do monstro*

RO: Professor, o senhor me permitiria umas palavras em aparte?

PROFESSOR: Perfeitamente.

RO: Concordo em que devamos rejeitar o antimonstro de Delta como enfoque metodológico geral, porque ele realmente não toma os "monstros" a sério. Beta também não toma suas "exceções" a sério, porque simplesmente as arrola e retira-se para um domínio seguro. Assim, ambos esses métodos estão interessados apenas num campo limitado e privilegiado. *Meu* método não pratica discriminação. Posso mostrar que, "num exame mais apurado, as exceções vêm a tornar-se apenas aparentes e que o teorema de Euler continua válido mesmo para as pretensas exceções". [36]

PROFESSOR: De fato?

ALFA: Como pode meu contra-exemplo 3, o "ouriçocacheiro" (fig. 5), ser um poliedro euleriano comum? Ele tem 12 faces pentagonais estreladas...

RO: Eu não vejo "pentágonos estrelados". Você não percebe que, na realidade concreta, esse poliedro tem faces *triangulares* normais? Há 60 delas. Ele tem também 90 arestas e 32 vértices. Sua "característica euleriana" é 2. [37] Os "pentágonos estrelados" 12, suas 30 "arestas" e 12 "vértices", produzindo a "característica" —6, são apenas

---

[36] Matthiessen [1863].

[37] O argumento de que o "ouriçocacheiro" é "realmente" um poliedro euleriano comum, vulgar, com 60 faces triangulares, 90 arestas e 32 vértices — *"un hexacontaèdre sans épithète"* — foi exposto pelo fiel defensor da infalibilidade do teorema de Euler, E. de Jonquières ([1890*a*], p. 115). A idéia de interpretar os poliedros estelados não eulerianos como poliedros triangulares eulerianos, porém, não decorre de Jonquières, mas tem uma história dramática (Cf. nota 39).

sua fantasia. Não existem monstros, mas apenas interpretações monstruosas. Temos que expurgar nossas mentes de ilusões enganadoras; temos que aprender a ver e a definir corretamente o que vemos. Meu método é terapêutico: onde você "vê" — erroneamente — um contra-exemplo, ensino a reconhecer — corretamente — um exemplo. Eu ajusto sua visão monstruosa... [38]

ALFA: Professor, por favor, explique o *seu* método, antes que Ro nos faça uma lavagem cerebral. [39]

PROFESSOR: Deixemo-lo prosseguir.

RO: Esse é o meu ponto de vista.

GAMA: Você poderia ampliar sua crítica ao método de Delta? Vocês dois exorcizaram "monstros"...

---

[38] Nada é mais característico de uma epistemologia dogmática do que sua teoria do erro. Porque, se algumas verdades são patentes, deve-se explicar como alguém se pode enganar sobre elas; em outras palavras, por que as verdades não são manifestas a todos. De acordo com sua teoria particular de erro, cada epistemologia dogmática oferece sua terapêutica particular para purgar as mentes do erro. Cf. Popper [1963*a*], Introdução.

[39] Poinsot deve ter passado por algum distúrbio mental certa época, entre 1809 e 1858. Foi ele quem redescobriu os poliedros estelados. Primeiro, analisou-os do ponto de vista da eulerianidade e declarou que alguns deles, como o nosso pequeno dodecaedro estelado, não satisfazem a fórmula de Euler ([1810]). Ora, esse mesmo Poinsot declara categoricamente em seu [1858] que a fórmula de Euler ([1810]) "é verdadeira não só para poliedros convexos, mas para qualquer poliedro, inclusive poliedros estelados" (p. 67 — Poinsot emprega o termo *polyèdres d'espèce supérieure* para poliedros estelados). A contradição é óbvia. Qual a explicação? Que aconteceu com os contra-exemplos poliedrais estelados? A chave é a primeira sentença do ensaio: "Pode-se reduzir toda a teoria dos poliedros à teoria dos poliedros com faces triangulares." Isto é, Poinsot-Alfa estava confuso e virou Poinsot-Ro: agora ele só vê triângulos onde anteriormente via polígonos estelados; agora só vê exemplos onde anteriormente só via contra-exemplos. A autocrítica tinha que ser sub-reptícia, oculta, porque na tradição científica não há padrões disponíveis para articulação de tais meias-voltas. Fica-se imaginando que se um dia ele deparasse com faces circundantes será que as reinterpretaria com sua visão triangular?

A mudança de visão nem sempre opera no mesmo sentido. Por exemplo, J. C. Becker em seu [1869*a*] — fascinado pela nova estrutura conceptual de domínios simplesmente e multiplamente ~~ligados~~ cone (Riemann, [1851]) — admitia polígonos com faces circundantes, mas permaneceu cego a polígonos estelados (p. 66). Cinco anos depois desse livro — em que alega ter dado solução definitiva do problema — ele ampliava sua visão e reconhecia padrões poligonais e poliedrais estelados onde antes ele via apenas triângulos e poliedros triangulares ([1874]).

RO: Delta ficou impressionado com as alucinações que você engendrou. Ele concordou que o seu "ouriçocacheiro" tem 12 faces, 30 arestas e 12 vértices e que é não-euleriano. A tese dele é de que nem mesmo se trata de um poliedro. Mas errou numa coisa e outra. O seu "ouriço-cacheiro" *é* um poliedro e *é* euleriano. Mas sua interpretação poliedral estelada era equivocada. Se você não se importa, não é a impressão de um ouriço numa mente pura e saudável, mas sua impressão destorcida numa mente enferma, contorcendo-se de dor. [40]

KAPA: Mas como é que você pode distinguir mentes sadias de mentes enfermas, interpretações racionais de interpretações monstruosas? [41]

RO: O que me intriga é como você pode confundir uma com outra!

SIGMA: Ro, você realmente pensa que Alfa nunca observou que seu "ouriço" podia ser interpretado como um poliedro triangular? É claro que podia. Mas um exame mais apurado revela que "esses triângulos sempre se grupam em cinco no mesmo plano e rodeiam um pentágono regular ocultando-se — como seu núcleo — por detrás de um ângulo sólido. Ora, os cinco triângulos regulares juntamente com seu núcleo central — o pentágono regular — constituem o que se chama 'pentagrama' que, de acordo com Teofrasto Paracelso, era o signo da saúde..." [42]

---

40 Isto é parte da teoria estóica do erro, atribuída a Crisipo (cf. Aécio [c.150], IV. 12.4; também Sexto Empírico [c.190], I.249).

De acordo com os estóicos, o "ouriçocacheiro" seria parte da realidade externa, que produz uma impressão na alma: a *phantasia* ou *visum*. Um sábio não dá assentimento acrítico *(synkatathesis* ou *adsensus)* a uma *phantasia* a menos que ela amadureça em idéia clara e distinta *(phantasia kataleptike* ou *comprehensio)*, o que não pode acontecer se for falsa. O sistema de idéias claras e distintas constitui a ciência *(episteme)*. Em nosso caso, a impressão do "ouriço" na mente de Alfa seria a do dodecaedro estelado pequeno, enquanto na mente de Ro seria a do hexacontaedro triangular. Ro alegaria que a visão poliedral estelada de Alfa talvez não possa amadurecer em idéia clara e distinta, obviamente visto que ela desmentiria a fórmula "comprovada" de Euler. Assim, a interpretação poliedral estelada falharia e a "única" alternativa para ela, isto é, a interpretação triangular, se tornaria clara e distinta.

41 Trata-se de uma crítica padrão cética da alegação dos estóicos de que eles podem distinguir *phantasia* de *phantasia kataleptike* (p. ex., Sexto Empírico [c.190], I. 405).

42 Kepler [1619], *Lib. II. Propositio XXVI.*

RO: Superstição!

SIGMA: E assim, para a mente *sã*, o segredo do ouriço será revelado: ele é um corpo novo, regular, até hoje inimaginado, com faces regulares e ângulos sólidos iguais, cuja bela simetria poderia nos revelar os segredos da harmonia universal...[43]

ALFA: Muito obrigado, Sigma, por sua defesa que novamente me convence de que os adversários são menos embaraçantes que os aliados. É claro que minha figura poliedral pode ser interpretada tanto como poliedro triangular como poliedro estelado. Estou disposto a admitir ambas as interpretações em igualdade de condições...

KAPA: Está mesmo?

DELTA: Mas, certamente, uma delas é a interpretação *verdadeira*!

ALFA: Estou disposto a admitir ambas as interpretações igualmente, mas uma delas será certamente contra-exemplo global para a conjectura de Euler. Por que admitir apenas a interpretação que é "bem ajustada" às idéias preconcebidas de Ro? A propósito, mestre, o senhor não nos vai explicar o *seu* método?

(e) *Aperfeiçoamento da conjectura pelo método da incorporação do lema. Teorema gerado da prova contra conjectura ingênua.*

PROFESSOR: Voltemos à estrutura imagem. Quanto a mim, reconheço tratar-se de contra-exemplo global autêntico à conjectura de Euler, assim como verdadeiro contra-exemplo local ao primeiro lema de minha prova.

GAMA: Desculpe-me, professor, mas como a estrutura-imagem refuta o primeiro lema?

PROFESSOR: Primeiro, retire uma face e depois tente planificá-la no quadro-negro. Você não o conseguirá.

ALFA: Para auxiliar sua imaginação, direi que aqueles, e apenas aqueles poliedros que o senhor pode inflar até ficarem esféricos têm a propriedade de poderem ser planificados na parte restante depois de retirada uma face.

É óbvio que esse poliedro "esférico" é esticável num plano depois que a face foi cortada; e vice-versa é igualmente óbvio que, se um poliedro menos uma face é es-

[43] Trata-se de ótima exposição do ponto de vista de Kepler.

ticável num plano, então é possível arredondá-lo como um vaso que podemos tampar com a face faltante, obtendo assim um poliedro esférico. Mas a sua estrutura-imagem jamais poderá ser inflada até tornar-se uma esfera; apenas um rolo.

PROFESSOR: Bom. Agora, diferentemente de Delta, aceito a estrutura-imagem como uma crítica da conjectura Portanto, considero a conjectura original como falsa e desfaço-me dela, mas imediatamente exponho uma versão restrita, modificada, como segue: a conjectura Descartes-

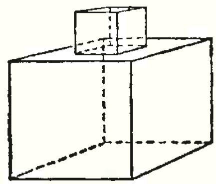


Fig. 12

-Euler vale para poliedros "simples", isto é, para aqueles que, após retirada uma face, podem ser planificados. Recuperamos assim um pouco da hipótese original. Temos: a característica euleriana de um poliedro simples é 2. Esta tese não será falseada pelo cubo encaixado, pelos tetraedros gêmeos, nem pelos poliedros estelados, porque nenhum desses é "simples".

Assim, ao passo que o método de antiexceção restringia tanto o domínio da conjectura principal como o do lema condenado a um domínio comum de segurança, por conseguinte aceitando o contra-exemplo como crítica da conjectura principal e da prova, meu método de incorporação do lema sustenta a prova mas reduz o domínio da conjectura principal ao próprio domínio do lema condenado. Ou, enquanto um contra-exemplo que é tanto global como local fez com que o antiexceção revisse os lemas e a conjectura original, ele me obriga a revisar a conjectura original, mas não os lemas. Vocês compreenderam?

ALFA: Sim, acho que sim. Para mostrar que compreendo, vou refutá-lo.

PROFESSOR: Meu método ou a minha conjectura aperfeiçoada?

ALFA: Sua conjectura aperfeiçoada.

PROFESSOR: Pode ser que você ainda não tenha compreendido meu método. Mas vamos ver o seu contra-exemplo.

ALFA: Consideremos um cubo com um cubo menor em cima dele (fig. 12). Isto satisfaz todas as nossas definições — *Def. 1, 2, 3, P, 4, 4', 5* — e, portanto, é um poliedro autêntico. E é "simples" no sentido de que pode ser planificado. Assim, de acordo com a sua conjectura modificada, sua característica Euler deve ser 2. Todavia, ele tem 16 vértices, 24 arestas e 11 faces e sua característica euleriana é 16 − 24 + 11 = 3. É um contra-exemplo global para a sua conjectura aperfeiçoada e, a propósito, também para o primeiro teorema "antiexceção" de Beta. Esse poliedro, a despeito de não ter cavidades, túneis ou "estrutura múltipla", não é euleriano.

DELTA: Chamemos a esse cubo empenachado de *Contra-exemplo 6.* [44]

PROFESSOR: Você falseou minha conjectura aperfeiçoada, mas não destruiu meu método de aperfeiçoamento. Reexaminarei a prova, e veremos por que ela fracassou quanto ao seu poliedro. Deve haver outro lema falso na prova.

BETA: Naturalmente que há. Sempre suspeitei do segundo lema. Ele pressupõe que no processo de triangulação, desenhando uma nova aresta diagonal, o senhor sempre

---

[44] O contra-exemplo 6 foi observado por Lhulier ([1812-13*a*], página 186); Gergonne por uma vez admite a novidade de sua descoberta! Mas quase cinqüenta anos depois Poinsot não tinha ouvido falar dela ([1858]), enquanto Matthiesen ([1863]) e, oitenta anos mais tarde, Jonquières ([1890*b*]) tratava-o como monstro. (Cf. notas 39 e 48). Os primeiros antiexeções do século XIX arrolavam-no como curiosidade junto com outras exceções: "Como exemplo, é costume mostrar-nos o caso da pirâmide trilateral ligada a uma face do tetraedro de modo que nenhuma das arestas da primeira coincida com uma aresta do último. 'Bastante curioso esse caso em que temos $V - A + F = 3$' conforme anotação de meu colega. E isso encerrava o assunto" (Matthiessen [1863], p. 449). Os matemáticos modernos tendem a esquecer as faces circundantes, que podem ser irrelevantes para a classificação de múltiplos, mas pode tornar-se relevante em outros contextos. H. Steinhaus diz em seu [1960]: "Dividamos o globo em F países (consideraremos mares e oceanos como terra). Teremos então $V + F = A + 2$, seja qual for a situação política" (p. 273). Mas fica-se imaginando se Steinhaus destruiria Berlim Ocidental ou San Marino simplesmente porque sua existência refuta o teorema de Euler. (Embora, naturalmente, ele possa evitar mares como o Baikal de cair inteiramente num país ao defini-los como lagos, visto ter declarado que apenas mares e oceanos devem ser considerados como terra).

aumenta de um o número de arestas e de faces. Isso nachado, encontraremos uma face circundada (fig. 13 *a*). é falso. Se olharmos a rede plana do nosso poliedro empe-ro de faces (fig. 13 *b*): precisamos de um aumento de Nesse caso, nenhuma aresta diagonal aumentará o núme-duas arestas para aumentar o número de faces para mais um (fig. 13 (*c*).

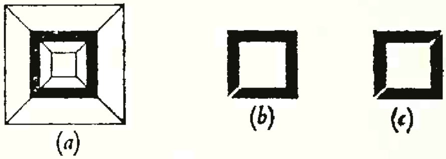


Fig. 13

PROFESSOR: Meus parabéns. Sem dúvida, devo restringir ainda mais nossa conjectura...

BETA: Sei o que o senhor vai fazer. O senhor dirá que "Poliedros simples com faces triangulares são eulerianos". Admitirá a triangulação sem discussão; voltará a ter o lema de novo como condição.

PROFESSOR: Não, você está enganado. Antes de observar o seu equívoco concretamente, permita-me ampliar meu comentário sobre o seu método antiexceção. Quando você restringe sua conjectura a um domínio "seguro", você não examina a prova adequadamente, e, de fato, não precisa fazê-lo para os seus objetivos. A declaração de que no seu domínio restrito todos os lemas serão verdadeiros, sejam quais forem, basta para os seus fins. Mas não basta para os meus. Eu elaboro o mesmíssimo lema que foi refutado pelo contra-exemplo *dentro* da conjectura, de modo que tenho de depurá-lo e formulá-lo o mais rigorosamente possível, com base em cuidadosa análise da prova. Desse modo, os lemas refutados serão incorporados à minha conjectura melhorada. O seu método não o obriga a fazer uma esmerada *elaboração da prova*, visto que a prova não aparece em sua conjectura melhorada, tal como aparece na minha. Agora volto à sua presente sugestão. O lema que foi falseado pela face circundante não era — como parece que você pensa — que "*todas as faces são triangulares*", mas que "*qualquer face cortada por uma aresta diagonal adquire a forma de duas peças*".

Este lema é que converto em condição. Chamando de
Conexas "simplesmente ~~ligadas~~" as faces que o satisfazem, posso oferecer um segundo aperfeiçoamento à minha conjectura original: "Para um poliedro simples, com todas as suas
Conexas faces simplesmente ~~ligadas~~, $V - A + F = 2$." A razão para o seu equívoco estava no seu método que não lhe ensinou cuidadosa análise da prova. A análise da prova é às vezes trivial, mas às vezes é realmente muito difícil.

BETA: Entendo o que o senhor quer dizer. Eu também acrescentaria uma observação autocrítica ao seu comentário, visto que ele me parece revelar todo um contínuo de atitudes antiexceção. A pior simplesmente barra algumas exceções sem considerar absolutamente a prova. Daí as mistificações quando temos a prova numa mão e as exceções na outra. Ao ver desses primitivos barradores de exceções, a prova e as exceções existem em dois compartimentos completamente estanques. Outros podem agora observar que a prova só atuará em domínio restrito, e alegarão com isso dissipar o mistério. Mas suas "condições" serão estranhas à idéia de prova.[45] Melhores barradores de exceções olharão rapidamente para a prova e ganharão alguma inspiração, como tive agora, para declarar as condições que determinam um domínio seguro. Os melhores barradores de exceção fazem uma cuidadosa análise da prova e, nesta base, dão uma delineação muito sutil da área proibida. De fato, o seu método é, quanto a isto, um caso limitador do método de barrar exceções...

IOTA: ...e exibe a unidade dialética fundamental de prova e refutações.

PROFESSOR: Espero que agora todos vocês percebam que as provas, muito embora possam não comprovar, certa-

---

45 "... a memória de Lhulier consiste de duas partes muito distintas. Na primeira, o autor oferece uma prova original do teorema de Euler. Na segunda, seu objetivo é apontar as exceções a que está sujeito o teorema" (comentário editorial de Gergonne sobre o ensaio de Lhulier em [1812-13*a*] de Lhulier, p. 172, grifos meus).

M. Zacharias, em seu [1915-31], faz uma exposição não crítica mas fidedigna dessa compartimentalização: "No século XIX, geômetras, além de encontrar novas provas do teorema de Euler, empenharam-se em estabelecer as exceções de que ele padece em certas condições. Tais exceções foram declaradas, por exemplo, por Poinsot, S. Lhulier, e F. Ch. Hessel tentou classificar as exceções..." (p. 1052).

mente ajudam a melhorar nossa conjectura.[46] Os barradores de exceções melhoraram-na muito, mas melhorar era independente de comprovar. Nosso método melhora comprovando. Essa unidade intrínseca entre a "lógica do descobrimento" e a "lógica da justificação" é o aspecto mais importante do método de incorporação do lema.

BETA: E naturalmente compreendo agora suas enigmáticas observações anteriores sobre não se perturbar por uma conjectura ser ao mesmo tempo "comprovada" e refutada e sobre sua disposição de "comprovar" inclusive uma falsa conjectura.

KAPA (*à parte*): Mas por que chamar de "prova" o que de fato é uma "*desprova*"?

PROFESSOR: Pensem bem, poucas pessoas estarão dispostas a partilhar desta atitude. Os matemáticos, em maioria, devido a dogmas heurísticos enraizados, são incapazes de dispor-se ao mesmo tempo a comprovar e refutar uma conjectura. Eles a comprovam ou a refutam. Além do mais, são especialmente incapazes de melhorar conjecturas pela refutação, quando acontece de serem as suas conjecturas. *Eles querem melhorar suas conjecturas sem refutações; nunca pela redução da falsidade, mas pelo monótono acréscimo de verdade; assim, purgam eles o progresso do conhecimento do horror dos contra-exemplos.* Este é talvez o pano de fundo do enfoque dos melhores barradores de exceções: eles começam "agindo com cautela" ao vislumbrar uma prova para o domínio "seguro", e continuam submetendo-a a uma investigação inteiramente crítica, testando se utilizaram cada uma das condições impostas. Do contrário, eles "aguçam" ou "generalizam" a primeira versão modesta do seu teorema, isto é, especificam os lemas nos quais repousa a prova, e os incorporam. Por exemplo, após um ou dois contra-exemplos, eles podem formular o *teorema provisório barrador de exceção*: "Todos os poliedros convexos são eulerianos", adiando o caso dos não-convexos para uma *cura posterior*; em seguida, eles deparam com a prova de Cauchy e então, descobrindo que a convexidade não foi realmente "utilizada" na prova, eles elaboram o teorema da incorporação

[46] Hardy, Littlewood, Wilder e Pólya parece terem omitido essa questão (veja-se nota 35).

do lema! [47] Nada há de heuristicamente impróprio nesse processo que combina barragem de exceção *provisória* com sucessiva análise de prova e incorporação de lema.

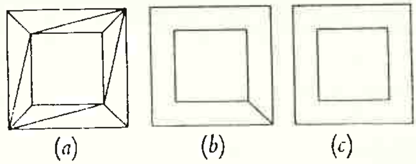


Fig. 14. Três versões da face circundante: (*a*) Jonquières, (*b*) Matthiessen, (*c*) o "olho destreinado".

BETA: É claro que esse processo não abole a crítica; ele apenas a impele para o pano de fundo: em vez de criticar diretamente um exagero, eles criticam uma subestimativa.

PROFESSOR: Estou encantado, Beta, de o ter persuadido. Ro e Delta, que é que vocês dizem disso?

RO: Quanto a mim, acho, evidentemente, que o caso das "faces circundantes" é um falso problema. Decorre de uma monstruosa interpretação do que constituem as faces e arestas dessa soldagem de dois cubos em um — que o senhor chamou de "cubo empenachado".

PROFESSOR: Explique.

RO: O "cubo empenachado" é um poliedro que consiste de dois cubos soldados um ao outro. De acordo?

PROFESSOR: Digamos que sim.

RO: Ora, o senhor interpretou mal a "soldagem". A "soldagem" consiste de arestas ligando os vértices do quadrado inferior do cubo pequeno aos vértices correspondentes do quadrado superior do cubo grande. Assim, não há, absolutamente, "face circundante".

BETA: A face circundante está lá! As arestas separadoras de que você fala é que não existem!

[47] Esse padrão é essencialmente o mesmo exposto no clássico de Pólya e Szegö [1927], p. vii: "Deve-se inspecionar cada prova para ver se de fato utilizamos todas as suposições; deve-se tentar obter a mesma conseqüência de menos suposições... e não se deve ficar satisfeito até que contra-exemplos mostrem que se chegou ao limite das possibilidades."

RO: O que elas estão é ocultas aos seus olhos destreinados.[48]

BETA: Você espera que tomemos seu argumento a sério? O que vejo é superstição, mas as *suas* arestas "ocultas" serão realidade?

RO: Olhe para este cristal de sal. Você diria que isto é um cubo?

BETA: Certamente.

RO: Um cubo tem 12 vértices; este aqui, tem?

BETA: Sim, tem.

RO: Mas neste cubo não há arestas absolutamente. Elas estão ocultas. Elas só aparecem na sua reconstrução racional.

BETA: Pensarei no assunto. Uma coisa é clara. O professor criticou minha vaidosa opinião de que meu método leva à certeza, e também por ter esquecido a prova. Essa crítica aplica-se do mesmo modo ao seu "ajuste do monstro" como à minha "antiexceção".

PROFESSOR: Delta, que é que você diz? Como *você* exorcizaria a face circundante?

---

48 A "soldagem" de dois poliedros pelas arestas ocultas é argumentada por Jonquières ([1890b] pp. 171-2), que emprega antimonstros contra cavidades e túneis mas ajustamento de monstros contra cubos empenachados e poliedros estelados. O primeiro a propor o emprego de ajustagem de monstro em defesa do teorema de Euler foi Matthiessen [1863]. Ele adota o ajustamento de monstros consistentemente: tem êxito em expor arestas e faces ocultas para esclarecer tudo o que é não-euleriano, inclusive poliedros com túneis e cavidades. Enquanto a soldagem de Jonquières é uma triangulação completa da face circundante, Matthiessen solda com economia, traçando apenas o mínimo número de arestas que dividem a face em subfaces simplesmente ligadas (fig. 14).

Matthiessen é notavelmente confiante em seu método de tornar contra-exemplos revolucionários em exemplos eulerianos burgueses bem ajustados. Diz ele que "qualquer poliedro pode ser decomposto de modo a que corrobore o teorema de Euler..." Enumera as pretensas exceções notadas por observador superficial e então declara: "Em cada um desses casos, podemos mostrar que o poliedro tem faces e arestas ocultas que, se contadas, deixam o teorema $V - A + F = 2$ imaculado mesmo para os casos aparentemente mais resistentes."

A idéia de que, desenhando arestas e faces adicionais, alguns poliedros não-eulerianos podem ser transformados em eulerianos, vem não de Matthiessen, mas de Hessel. Hessel ilustra essa questão com três exemplos e empregando belas figuras ([1832], pp. 14-15). Mas ele não utilizou esse método para "ajustar"; pelo contrário, para "elucidar as exceções" ao mostrar "poliedros um tanto semelhantes para os quais é válida a lei de Euler".

DELTA: Eu não o faria. O senhor converteu-me ao seu método. Só fico imaginando por que o senhor não confirma e também incorpora o terceiro lema? Proponho uma quarta e, espero, final formulação: "São eulerianos todos os poliedros que sejam (*a*) simples, (*b*) tenham cada face Conexa simplesmente ~~ligada~~ e (*c*) sejam tais que os triângulos na rede triangular plana, resultante da planificação e triangulação, possam ser de tal modo numerados que, ao retirá-los na ordem certa, $V - A + F$ não se altere até que atinjamos o último triângulo."[49] Admira-me que o senhor não tivesse proposto isso imediatamente. Se o senhor tomava o seu método realmente a sério, devia ter posto todos os lemas em condições imediatamente. Por que essa "engenharia por partes"?[50]

ALFA: Tóri que virou revolucionário! Sua sugestão me choca como um tanto utópica. Porque não há apenas três lemas. Por que não acrescentar, com muitas outras, condições como "(4) se $1 + 1 = 2$", e "(5) se todos os triângulos tiverem três vértices e três arestas", já que certamente empregamos esses lemas? Proponho que cuidemos apenas daqueles lemas nas condições para as quais encontrou-se um contra-exemplo.

GAMA: Isto me parece demasiado acidental para ser aceito como norma metodológica. Vamos trabalhar com todos aqueles lemas contra os quais podemos esperar contra-exemplos, isto é, os que não são obviamente, indubitavelmente verdadeiros.

DELTA: Bem, o nosso terceiro lema choca alguém como óbvio? Vamos transformá-lo numa terceira condição.

GAMA: Que acontece se as operações expressas pelos lemas de nossa prova não forem todas independentes? Se alguma das operações puder ser efetuada, pode ser que o restante deva necessariamente ser capaz de ser executado. Quanto a mim, suspeito que *se um poliedro for simples, então haverá sempre uma ordem de extinção de triângulos na rede plana resultante tal que $V - A + F$ não se altere*. Se assim for, então a incorporação do primeiro

---

[49] Esse último lema é desnecessariamente forte. Seria suficiente para fins da prova substituí-lo pelo lema de que "para a estrutura triangular plana resultante da planificação e triangulação $V - A + F = 1$". Cauchy parece não ter notado a diferença.

[50] Os alunos estão obviamente muito atualizados quanto à recente filosofia social. O termo foi cunhado por K. R. Popper ([1957], p. 64).

lema em nossa conjectura nos isentaria de incorporar o terceiro.

DELTA: Você alega que a primeira condição implica a terceira. Pode comprovar isto?

ÉPSILON: Posso.[51]

ALFA: A prova concreta, embora interessante, não nos ajudará a solucionar o problema: até que ponto melhoraremos nossa conjectura? Posso admitir que você tenha a prova que afirma ter — mas isso apenas irá decompor o terceiro lema em alguns novos sublemas. Devemos transformá-los em condições? Onde iríamos parar?

KAPA: Há um retrocesso infinito em provas; portanto, provas não comprovam. Você deve compreender que provar é um jogo, a ser jogado enquanto você tem prazer e cessar quando você estiver cansado dele.

ÉPSILON: Não, isso não é diversão, mas assunto sério. O retrocesso infinito pode ser detido por lemas trivialmente verdadeiros, que não precisam converter-se em condições.

GAMA: Era exatamente isto o que eu queria dizer. Não transformamos em condições aqueles lemas que podem ser comprovados a partir de princípios trivialmente verdadeiros. Nem incorporamos aqueles lemas que podem ser comprovados — possivelmente graças a tais princípios trivialmente verdadeiros — a partir de lemas anteriormente especificados.

ALFA: Concordo. Podemos, então, melhorar nossa conjectura depois de termos convertido os dois lemas não triviais em condições. De fato, penso realmente que esse método de aperfeiçoamento, pela incorporação de lemas, é infalível. Parece-me que ele não apenas aperfeiçoa como também torna perfeita a conjectura. E dele aprendi algo de importante: é errôneo afirmar que "o objetivo de um 'problema a comprovar' é mostrar conclusivamente que certa afirmação claramente asseverada é verdadeira, ou então mostrar que é falsa".[52] O verdadeiro objetivo de um "problema a comprovar" deve ser *aperfeiçoar* — de fato, tornar perfeita — *a conjectura "ingênua"* original em autêntico *"teorema"*.

---

[51] De fato, essa prova foi proposta pela primeira vez por H. Reichardt ([1941], p. 23). Cf. também B. L. van der Waerden [1941]. Hilbert e Cohn-Vossen ficariam satisfeitos com que a verdade da asserção de Gama é "fácil de perceber" ([1932], trad. inglesa, p. 292).

[52] Pólya ([1945], p. 142).

Nossa conjectura ingênua era: "Todos os poliedros são eulerianos."

O método de barragem de monstros defende essa conjectura ingênua pela reinterpretação de seus termos de um modo que no fim temos um *teorema que barra monstros*: "Todos os poliedros são eulerianos." Mas a identidade das expressões lingüísticas da conjectura ingênua com o teorema barrador de monstros oculta, por trás das mudanças sub-reptícias no significado dos termos, um aperfeiçoamento essencial.

O método de barrar exceções introduziu um elemento que é realmente extrínseco ao argumento: a convexidade. O *teorema barrador de exceções* era: "Todos os poliedros convexos são eulerianos."

O método de incorporar o lema baseava-se no argumento — isto é, na prova — e em nada mais. Ele virtualmente *resumia a prova no teorema de incorporação do lema*: "Todos os poliedros simples com faces simples-
convexas mente ~~ligadas~~ são eulerianos."

Isso mostra que (e agora empregamos o termo "provar" no sentido tradicional) *não comprovamos o que pretendemos comprovar*. Portanto, nenhuma prova deve concluir com as palavras: "*Quod erat demonstrandum.*"[53]

BETA: Dizem alguns que os teoremas precedem as provas na ordem do descobrimento: "Tem-se que supor um teorema matemático antes de comprová-lo." Outros negam isso, e alegam que a descoberta decorre da dedução de conclusões a partir de uma série de premissas e observação das premissas interessantes — se tivermos sorte bastante para achar alguma. Ou, para empregar uma deliciosa metáfora de um amigo meu, alguns dizem que a heurística *zíper* numa estrutura dedutiva vai de baixo — a conclusão — ao topo — as premissas,[54] outros dizem que ela vai do topo à parte inferior. Qual é a sua posição?

ALFA: Que a sua metáfora é inaplicável à heurística. O descobrimento não vai para cima ou para baixo, mas segue um caminho em ziguezague: aguilhoado por contra-

---

[53] Essa última frase é do interessante estudo de Alice Ambrose ([1959] p. 438).

[54] Cf. Nota 7. A metáfora do "*fecho-éclair*" foi inventada por R. B. Braithwaite; porém ele fala apenas de "*fechos-éclair*" lógicos e epistemológicos, mas não "heurísticos" ([1953], especialmente página 352).

exemplos, ele transita da conjectura ingênua às premissas e depois volta de novo para desfazer a conjectura ingênua e substituí-la pelo teorema. Conjectura ingênua e contra-exemplos não aparecem na estrutura dedutiva plenamente amadurecida: o ziguezague da descoberta não pode ser discernido no produto final.

PROFESSOR: Muito bem. Acrescentemos uma observação de cautela. O teorema nem sempre difere da conjectura ingênua. Não melhoramos necessariamente ao comprovar. As provas aperfeiçoam quando a idéia de prova descobre aspectos inesperados da conjectura ingênua que então aparecem no teorema. Mas em teorias *maduras* pode não acontecer isso. É o caso, certamente, em teorias jovens, *em crescimento*. Essa interligação de descoberta e justificação, de aperfeiçoamento e comprovação, é sobretudo característica das útimas.

KAPA (*à parte*): Teorias maduras podem ser rejuvenescidas. A descoberta sempre supera a justificação.

SIGMA: Essa classificação corresponde à minha! Meu primeiro tipo de proposições era do tipo maduro, o terceiro era do tipo em crescimento...

GAMA (*interrompendo-o*): O teorema é falso! Descobri um contra-exemplo para ele.

5. *Crítica da Análise da Prova por Contra-Exemplos Que São Globais, Mas Não Locais. O Problema do Rigor.*

(*a*) *Antimonstro em defesa do teorema*

GAMA: Acabei de descobrir que meu *Contra-exemplo 5*, o cilindro, refuta não apenas a conjectura ingênua como também o teorema. Embora ele satisfaça a ambos os lemas, não é euleriano.

ALFA: Meu caro Gama, não se torne excêntrico. O cilindro era uma brincadeira, e não um contra-exemplo. Nenhum matemático sério tomará o cilindro por um poliedro.

GAMA: Por que você não protestou contra o meu *Contra-exemplo 3*, o ouriçocacheiro? Era menos "excêntrico" que meu cilindro?[55] Então, naturalmente, você estava criticando a conjectura ingênua e admitiu refutações! Agora

[55] O ouriço e o cilindro já foram estudados anteriormente.

você está defendendo o teorema e desgostando das refutações! Na ocasião, quando o contra-exemplo surgiu, sua questão era: que há de errado com a conjectura? Agora sua questão é: que há de errado com o contra-exemplo?
DELTA: Alfa, você virou barrador de monstro! Você não está embaraçado? [56]

(b) *Lemas ocultos*

ALFA: Estou. Devo ter sido um pouco precipitado. Deixe-me pensar. Há três tipos possíveis de contra-exemplos. Já discutimos o primeiro, que é local mas não global, que certamente não refutaria um teorema. [57] O segundo, que tanto é global como local não exige ação: longe de refutar o teorema, confirma-o. Pode haver um terceiro tipo, global, mas não local. Este último refutaria o teorema. Eu não achava que isso fosse possível. Agora, Gama alega que o cilindro é um. Se não quisermos rejeitá-lo como um monstro, temos que admiti-lo como contra-exemplo global: $V - A + F = 1$. Mas não é do segundo tipo inofensivo? Aposto que ele não satisfaz pelo menos um dos lemas.
GAMA: Vamos conferir. Ele certamente satisfaz o primeiro lema: se eu retirar a face inferior, posso facilmente planificar o restante no quadro-negro.
ALFA: Mas, se você retirar a parte curva, ele se transforma em duas peças!
GAMA: E daí? O primeiro lema exigia que o poliedro fosse "simples", isto é, "depois de retirada uma face, ele pode ser planificado". O cilindro satisfaz essa exigência, mesmo que você comece retirando o rolo. O que você está exigindo é que o cilindro satisfaça um lema *adicional*, isto é, que a *rede plana resultante também* ~~*esteja ligada*~~. Mas quem, alguma vez, declarou *esse* lema? seja conexa

[56] O antimonstro em defesa do teorema é padrão importante em matemática não formal: "Qual o erro nos exemplos em que falha a fórmula de Euler? Que condições geométricas, tornando mais preciso o significado de F, V e A garantiriam a validade da fórmula de Euler?" (Pólya [1954], I, Exercício 29). O cilindro é dado no exercício 24. A resposta é: "... uma aresta... deve terminar em cantos..." (p. 225). Pólya formula isso de modo geral: "A situação, freqüente em pesquisa matemática, é esta: já foi formulado um teorema, porém temos que dar significado mais preciso aos termos em que ele foi formulado para torná-lo estritamente correto" (p. 55).
[57] Contra-exemplos locais, mas não globais já foram discutidos antes.

ALFA: Todo mundo interpretou "estendido" como "estendido por inteiro", "estendido sem rasgar"... Decidimos não incorporar o terceiro lema por causa da prova de Épsilon de que ele se seguia do primeiro.[58] Mas observe bem essa prova: ela se apóia na suposição de que o resultado do esticamento é uma rede ~~ligada~~! Aliás, para a rede triangulada $V - A + F$ não seria 1. conexa

GAMA: Por que, então, você não insistiu em declarar isso explicitamente?

ALFA: Porque todos achamos que estava declarado implicitamente.

GAMA: Mas você, com certeza, não. Porque você propôs que "simples" significasse "enchível como uma bola".[59] O cilindro pode ser enchido como uma bola — assim, de acordo com a sua interpretação ele não satisfaz o primeiro lema.

ALFA: Bem... Mas você há de concordar que ele não satisfaz o segundo lema, isto é, que "qualquer face cortada por uma diagonal divide em duas peças". Como você iria triangular o círculo ou o rolo? Essas faces serão simplesmente ~~ligadas~~? conexas

GAMA: É claro que são.

ALFA: Mas no cilindro não se pode traçar diagonais, absolutamente! Diagonal é uma aresta que liga dois vértices não adjacentes. Mas o seu cilindro não tem vértices!

GAMA: Não se aborreça. Se você quiser mostrar que o círculo não ~~está~~ é simplesmente ~~ligado~~, trace uma diagonal que *não* crie nova face. conexo

ALFA: Deixe de brincadeira; você sabe muito bem que isso eu não posso.

GAMA: Então você há de admitir que "há uma diagonal do círculo que não cria nova face" é uma declaração *falsa*?

ALFA: Sim. Admito. Que é que você pretende agora?

GAMA: Então você está pronto a admitir que sua negação é verdadeira, quer dizer, que "todas as diagonais do círculo criam uma nova face", ou, que "o círculo é simplesmente ~~ligado~~". conexo

ALFA: Você não pode dar um exemplo do seu lema de que "todas as diagonais do círculo criam uma nova face"

58 Veja-se p. 61.

59 Veja-se p. 52.

— portanto, não é verdadeiro, mas sem sentido. Sua concepção de verdade é falsa.

KAPA (*à parte*): Primeiro eles discutiam sobre o que é poliedro, agora discutem sobre o que é verdade! [60]

GAMA: Mas você já admitiu que a negação do lema era falsa! Ou será possível que uma proposição *A* seja *sem sentido* enquanto *Não-A* seja *significativa e falsa*? Sua concepção de significado não faz sentido!

Pense bem, percebo a sua dificuldade; mas não podemos superá-la por uma ligeira reformulação. Chamemos

convexa

de face simplesmente ~~ligada~~ se *"para todo x, se x for uma diagonal, então x corta a face em duas"*. Nem o círculo nem o rolo do cilindro têm diagonais, de modo que, em seu caso, seja qual for *x*, o antecedente será sempre falso. Portanto, a condicional será exemplificada por qualquer objeto, e será tanto significativa quanto verdadeira. Ou, o círculo e o rolo são simplesmente ~~ligados~~ — o cilindro satisfaz o segundo lema.

convexos

ALFA: Não! Você não pode traçar diagonais e, por conseguinte, não pode triangular as faces. Você nunca chega a uma rede plana triangular e nunca terá condições de concluir a prova. Como pode, então, dizer que o cilindro satisfaz o segundo lema? Não percebe que *deve haver uma cláusula existencial* no lema? A correta interpretação de simples ~~ligação~~ de uma face deve ser: *"para todo* x, *se* x *for uma diagonal, então* x *corta a face em duas; e há pelo menos um* x *que seja diagonal"*. Nossa formulação original pode não ter sido declarada, mas lá estava como uma *"suposição oculta"* [61] inconscientemente feita. Nenhuma das faces do cilindro corresponde a ela; portanto, o cilindro é um contra-exemplo que é tanto global como local, e não refuta o teorema.

convexidade

GAMA: Primeiro, você modificou o lema do esticamento introduzindo "ligação", agora o lema da triangulação introduzindo a sua cláusula existencial! E toda essa conversa obscura sobre "suposição oculta" ou "tácita" apenas

---

60 As declarações vaziamente verdadeiras de Gama foram a principal inovação do século XIX. O estofo do seu problema ainda não foi desdobrado.

61 "Euclides... emprega um axioma do qual está inteiramente inconsciente" (Russell [1903], p. 407). "Fazer [*sic*] uma suposição implícita" é frase comum entre matemáticos e cientistas. Veja-se também a discussão de Gamow da prova de Cauchy ([1953], p. 56) ou Eves e Newson sobre Euclides ([1958], p. 84).

esconde o fato de que o meu cilindro fez você inventar essas modificações.

ALFA: Que conversa obscura? Já concordamos em omitir, isto é, "esconder", lemas trivialmente verdadeiros.[62] Por que, então, devemos declarar e incorporar lemas trivialmente falsos, se são tão triviais quanto chatos! Tenha-os em mente (*en thyme*), mas não os declare. Um lema tácito não é erro: é sinal perspicaz apontando para o nosso senso comum.

KAPA (*à parte*): Senso comum é quando supomos que sabemos tudo mas de fato nada sabemos.[63]

GAMA: Se você tivesse feito suposições conscientes, elas seriam que (*a*) retirar uma face sempre deixa uma rede ligada e (*b*) qualquer face não-triangular pode ser cortada em triângulos por diagonais. Embora elas estivessem em seu *subconsciente*, foram arroladas como *trivialmente verdadeiras* — e *trivialmente falsas*. Antes de serem confrontados com o cilindro, você nem mesmo poderia conceber que os dois lemas fossem falsos. Se você agora dissesse

---

62 Vejam-se pp. 60 a 62.

63 Bons manuais de matemática não-formal em geral especificam suas fórmulas, isto é, aqueles lemas, verdadeiros ou falsos, que consideram tão triviais que não vale a pena mencionar. A expressão padrão para isso é "admitimos familiaridade com lemas do tipo x". A quantidade de familiaridade presumida decresce à medida que a crítica torna o senso comum em conhecimento. Cauchy, p. ex., nem mesmo observou que seu célebre [1821] pressupunha "familiaridade" com a *teoria dos números reais*. Ele teria rejeitado como monstro qualquer contra-exemplo que tornasse explícitos lemas sobre a natureza dos números irracionais. Isso não acontece com Weierstrass e sua escola: manuais de matemática não-formal agora contêm um novo capítulo sobre a teoria dos números reais em que esses lemas são reunidos. Mas em suas introduções é em geral presumida a "familiaridade" com a teoria dos números racionais. (Veja-se, p.e., *Matemática Pura* de Hardy da segunda edição [1914] em diante — a primeira edição ainda relegava a teoria dos números reais ao conhecimento habitual; ou Rudin [1953]). Manuais mais rigorosos estreitam esse conhecimento ainda mais: Landau, na introdução de seu famoso [1930], presume familiaridade apenas com "raciocínio lógico e língua alemã". É irônico que no mesmíssimo tempo Tarski mostrasse que os lemas absolutamente triviais assim omitidos podem não só ser falsos como inconsistentes — sendo o alemão uma língua semanticamente fechada. Imagina-se se "o autor confessa ignorância sobre o campo x" substituirá o autoritário eufemismo "o autor presume familiaridade com o campo x": certamente apenas quando se reconhecer que o conhecimento não tem fundamento.

que sim, estaria reescrevendo a história para expurgá-la de erro.[64]

TETA: Ainda há pouco, Alfa, você punha em ridículo as cláusulas "ocultas" que surgiram nas definições de Delta após cada refutação. Agora é você que faz cláusulas "ocultas" nos lemas após cada refutação; você está mudando de base e procurando ocultá-lo para evitar o ridículo. Que me diz disso, heim?

KAPA: Nada me diverte mais do que um dogmático em apuros. Depois de vestir a capa de cético militante para demolir uma ponta de dogmatismo, Alfa torna-se frenético quando por sua vez é encurralado pela mesma espécie de argumentos céticos. Ele agora age sem consideração com os demais: tentando rechaçar o contraexemplo de Gama primeiro com o mecanismo de defesa que ele mesmo denunciou e interditou (barração de monstro), e depois contrabandeando uma reserva de "lemas ocultos" na prova e correspondentes "condições ocultas" no teorema. Qual é a diferença?

PROFESSOR: O problema de Alfa era, sem dúvida, a tendência dogmática de sua interpretação da incorporação de lema. Ele achava que uma cuidadosa inspecção da prova produziria uma perfeita análise de prova contendo

---

64 Quando descoberto pela primeira vez, o lema oculto é considerado erro. Quando J. C. Becker observou pela primeira vez uma pressuposição "oculta" *(stillschweigend)* na prova de Cauchy (ele citou a prova em segunda mão tirada de Baltzer [1862]), considerou-a um "erro" ([1869*a*] pp. 67-8). Chamou atenção para o fato de Cauchy pensar que todos os poliedros eram simples: seu lema era não apenas oculto, mas também falso. Contudo, os historiadores não podem imaginar que grandes matemáticos cometam tais erros. Um verdadeiro programa de como falsear a história pode encontrar-se em Poincaré [1908]: "Uma demonstração que não seja rigorosa é nada. Penso que ninguém contestará essa verdade. Mas se fosse tomada literalmente, seríamos levados a concluir que antes de 1820, por exemplo, não havia matemática: isto seria evidentemente um exagero; os geômetras daquela época compreendiam de bom grado o que nós explicamos por prolixo discurso. Isso não significa que eles não o percebessem, mas passavam por ele muito rapidamente, e para enxergá-lo bem teriam de esforçar-se para dizê-lo." (p. 374). O relato de Becker sobre o "erro" de Cauchy tinha de ser totalmente refeito. A nova redação foi feita por E. Steinitz, que insistia em que "o fato de que o teorema não era válido em geral talvez não pudesse permanecer despercebido" ([1914-31], p. 20). O próprio Poincaré aplicou seu programa ao teorema de Euler: "Sabe-se que Euler provava que $V - A + F = 2$ para poliedros convexos" ([1893] — Euler naturalmente enunciou seu teorema para *todos* os poliedros.

todos os falsos lemas (assim como Beta pensava que podia enumerar todas as exceções). Ela achava que incorporando-as podia conseguir não só um teorema aperfeiçoado, mas um teorema *perfeito,*[65] *sem se incomodar com contra-exemplos.* O cilindro mostrou-lhe estar errado, mas, em vez de admitir isso, ele agora apela para uma análise de prova completa para verificar se ela contém todos os falsos lemas *relevantes.*

(c) *O método de prova e refutações*

GAMA: Proponho aceitar o cilindro como autêntico contra-exemplo para o teorema. Invento um novo lema (ou novos lemas) que serão refutados por ele, e acrescentarei o lema (ou os lemas) à lista original. Isso, de fato, é exatamente o que Alfa fez. Mas em vez de "ocultá-los", de modo que se tornem implícitos, proclamo-os publicamente.

Então, o cilindro, que era um enigmático e perigoso contra-exemplo global, mas não local (terceiro tipo), a respeito da antiga análise de prova e do correspondente teorema antigo, torna-se um contra-exemplo inofensivo, global e local (segundo tipo) a respeito da nova análise de prova e do correspondente teorema novo.

Alfa achava que sua classificação de contra-exemplos era absoluta — mas de fato era relativa à sua análise de prova. À medida que a análise de prova progride, os contra-exemplos do terceiro tipo convertem-se em contra-exemplos do segundo tipo.

LAMBDA: Está certo. Uma análise de prova é "rigorosa" ou "válida", e o correspondente teorema matemático é verdadeiro se, e ~~apenas~~ se, não houver contra-exemplo de somente "terceiro tipo" para ele. Chamo a esse critério de *Princípio de Retransmissão de Falsidade*, porque ele exige que contra-exemplos globais sejam também locais: a falsidade deve ser retransmitida da conjectura ingênua aos lemas, do conseqüente do teorema ao seu antecedente. Se um contra-exemplo global, mas não local violar esse princípio, restauramo-lo pelo acréscimo de um lema apropriado à análise da prova. O Princípio de Retransmissão de Falsidade é, portanto, um *princípio regulador* para a análise de prova *in statu nascendi*, e um contra-exemplo global,

---

65 Veja-se p. 48.

mas não local é um agente fermentador no progresso da análise de prova.

GAMA: Tenha em mente que, mesmo antes de achar uma única refutação nós selecionamos três lemas suspeitos e prosseguimos com a análise de prova!

LAMBDA: É verdade. A análise de prova pode começar não apenas sob a pressão de contra-exemplos globais, mas também quando já nos pusemos em guarda contra provas "convincentes". [66]

No *primeiro caso*, todos os contra-exemplos globais aparecem como do terceiro tipo, e todos os lemas começam suas carreiras como "lemas ocultos". Eles nos levam à paulatina elaboração da análise de prova, e então convertem-se um por um em contra-exemplos do segundo tipo.

No *segundo caso* — quando já estamos com espírito suspeitoso e procuramos refutações — podemos chegar a uma análise de prova avançada sem quaisquer contra-exemplos. Há então duas possibilidades: *a primeira possibilidade é que consigamos*, ao refutar — mediante contra-exemplos locais — os lemas arrolados em nossa análise de prova. Podemos também muito bem achar que esses são contra-exemplos globais.

ALFA: Foi assim que descobri a estrutura-imagem: procurando um poliedro que, depois de retirada a face, não pudesse ser estendido num plano.

SIGMA: Assim, não apenas as refutações atuam realmente como fermentos para a análise de prova, como estas podem agir como agente fermentador para refutações! Que aliança hereje entre aparentes inimigos!

LAMBDA: É certo. Se uma conjectura parece muito plausível ou mesmo evidente, deve-se comprová-la: pode-se descobrir que ela repousa em lemas muito requintados e duvidosos. Refutar os lemas pode levar a alguma inesperada refutação da conjectura original.

SIGMA: A refutações geradas por provas!

---

[66] Nossa turma era um tanto avançada: Alfa, Beta e Gama puseram em suspeição três lemas quando nenhum contra-exemplo global surgira. Na história real a análise da prova veio muitas décadas depois: por longo tempo os contra-exemplos eram ou silenciados ou exorcizados como monstros, ou arrolados como exceções. A heurística transita do contra-exemplo global para a análise da prova. A aplicação do Princípio de Retransmissão de Falsidade era virtualmente desconhecida na matemática não-formal em princípios do século XIX.

GAMA: Então "a virtude da prova lógica reside não em que ela compele à crença, mas que sugere dúvidas".[67]

LAMBDA: Mas deixem-me voltar à *segunda possibilidade*: quando não encontramos qualquer contra-exemplo local para os lemas suspeitos.

SIGMA: Isto é, quando refutações não acorrem à análise de prova! Que aconteceria, então?

LAMBDA: Ficaríamos perdidos. A prova adquiriria absoluta respeitabilidade e os lemas ficariam fora de suspeição. Nossa análise de prova logo seria esquecida.[68] Sem refuta-

---

[67] H. G. Forder [1927], p. viii. Ou: "Um dos principais méritos das provas é que elas instilam certo ceticismo quanto ao resultado provado" (Russell [1903], p. 360. Ele dá também excelente exemplo).

[68] É sabido que a crítica pode lançar dúvida e, de fato, refutar "verdades *a priori*" e assim converter provas em meras explicações. É tão sabido quanto importante que a falta de crítica ou de refutações pode converter conjecturas implausíveis em "*verdades a priori*" e assim explicações aproximativas em provas. Os dois principais exemplos disso são a ascensão e queda de Euclides e Newton. A história de sua queda é bem conhecida, mas a história de sua ascensão em geral é mal contada.

A geometria de Euclides parece ter sido proposta como uma teoria cosmológica (cf. Popper [1952], pp. 187-9). Seus "postulados" e "axiomas" (ou "noções comuns") foram propostos como proposições vazias e provocativas, em desafio a Parmênides e Zeno, cujas doutrinas acarretavam não só a falsidade, mas inclusive falsidade lógica, o absurdo desses postulados. Só mais tarde os "postulados" foram tomados como indubitavelmente verdadeiros e os "axiomas" corajosos antiparmenidianos (tais como "o todo é sempre maior que uma das partes") tornaram-se tão triviais que eram omitidos nas posteriores análises de provas, convertendo-se em "lemas implícitos". Esse processo começou com Aristóteles: ele tachou Zeno de bulhento excêntrico e a seus argumentos de "sofismas". Essa história foi contada recentemente em pormenores por Árpád Szabó ([1960], pp. 65-84). Szabó mostrou que no tempo de Euclides a palavra "axioma" — como "postulado" — significava uma proposição no diálogo crítico (dialética) exposta para ser testada quanto às conseqüências sem ser admitida como verdadeira pelo interlocutor. É ironia da história que seu significado se tenha virado do avesso. O apogeu da autoridade de Euclides foi no Iluminismo. Clairut conclama seus colegas a não "obscurecer as provas e desgostar os leitores" declarando verdades evidentes: Euclides só o fez para convencer "sofistas obstinados" ([1741], pp. x e xi). la

Do mesmo modo, a mecânica e a teoria da gravitação de Newton foram expostas como suposição audaciosa, que foi ridicularizada e chamada de "oculta" por Leibniz e posta em suspeição pelo próprio Newton. Mas poucas décadas depois — na ausência de refutações — seus axiomas passaram a ser tomados como verdade indubitável. As suspeitas foram esquecidas, os críticos foram tachados de "excêntricos" ção não se pode manter suspeição: o holofote da suspeição logo se desliga se um contra-exemplo não o reforça, dirigindo o foco de luz da refutação para um aspecto desprezado da prova que dificilmente teria sido notado na meia-luz da "verdade trivial".

Tudo isso mostra que não se pode colocar prova e refutações em compartimentos estanques. Esta a razão pela qual proponho rebatizar nosso *"método de incorporação de lema"* com o nome de *"método de prova e refutações"*. Permitam-me expor seus principais aspectos em três regras heurísticas:

Norma 1. Se tivermos uma conjectura, disponhamo-nos a comprová-la e a refutá-la. Inspeccionemos a prova cuidadosamente para elaborar um rol de lemas não triviais (análise de prova); encontremos contra-exemplos tanto para a conjectura (contra-exemplos globais) como para os lemas suspeitos (contra-exemplos locais).

Norma 2. Se tivermos um contra-exemplo global, desfaçamo-nos de nossa conjectura, acrescentemos à nossa análise de prova um lema apropriado que venha a ser refutado pelo contra-exemplo, e substituamos a conjectura desprezada por outra melhorada que incorpore o lema como uma condição.[69] *Não permitamos que uma refutação seja destituída como um monstro.*[70] *Esforcemo-nos por tornar explícitos*[71] *todos os "lemas implícitos".*

---

quando não obscurantistas; algumas de suas mais duvidosas suposições vieram a ser consideradas tão triviais que os manuais nem mesmo as declaravam. O debate — de Kant a Poincaré — já não era sobre a verdade da teoria newtoniana, mas sobre a natureza de sua certeza. (Essa inversão na apreciação da teoria newtoniana foi pela primeira vez notada por Karl Popper — veja-se seu [1936*a*], passim).

A analogia entre ideologias políticas e teorias científicas é ainda de maior alcance do que ordinariamente se pensa: as ideologias políticas que primeiro podem ser debatidas (e talvez aceitas somente sob pressão) podem converter-se em indiscutível senso comum até mesmo no espaço de uma geração: os críticos são esquecidos (e talvez executados) até que uma revolução vindique suas objeções.

[69] Essa norma parece ter sido formulada pela primeira vez por P. L. Seidel ([1847], p. 383). Veja-se mais adiante, p.

[70] Tenho o direito de expor qualquer exemplo que satisfaça as condições de seu argumento, e tenho forte suspeita de que será chamado de bizarro; exemplos inoportunos são de fato embaraçosos, prejudiciais ao seu teorema" (G. Darboux [1874*b*]).

[71] Estou horrorizado com a horda de lemas implícitos. Terei muito trabalho para livrar-me deles" (G. Darboux [1883]).

Norma 3. Se tivermos um contra-exemplo local, confiramos para verificar se ele não é também contra-exemplo global. Se for, podemos facilmente aplicar a Regra 2.

(*d*) *Prova "versus" análise de prova. O relativismo dos conceitos de teorema e rigor em análise de prova.*

ALFA: Que você entende por "apropriado" em sua *Regra 2*?

GAMA: É completamente redundante. *Qualquer* lema que seja refutado pelo contra-exemplo em questão pode ser melhorado — porque *qualquer* lema desses irá restaurar a validade da análise de prova.

LAMBDA: O quê! Então um lema como "Todos os poliedros têm no mínimo 17 arestas" teria a ver com o cilindro! E qualquer outra conjectura *ad hoc* aleatória faria o mesmo, desde que viesse a ser refutada por um contra-exemplo.

GAMA: Por que não?

LAMBDA: Acabamos de criticar os antimonstros e os antiexceções por esquecerem as provas.[72] Agora você está fazendo o mesmo, inventando um verdadeiro monstro: *análise de prova sem prova*! A única diferença entre você e um antimonstro é que você teria feito Delta explicitar suas definições arbitrárias e incorporá-las no teorema como lemas. E *não há* diferença alguma entre antiexceções e sua análise de prova. A única defesa contra tais métodos *ad hoc* é usar lemas *adequados*, isto é, lemas que se harmonizam com o espírito da experiência mental! Ou você trocaria a beleza das provas da matemática por um tolo jogo formal?

GAMA: Melhor que o seu "espírito de experiência mental"! Estou defendendo a objetividade da matemática contra o seu psicologismo.

ALFA: Obrigado, Lambda, você reafirmou minha questão: não se pode inventar um novo lema no vazio para enfrentar um contra-exemplo global e não local: em vez disso, inspeciona-se a prova com cuidado apurado e nela se descobre o lema. Logo, caro Teta, não "elaboro" lemas ocultos, nem os "contrabandeio" nas provas, caro Kapa. A prova contém todos eles — mas um matemático maduro compreende a prova a partir de um breve resumo. Não devemos confundir *prova infalível com análise de prova inexata.* Ainda há o irrefutável "teorema-mestre": "Todos os po-

---

[72] Vejam-se pp. 47 e 56.

liedros em que se pode fazer a experiência mental", ou, em resumo, "todos os poliedros cauchyanos são eulerianos." Minha análise de prova aproximada traçou uma linha divisória da classe dos poliedros cauchyanos a lápis que — admito — não estava muito bem apontado. Agora, contra-exemplos excêntricos nos ensinam a preparar as pontas dos nossos lápis. Mas, em primeiro lugar: nenhum lápis é apontado suficientemente bem (pois, se tentamos fazê-lo, a ponta quebra); segundo, apontar lápis não é matemática criativa.

GAMA: Estou confuso. Qual a sua *real* posição? Primeiro você era o campeão das refutações.

ALFA: Ah, minha cabeça! Intuição amadurecida liquida controvérsias.

GAMA: Sua primeira intuição madura levou-o à sua análise de prova perfeita. Você pensou que seu "lápis" estava rigorosamente apontado.

ALFA: Eu esqueci as dificuldades da comunicação lingüística — especialmente com pedantes e céticos. Mas o cerne da Matemática é a experiência mental — a prova. Sua articulação lingüística — a análise da prova — é necessária para a comunicação, mas irrelevante. Estou interessado em poliedros, você em linguagem. Você não vê a pobreza dos seus contra-exemplos? Eles são lingüísticos, e não poliedrais.

GAMA: Então, refutar um teorema apenas trai nossa incapacidade de apreender os lemas nele ocultos? Então um "teorema" é sentido, a menos que entendamos sua prova?

ALFA: Desde que a incerteza da linguagem torna inalcançável o rigor da análise da prova, e transforma a formação de teoremas um processo interminável, por que nos importarmos com o teorema? Matemáticos atuantes, sem dúvida, não se importariam. Se, contudo, outro insignificante "contra-exemplo" é formulado, eles não admitem que seu teorema seja refutado, mas, no máximo, que seu "domínio de validade" seja adequadamente limitado.

LAMBDA: Quer dizer que você não se interessa nem por contra-exemplo, análise de prova nem incorporação de lema?

ALFA: Certo. Rejeito todas as suas normas. Em vez disso, proponho uma única norma: *Provas rigorosamente elaboradas (claras como cristal)*.

LAMBDA: Você argumenta que o rigor da análise de prova é inatingível. E *o rigor da prova*, é atingível? Será que experiências mentais "claras como cristal" não levarão a resultados paradoxais ou mesmo contraditórios?

ALFA: A linguagem é imprecisa, mas o pensamento pode atingir rigor absoluto.

LAMBDA: Mas não é certo que nossos antepassados "em cada fase de sua evolução também pensavam tê-la atingido? Se eles nos decepcionaram, não pode acontecer o mesmo conosco em relação aos pósteros?" [73]

ALFA: "Atualmente, o rigor absoluto está atingido." [74]

[*Murmúrios na sala de aula*] [75]

GAMA: Esta teoria da prova "clara como cristal" é puro psicologismo! [76]

ALFA: Mas é melhor que a pedanteria da lógica lingüística da sua análise de prova! [77]

---

73 Poincaré [1905], p. 214.

74 *Ibidem,* p. 216. Alterações no critério de "rigor da prova" engendram grandes revoluções em matemática. Os pitagóricos afirmavam que provas rigorosas têm que ser aritméticas. Entretanto, eles descobriram rigorosa prova de que a raiz quadrada de dois era "irracional". Quando esse escândalo tornou-se público, o critério foi mudado: a "intuição" aritmética foi desacreditada, e a intuição geométrica assumiu seu lugar. Isso significou fundamental e complicada reorganização do conhecimento matemático (p.e., a teoria das proporções). No século XVIII, figuras "enganadoras" puseram provas geométricas em descrédito, e o século XIX viu a intuição aritmética reentronizada com o auxílio da incômoda teoria dos números reais. Hoje a principal disputa é em torno do que seja rigoroso e o que não é em teoria e provas metamatemáticas, como se demonstra pelas discussões muito conhecidas sobre a aceitabilidade dos experimentos mentais de Zermelo e Gentzen.

75 Como já observamos, a turma é muito adiantada.

76 O termo "psicologismo" foi cunhado por Husserl ([1900]). Para uma crítica anterior do psicologismo, veja-se Frege ([1893], pp. xv-xvi). Os intuicionistas modernos (diferentemente de Alfa) abertamente aceitam o psicologismo: "Um teorema matemático exprime um fato puramente empírico, isto é, o êxito de certa construção... a matemática... é um estudo de certas funções da mente humana" (Heyting [1956], pp. 8 e 10). Como conciliam psicologismo com certeza é seu segredo inviolável.

77 Que mesmo se tivéssemos conhecimento perfeito não poderíamos dizê-lo com perfeição era lugar-comum entre antigos céticos (cf. Sexto Empírico [c. 190], I. 83-8), mas isso foi esquecido no Iluminismo. Esse modo de pensar foi redescoberto pelos intuicionistas: eles aceitavam a filosofia da matemática de Kant, mas observavam

LAMBDA: Sem juramento, sou também cético quanto a sua concepção de matemática como "atividade essencialmente sem linguagem do espírito".[78] Como pode ser falsa ou verdadeira uma atividade? Só pensamento *articulado* pode tentar a verdade. A prova pode não ser suficiente: temos também que estabelecer o que a prova comprovou. A prova é apenas um degrau no trabalho do matemático, e tem que ser acompanhada de análise da prova e refutações, e concluída pelo teorema rigoroso. Temos que *combinar* o "rigor da prova" com o "rigor da análise da prova".

ALFA: Você ainda espera chegar a uma análise de prova perfeitamente rigorosa? No caso, por que você não começou com a formulação do seu novo teorema "baseado" no cilindro? Você apenas o mencionou. Sua persistência e falta de jeito nos teriam feito gargalhar. E isso só após o primeiro dos seus novos contra-exemplos! Você substituiu nosso teorema original por uma seqüência de teoremas cada vez mais precisos — *mas apenas em teoria.* Que dizer da prática desse modo de relativização? Contra-exemplos cada vez mais excêntricos serão cotejados por temas sempre mais triviais — produzindo um "eterno retorno"[79] de teoremas cada vez mais compridos e desajeitados.[80] A crítica foi recebida como estimuladora enquanto parecia conduzir à verdade. Mas é sem dúvida

---

que "entre a perfeição da matemática propriamente dita e a perfeição da linguagem matemática não se percebe clara ligação" (Brouwer [1952], p. 140). "A expressão pela palavra escrita ou falada — embora necessária para comunicação — nunca é adequada... A tarefa da ciência não consiste em estudar as línguas, mas criar idéias" (Heyting [1939], pp. 74-5).

[78] Brouwer [1952], p. 141.

[79] A língua inglesa tem o termo *"infinite regress"*, mas é apenas um caso especial de "infinito vicioso" *(schlechte Unendlichkeit)*, e não se aplicaria aqui. Alfa evidentemente cunhou essa expressão tendo em mente "círculo vicioso".

[80] Via de regra, os matemáticos evitam longos teoremas pelo artifício alternativo de longas definições, de modo que nos teoremas apareçam apenas os termos definidos (p.e. "poliedro comum") — isto é, mais econômico desde que uma definição abrevia muitos teoremas. Mesmo assim, as definições tomam enorme espaço em exposições "rigorosas", embora os monstros que levem a elas sejam raramente mencionados. A definição de um "poliedro euleriano" (com as definições de alguns dos termos definidores) toma cerca de 25 linhas em Forder [1927] (pp. 67 e 29); a definição de "poliedro comum" na edição de 1962 da *Enciclopédia Britânica* preenche 45 linhas.

frustrante quando destrói qualquer verdade e nos deixa interminavelmente ao léu. Eu detenho esse eterno retorno em *pensamento* — mas você nunca o detém em *linguagem*.

GAMA: Mas eu nunca declarei que os contra-exemplos tenham de ser *infinitamente muitos*. A certa altura podemos atingir a verdade e o fluxo de refutações cessará. Mas certamente não saberemos quando. Só as refutações são conclusivas — as provas são uma questão de psicologia. [81]

LAMBDA: Ainda confio que a luz da certeza absoluta iluminará quando as refutações forem desaparecendo aos poucos!

KAPA: Mas terminarão? Mas se Deus criou os poliedros, então por que todas as regras universais sobre eles — formuladas em linguagem humana — são infinitamente longas? Não será antropomorfismo blasfemo presumir que teoremas verdadeiros (divinos) sejam de extensão finita? Convenhamos: por alguma razão, todos vocês se estão aborrecendo com refutações e formação de teoremas um a um. Por que não acabar logo com a discussão e a brincadeira? Vocês já liquidaram o "*Quod erat demonstrandum*". Por que não liquidar também o "*Quod erat demonstratum*"? A verdade pertence somente a Deus.

TETA (*à parte*): Um cético religioso é o pior inimigo da ciência!

SIGMA: Não vamos cair no melodrama! Afinal de contas, o que está em jogo é apenas uma estreita margem de penumbra, de imprecisão. Trata-se simplesmente, como declarei antes, de que *nem todas as proposições são verdadeiras ou falsas*. Existe uma terceira categoria que eu chamaria agora de "*mais ou menos rigorosas*".

TETA (*à parte*): Lógica trivalente — o fim da racionalidade crítica!

---

81 "A lógica nos faz rejeitar certos argumentos, mas não nos pode fazer crer em argumento algum" (Lebesgue [1928], p. 328). *Nota do Editor:* Deve-se observar que a declaração de Lebesgue, tomada literalmente, é falsa. A lógica moderna dotou-nos de uma rigorosa caracterização de validade, que, como se pode mostrar, alguns argumentos satisfazem. Assim, a lógica certamente pode nos levar a crer num *argumento* embora ela não nos possa fazer acreditar na *conclusão* do argumento válido — porque podemos não acreditar em uma ou mais das premissas.

SIGMA: ...e afirmamos seu domínio de validade com um rigor que é mais ou menos adequado.

ALFA: Adequado para quê?

SIGMA: Adequado para a solução do problema que queremos resolver.

TETA (*à parte*): Pragmatismo! Será que todos perderam o interesse na *verdade*?

KAPA: Ou adequado para o *Zeitgeist*! "Suficiente para o dia é o rigor do dia." [82]

TETA: Historicismo! (*Desânimo*)

ALFA: As normas de Alfa para "*análise de prova rigorosa*" privam a matemática de sua beleza, dando-nos a minuciosa pedanteria de teoremas longos e desajeitados que enchem livros espessos e opacos, acabando por nos levar ao eterno retorno. A escapatória de Kapa é convenção, pragmatismo matemático a de Sigma. Qual a alternativa para um racionalista?!

GAMA: Quer dizer então que um racionalista deve saborear as "*provas rigorosas*" de Alfa, a intuição inefável, os "lemas implícitos", a zombaria do Princípio de Retransmissão de Falsidade, e eliminação de refutações? A matemática não deverá manter quaisquer relações com a crítica e a lógica?

BETA: Seja como for, já estou saturado desses subterfúgios verbais inconclusivos. O que pretendo é aprender matemática, e não estou interessado nas dificuldades filosóficas da justificação de suas bases. Mesmo que falhe a razão para tal justificação, meu instinto natural me dá a certeza. [83] Acho que Ômega tem uma interessante lista de provas alternativas — e preferiria ouvi-lo.

---

82 E. H. Moore [1902], p. 411.

83 "A natureza refuta os céticos, a razão refuta os dogmáticos" (Pascal [1659], pp. 1206-7). Poucos matemáticos confessariam — como Beta — que a razão é demasiado frágil para justificar a si mesma. A maioria deles adota algo de dogmatismo, historicismo ou confuso pragmatismo, e permanece curiosamente cega à sua insustentabilidade; por exemplo; "As verdades matemáticas são de fato o protótipo do completamente incontestável ... Mas o rigor da matemática não é absoluto; ela está num processo de contínuo desenvolvimento; os princípios da matemática não estão congelados de uma vez por todas, mas têm vida própria e podem inclusive ser suscetíveis de disputas científicas" (A. D. Aleksandrov [1956], p. 7). (Essa citação pode nos lembrar que a dialética tenta compreender a mudança sem empregar crítica: as verdades estão "em contínuo desenvolvimento", mas sempre "completamente incontestáveis".)

ÔMEGA: Mas eu as exporia numa estrutura "filosófica"!
BETA: Pouco me importa o envoltório, desde que haja alguma coisa dentro dele.

Nota. Esforçamo-nos por mostrar, nessa seção, como o surgimento da crítica matemática tem sido a força motora na busca dos "embasamentos" da matemática.

A distinção que fizemos entre *prova* e *análise da prova*, bem como a correspondente distinção entre *rigor da prova* e *rigor da análise da prova* parece decisiva. Por volta de 1800 o *rigor da prova* (experimento mental ou elaboração cristalinos) era contrastado com argumento confuso e generalização indutiva. Isso é o que Euler entendia por *rigida demonstratio*, e também a idéia de Kant de matemática infalível tinha base nesse conceito (veja-se seu paradigma de uma prova matemática em seu [1781], pp. 716/7). Pensava-se também que pudéssemos provar o que nos propuséssemos provar. Não ocorria a ninguém que a articulação verbal de um experimento mental implica alguma dificuldade real. A lógica formal e a matemática aristotélicas eram disciplinas totalmente distintas — sendo a primeira considerada inteiramente sem valor pelos matemáticos. Prova ou experimento mental encerravam plena convicção sem qualquer esquema dedutivo ou estrutura "lógica".

Em princípios do século XIX o caudal de contra-exemplos trouxe confusão. Uma vez que as provas eram cristalinas, as refutações tinham de ser monstruosidades miraculosas, a serem completamente apartadas de provas indubitáveis. A *revolução do rigor*, de Cauchy, repousava na inovação heurística de que o matemático não deve parar na prova: deve prosseguir e esclarecer aquilo que ele provou, mediante enumeração das exceções, ou antes, enunciando um domínio seguro em que a prova é válida. *Mas nem Cauchy — nem Abel — perceberam qualquer relação entre os dois problemas. Nunca lhes ocorreu que, se descobrissem uma exceção, deveriam fazer outra inspeção da prova.* (Outros praticavam o método da anti-exceção, ajuste de monstro ou mesmo "fechavam os olhos" — mas todos concordavam em que a prova era tabu e que nada tinha a ver com as "exceções".)

O consórcio de lógica e matemática no século XIX teve duas fontes principais: a geometria não-euclideana e a *revolução do rigor de Wierstrass.* Elas ensejaram a integração da prova (experimento mental) e as refutações, e começaram a desenvolver a *análise da prova*, paulatinamente introduzindo esquemas dedutivos no experimento mental da prova. O que chamávamos de "método de prova e refutações" era a sua inovação heurística: *pela primeira vez ele unia lógica e matemática.* O rigor weierstrassiano triunfou sobre os adversários antimonstros e ocultadores de lema que com o seu reacionarismo empregavam jargões como "obtusidade do rigor", "artificialidade *versus* beleza" etc. *O rigor da análise da prova suplantava o rigor da prova*: mas os matemáticos, em sua maioria, só toleravam seu pedantismo na medida em que ela lhes prometia certeza absoluta.

A teoria dos conjuntos de Cantor — que trazia ademais uma safra de inesperadas refutações de teoremas "rigorosos" — converteu muitos weierstrassianos da velha guarda em dogmáticos, sempre prontos a combater os "anarquistas", impedindo os novos monstros ou referindo "lemas ocultos" em seus teoremas que representavam "a última palavra em rigor", ao mesmo tempo em que reprimindo o tipo mais velho de "reacionários" por idênticos pecados.

Alguns matemáticos compreenderam então que o impulso de rigor da análise da prova no método de provas e refutações leva a um círculo vicioso. Teve início uma contra-revolução "intuicionista": foi condenado o pedantismo lógico-lingüístico da *análise da prova*, e inventaram-se novos padrões extremistas de rigor para as *provas*; mais uma vez divorciaram-se matemática e lógica.

Os logicistas tentaram salvar o casamento e naufragaram nos paradoxos. O rigor hilbertiano transformou a matemática numa teia de aranha de *análises* de prova, alegando deter o infinito retorno por *provas* de consistência cristalina de sua metateoria intuicionista. A "camada de base", a região de familiaridade irrepreensível, passava a ser os experimentos mentais da matemática (Cf. Lakatos [1962], pp. 179-84).

Mediante cada "revolução de rigor", a análise da prova penetrava mais fundo nas provas até a "*camada básica*" do "conhecimento corriqueiro do senso comum" (cf. também nota 63), em que a intuição cristalina, o rigor da prova, reinava soberana e a crítica era banida. Assim, *diferentes níveis de rigor só diferem quanto a traçarem a linha entre o rigor da análise da prova e o rigor da prova*, isto é, quanto a *onde deve cessar a crítica e começar a justificação*. A "certeza é sempre inatingível"; nunca se acham os "embasamentos" — mas a "astúcia da razão" transforma cada aumento de *rigor* num aumento de *conteúdo*, no âmbito da matemática. Mas esse caso vai além do que pretendemos no presente estudo[84].

[84] *Nota dos Organizadores*. Essa nota histórica, acreditamos, subestima um pouco das realizações dos "rigoristas" matemáticos. A tendência no sentido de "rigor" em matemática era, como de fato transpirava, no sentido de duas metas distintas, uma das quais inatingível. Essas duas metas são, primeiro, argumentos ou provas rigorosamente corretos (nos quais a verdade é infalivelmente transmitida das premissas à conclusão) e, segundo, axiomas ou primeiros princípios rigorosamente verdadeiros (que devem dar a injeção original de verdade no sistema — a verdade seria então transmitida a toda a matemática via provas rigorosas). A primeira dessas metas veio a ser atingível (dadas, é claro, certas pressuposições), ao passo que a segunda mostrou-se inatingível.

Frege e Russell elaboraram sistemas em que a matemática poderia ser traduzida (falivelmente) (Veja-se adiante p.) e nos quais as regras da prova são finitas em número e especificadas de antemão. Resulta que se pode mostrar (e é aqui que entram as pressuposições mencionadas) que qualquer sentença que pode ser provada empregando essas regras é conseqüência válida dos axiomas do sistema (isto é, que se esses axiomas são verdadeiros, a sentença provada *deve* também ser verdadeira). Nesses sistemas, não há "vazios" nas provas, e se uma seqüência de sentenças é uma prova ou não, pode ser conferido num número finito de fases. (Evidentemente, se esse processo de conferência mostra que a seqüência de fórmulas não é uma prova no sistema considerado, isto não estabelece que nenhuma prova autêntica da fórmula final existe dentro do sistema. Assim, na conferência da prova, existe uma assimetria que opera em favor da verificação e contra a falsificação.) Não há sentido sério em que tais provas sejam falíveis. (É certo que, ao fazer essa conferência, alguém possa cometer um erro inexplicável, mas isso não é dúvida grave. É certo que o [meta-] teorema não formal de que essas provas válidas transmitem verdade pode ser falso — mas não há séria razão para pensar que o seja.) Mas os axiomas desses sistemas são falíveis num sentido não trivial. A tentativa de tudo em matemática partir de verdades "evidentes por si", "lógicas", como se sabe muito bem, fracassou.

6. *Volta à Crítica da Prova Mediante Contra-Exemplos Que São Locais, Mas Não Globais. O Problema do Conteúdo.*

(*a*) *Conteúdo crescente por provas mais profundas*

ÔMEGA: Aprecio o método de Lambda de prova e refutações e compartilho sua fé em que de algum modo chegaremos finalmente a uma rigorosa análise da prova, e com isto a um teorema com certeza verdadeiro. Mas, mesmo assim, nosso próprio método cria um novo problema: a análise da prova, na medida em que aumentando a certeza, diminui o conteúdo. Cada novo lema na análise da prova, cada nova condição correspondente no teorema, reduz seu domínio. O aumento de rigor aplica-se a número cada vez menor de poliedros. A incorporação do lema não significará o mesmo engano de Beta na procura de maior segurança? Não teríamos "retirado demasiado radicalmente, deixando de fora dos muros numerosos poliedros eulerianos"? [85] Em ambos os casos, podemos estar jogando fora a água do banho junto com a criança. *Devemos ter um contrapeso para o efeito do rigor na relação conteúdo--decréscimo.*

Já demos vários passos nesse sentido. Permitam-me que lembre dois casos e os reexamine.

Um deles foi quando deparamos com contra-exemplos locais mas não globais. [86] Gama refutou o terceiro lema de nossa análise da prova (de que "ao retirar triângulos da estrutura plana triangulada temos apenas duas possibilidades: ou retiramos uma aresta ou retiramos duas arestas e um vértice"). Ele retirou um triângulo do meio da rede sem retirar um único vértice ou uma aresta.

Tivemos então duas possibilidades. [87] A primeira seria incorporar o lema falso ao teorema. Isso teria sido um processo perfeitamente adequado com respeito à certeza, mas teria reduzido o domínio do teorema tão drasticamente que ele se aplicaria apenas ao tetraedro. Junto com

---

[85] Veja-se acima, p 46.

[86] Para a discussão deste primeiro caso, veja-se acima, pp. 16-18.

[87] Ômega parece ignorar uma terceira possibilidade: Gama pode perfeitamente alegar que visto contra-exemplos locais, mas não globais, não exibirem qualquer violação do princípio de retransmissão de falsidade, nada há a fazer.

os contra-exemplos teríamos banido todos os exemplos, exceto um.

Foi essa a argumentação subjacente à adoção da alternativa: em vez de *estreitar* o domínio do teorema pela incorporação do lema, nós o *ampliamos* ao substituir o lema falseado por outro não falseável. Mas esse padrão vital para a formação de teorema foi logo esquecido, e Lambda não se incomodou em formulá-lo como norma heurística. Ela deveria ser assim:

Norma 4. Se tivermos um contra-exemplo que seja local, mas não global, tentemos melhorar nossa análise da prova mediante substituição do lema refutado por outro não falseado.

Contra-exemplos do primeiro tipo (locais mas não globais) podem ensejar oportunidade de *aumentar* o conteúdo de nosso teorema que está sendo constantemente *reduzido* sob a pressão de contra-exemplos do terceiro tipo (globais, mas não locais).

GAMA: A *Norma 4* exibe ainda a fragilidade da "intuição da perfeita análise de prova" de Alfa, agora descartada.[88] Teríamos arrolado os lemas suspeitos, incorporando-os imediatamente e — sem atentar para contra-exemplos — constituído teoremas quase vazios.

PROFESSOR: Ômega, vejamos o segundo exemplo que você prometeu.

ÔMEGA: Na análise de prova de ~~Ômega~~ Beta o segundo lema era que "*todas as faces são triangulares*".[89] Isso pode ser falseado por numerosos contra-exemplos locais, mas não globais, como no caso do cubo ou do dodecaedro. Por conseguinte, professor, o senhor o substituiu por um lema que não é falseado por eles, isto é, que "*qualquer face cortada por uma aresta diagonal converte-se em duas partes*". Mas, em vez de recorrer à *Norma 4*, o senhor censurou Beta por "análise de prova descuidada". O senhor convirá que a *Norma 4* é mais sensata do que "ser mais cuidadoso".

BETA: Você tem razão, Gama, e me faz compreender melhor "o método da melhor espécie dos antiexceções".[90] Eles começam com uma cautelosa análise de prova, "segura" e sistematicamente aplicando a *Norma 4* paula-

---

88 Cf. acima, p. 69.

89 Para a discussão deste segundo caso, cf. acima, pp. 56-57.

90 Veja-se acima, pp. 57-58.

tinamente elaboram o teorema sem incorrer em falsidade. Afinal, é questão de temperamento achegar-se à verdade sempre por exageros ou por subestimativas.

ÔMEGA: Isto pode estar certo. Mas podemos interpretar a *Norma 4* de dois modos. Até agora consideramos apenas a primeira, a interpretação mais fraca: "elabora-se *facilmente* e melhora-se a prova substituindo o falso lema por outro ligeiramente modificado que o contra-exemplo não refute";[91] tudo o que se precisa para isso é uma inspeção "mais cuidadosa" da prova e uma "observação simples".[92] Nessa interpretação, a *Norma 4* não passa de remendo local *dentro da estrutura da prova original.*

Também concedo quanto à interpretação radical alternativa: substituir o lema — ou possivelmente todos os lemas — não apenas na tentativa de espremer a última gota de conteúdo de determinada prova, mas talvez pela invenção de outra completamente diferente, mais ampla e mais profunda.

PROFESSOR: Por exemplo?

ÔMEGA: Discuti antes a conjectura Descartes-Euler com um amigo que de pronto ofereceu uma prova assim: imaginemos que o poliedro seja oco, com a superfície feita de material duro, digamos, de cartão. As faces devem ser pintadas na parte de dentro. Iluminemos bem o interior e coloquemos numa das faces, num furo apropriado, a lente de uma máquina fotográfica de modo que ela possa fotografar por dentro todas as arestas e vértices.

SIGMA (*à parte*): Máquina fotográfica em prova matemática?

ÔMEGA: Assim obtenho a fotografia de uma estrutura plana, que pode ser inspecionada exatamente como a estrutura em sua prova. Do mesmo modo também, posso mostrar que, se as faces estiverem simplesmente ligadas, $V - A + F = 1$, e acrescentando a face que contém a lente, e que é invisível na foto, obtenho a fórmula de Euler. O lema principal é que existe uma face do poliedro que, se transformada em lente da câmara, fotografa o interior do poliedro de modo que todas as arestas e todos os vértices apareçam no filme. Agora, introduzo a seguinte fórmula: em vez de "um poliedro que tenha pelo

[91] Veja-se p. 17.
[92] *Ibidem.*

menos uma face da qual podemos fotografar *todo* o interior", direi "um poliedro semiconvexo".

BETA: Sendo assim, seu teorema será: todos os poliedros semiconvexos com faces simplesmente ligadas são eulerianos.

ÔMEGA: Por questão de brevidade e em homenagem ao inventor dessa idéia especial de prova, eu preferiria dizer: "*Todos os poliedros gergonnianos são eulerianos.*" [93]

GAMA: Mas há muitos poliedros simples que, embora perfeitamente eulerianos, são tão mal recortados que não têm face da qual se possa fotografar todo o interior! A prova de Gergonne não é mais profunda que a de Cauchy; pelo contrário, é a de Cauchy que é mais profunda que a de Gergonne!

ÔMEGA: É claro! Suponho que o professor conhecia a prova de Gergonne, considerava-a insatisfatória por algum contra-exemplo local, mas não global e substituiu o lema ótico, fotográfico, pelo lema mais amplo, topológico, da planificação. Com isso chegou à prova mais profunda de Cauchy, não mediante uma "cuidadosa análise de prova" seguida de ligeira alteração, mas mediante inovação imaginativa radical.

PROFESSOR: Aceito seu exemplo — mas eu não conhecia a prova de Gergonne. Mas se você conhecia, por que não nos falou sobre ela?

ÔMEGA: Porque imediatamente refutei-a por poliedros não-gergonnianos que são eulerianos.

GAMA: Como acabei de dizer, também descobri tais poliedros. Mas isso será razão para desfazer-nos de toda a prova?

---

93 A prova de Gergonne encontra-se em Lhulier [1812-13*a*], páginas 177-9. No original, ela não continha, evidentemente, artifício fotográfico. Diz ela: "Tome-se um poliedro, uma de cujas faces seja transparente; e imagine-se que o olho se aproxime dessa face do lado de fora, tão de perto que possa perceber o interior de todas as demais faces...". Gergonne observa, com modéstia, que a prova de Cauchy é mais profunda, que "tem a valiosa vantagem de que não presume absolutamente a convexidade". (Não lhe ocorre, porém, o que ela de fato presume). Jacob Steiner mais tarde redescobriu a mesma prova ([1826]). Sua atenção foi atraída então para a prioridade de Gergonne, de modo que ele leu o trabalho de Lhulier com a lista de exceções, mas isso não o impediu de concluir sua prova com o "teorema": "Todos os poliedros são eulerianos". (Foi o trabalho de Steiner que fez Hessel — o Lhulier dos alemães — escrever o seu [1833].)

ÔMEGA: Acho que sim.

PROFESSOR: Você já ouviu falar da prova de Legendre? Você também se descartaria dela?

ÔMEGA: Certamente que sim. É ainda menos satisfatória: seu conteúdo é ainda mais pobre que o da prova de Gergonne. Sua hipótese começava com o mapeamento do poliedro com uma projeção central numa esfera contendo o poliedro. Tomou 1 como raio da esfera. Escolheu o centro de projeção de modo que a esfera fosse abrangida completamente, desde que, e apenas desde que por uma rede de polígonos esféricos. Assim, seu primeiro lema era de que tal ponto existe. Seu segundo lema era de que, para a rede poliedral na esfera, $V - A + F = 2$, mas conseguiu isso ao decompor em lemas trivialmente verdadeiros os lemas da trigonometria esférica. Mas um ponto do qual tal projeção central seja possível só existe em poliedros convexos e uns poucos poliedros convenientes "semiconvexos". Mas esse teorema: "*Todos os poliedros legendrianos são eulerianos*"[94] difere *completamente* do de Cauchy, mas apenas para pior. É "infelizmente incompleto".[95] É um "esforço baldado que pressupõe condições de que o teorema de Euler não depende absolutamente.

---

[94] A prova de Legendre encontra-se em seu [1803], mas não o teorema gerado pela prova, de vez que a análise de prova e formação de teorema eram virtualmente desconhecidos no século XVIII. Legendre primeiro define poliedros como sólidos cuja superfície consiste de faces poligonais (fig. 16). Depois prova que $V - A + F = 2$ em geral (p. 228). Mas há uma emenda antiexceção numa nota de rodapé à p. 164, dizendo que só se devem considerar poliedros convexos. Ele ignorava a franja quase convexa. Poinsot foi o primeiro, em seu [1809], a observar ou comentar a prova de Legendre, que a fórmula de Euler "é válida não apenas para os sólidos convexos comuns, isto é, para aqueles cuja superfície é cortada por uma linha reta em não mais que dois pontos: vale também para poliedros com ângulos reentrantes, desde que se possa achar um ponto no interior do sólido que sirva como centro de uma esfera na qual se possam projetar as faces do poliedro mediante linhas partindo do centro, de modo que as faces projetadas não sobreponham. Isso aplica-se a uma infinidade de poliedros com ângulos reentrantes. De fato, a prova de Legendre se aplica, tal como o afirma, a todos esses poliedros adicionais" (p. 46).

[95] E. de Jonquières prossegue, levantando um argumento a partir do [1858] de Poinsot: "Ao invocar Legendre, e como altas autoridades, nada mais se faz que estimular um difundido preconceito de que são vítimas até mesmo alguns dos melhores espíritos: que o domínio de validade do teorema de Euler consiste apenas de poliedros convexos" ([1890*a*], p. 111).

Tem que ser descartado e tem-se que procurar princípios mais gerais." [96]

BETA: Ômega tem razão. "A convexidade é, até certo ponto, casual para a característica euleriana. Um poliedro convexo podia ser transformado, por exemplo, por uma saliência ou estendendo um ou mais dos vértices, num poliedro não convexo com os mesmos números configuracionais. A relação de Euler corresponde a algo mais fundamental que a convexidade." [97] E você jamais captará isso por seus "quase" ou "semipregueamentos".

ÔMEGA: Pensei que o professor a tivesse apreendido nos princípios topológicos da prova de Cauchy em que *todos* os lemas da prova de Legendre são substituídos por outros completamente novos. Mas deparei então com um poliedro que refutava até mesmo essa prova que é, sem dúvida, a mais profunda até agora.

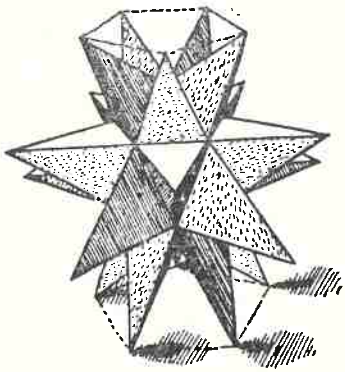


Fig. 15

PROFESSOR: Vamos ver isso.

ÔMEGA: Todos vocês se lembram do "ouriço" (fig. 7) de Gama. É claro que não era euleriano. Mas nem todos os poliedros estelados são não-eulerianos! Vejamos por exemplo o "grande dodecaedro estelado" (fig. 15). Ele consiste, como o "dodecaedro estelado pequeno" de pentagramas, mas diferentemente dispostos. Tem 12 faces, 30 arestas e 20 vértices, de modo que $V - A + F = 2$. [98]

---

96 Isto é de Poinsot ([1858], p. 70).

97 D. M. Y. Sommerville ([1929], pp. 143-4).

98 Trata-se do "grande dodecaedro estelado" já divisado por Kepler

PROFESSOR: Você então rejeita nossa prova?
ÔMEGA: Sim. A prova satisfatória tem que explicar a eulerianidade também do "grande dodecaedro estelado".
RO: Por que não admitir que o seu "grande dodecaedro estelado" é triangular? Suas dificuldades são imaginárias.
DELTA: Concordo. Mas são imaginárias por uma razão diferente. Habituei-me agora com os poliedros estelados: eles são fascinantes. Mas temo que sejam essencialmente diferentes dos poliedros comuns: logo, não se pode conceber uma prova que explique a característica euleriana do cubo, por exemplo, *e* do "grande dodecaedro estelado" mediante uma única idéia.

ÔMEGA: Por que não? Você não tem imaginação alguma. Você teria insistido, depois da prova de Cauchy, que poliedros côncavos e convexos são essencialmente diferentes: logo, não se pode talvez conceber uma prova que explique o caráter euleriano de poliedros convexos e côncavos por uma mesma idéia? Permita-me que cite um trecho dos *Diálogos* de Galileu.

> SAGREDO: Então, como você vê, todos os planetas e satélites — chamemo-los todos de "planetas" — movem-se em elipses.
>
> SALVIATI: Temo que haja planetas movimentando-se em parábolas. Olhe esta pedra. Eu a arremesso: ela descreve uma parábola.
>
> SIMPLÍCIO: Mas essa pedra não é um planeta! Trata-se de dois fenômenos perfeitamente distintos!
>
> SALVIATI: É claro que esta pedra é um planeta, apenas lançado por mão menos poderosa que aquela que arremessou a Lua.
>
> SIMPLÍCIO: Tolice! Como você ousa juntar sob igual rubrica fenômenos celestes e terrestres! Um nada tem a ver com o outro! É claro que ambos podem ser explicados mediante provas, mas tenho certeza de que as duas explicações serão totalmente diferentes! Não posso imaginar uma prova que explique o curso de um planeta no céu e um projétil na terra mediante uma única idéia!
>
> SALVIATI: Você não pode imaginá-la, mas eu posso vislumbrá-la... [99]

([1619]. p. 53), e depois independentemente, por Poinsot ([1810], que primeiro o testou quanto à eulerianidade. A fig. 15 é uma cópia do que se encontra no livro de Kepler.

[99] Foi-me impossível encontrar a fonte dessa citação.

PROFESSOR: Esqueça projéteis e planetas, Ômega, você por acaso teve êxito em achar uma prova que abranja tanto poliedros eulerianos comuns como poliedros estelados eulerianos?

ÔMEGA: Não. Mas acharei.[100]

LAMBDA: Digamos que sim; mas que dizer da prova de Cauchy? Você tem de explicar por que rejeita uma prova atrás da outra.

(b) *Tendências a provas finais e correspondentes condições necessárias e suficientes.*

ÔMEGA: Você criticou análises de prova pelo fracasso da retransmissão de falsidade mediante contra-exemplos do *terceiro* tipo.[101] Agora eu as critico pelo fracasso da *transmissão* de falsidade (ou, o que vem a dar no mesmo, *retransmissão de verdade*) mediante contra-exemplos do *segundo* tipo.[102] Uma prova deve explicar o fenômeno de eulerianidade em toda a sua extensão.

Minha procura é não só de *certeza* como também de *finalidade*. O teorema tem que ser certo — não devem existir contra-exemplos *dentro* de seu domínio; mas ele tem também que ser *final*: não deve haver quaisquer exemplos fora de seu domínio. Quero traçar uma linha divisória entre exemplos e contra-exemplos, e não entre um domínio seguro de uns poucos exemplos e uma confusão de exemplos e contra-exemplos.

LAMBDA: Quer dizer, você quer que as condições do teorema sejam não apenas suficientes, mas também necessarias!

KAPA: Imaginemos então, para fins de argumentar, que você tenha descoberto tal teorema-mestre como: "*Todos os poliedros-mestre são eulerianos*". Você compreende que esse teorema só seria "final" se o teorema inverso: "*Todos os poliedros eulerianos são poliedros-mestres*" fosse certo?

ÔMEGA: É claro.

KAPA: Quer dizer, se a certeza se perde no círculo vicioso, o mesmo acontecerá com a finalidade? Você encontrará

---

100 Cf. Nota 104.

101 Contra-exemplos globais, mas não locais.

102 Contra-exemplos que são ao mesmo tempo globais e locais.

pelo menos um poliedro euleriano fora do domínio de cada uma de suas provas cada vez mais profundas.

ÔMEGA: É claro que sei que não posso resolver o problema da finalidade sem resolver o problema da certeza. Estou certo de que resolverei ambos. Acabaremos com a infindável seqüência de contra-exemplos do primeiro e do terceiro tipos.

PROFESSOR: Sua procura de conteúdo crescente é muito importante. Mas por que não aceitar seu segundo critério de satisfação — a finalidade — como uma doação voluntária e não obrigatória? Por que rejeitar provas interessantes que não contêm condições suficientes e necessárias? Por que considerá-las refutadas?

ÔMEGA: Bem...[103]

LAMBDA: Seja como for, Ômega certamente convenceu-me de que uma única prova não pode ser o bastante para o aperfeiçoamento crítico de uma conjectura ingênua. Nosso método deve incluir a versão radical de sua *Norma 4*, e deve então ser chamado de método de "*provas e refutações*" em vez de "*prova e refutações*".

MI: Desculpem a intromissão. Acabo de traduzir os resultados da discussão em termos semitopológicos: o método de incorporação do lema ensejou uma seqüência estreitante de *domínios de sucessivos teoremas melhorados*, devidamente encaixados; esses domínios ruíram sob o continuado ataque de contra-exemplos globais durante o aparecimento de lemas implícitos e convergiram para um *limite*: chamemos esse limite de "*domínio da análise da prova*". Se aplicarmos a versão mais frágil da *Norma 4*, esse domínio pode ser ampliado sob a continuada pressão de contra exemplos locais. Essa seqüência em expansão, de novo,

---

[103] A resposta está na célebre heurística pappiana da antiguidade, que se aplicava apenas à descoberta de "verdades finais", "últimas", isto é, a teoremas que continham tanto condições necessárias como suficientes. Para "problemas a provar" a principal norma dessa heurística era: "Se temos uma conjectura, tiremos as conseqüências dela. Se chegarmos a uma conseqüência sabidamente falsa, a conjectura será falsa. Se chegarmos a uma conseqüência sabidamente verdadeira, então ela era verdadeira" (Cf. Heath [1925], I, pp. 138-9). O princípio *causa aequat effectu* e a procura de teoremas com condições necessárias e suficientes pertenciam a essa tradição. Foi só no século XVII — quando fracassaram todos os empenhos de aplicação da heurística pappiana à ciência moderna — que a procura de certeza veio a prevalecer sobre a busca de finalidade.

terá um limite: chamá-lo-ei de *"domínio da prova"*. A discussão mostrou, então, que mesmo esse domínio limite pode ser demasiado estreito (talvez até vazio). Pode ser que tenhamos que encontrar provas mais *profundas* cujos domínios constituam uma seqüência em expansão, incluindo cada vez mais poliedros eulerianos recalcitrantes que eram contra-exemplos locais para provas anteriores. Esses domínios, por sua vez domínios limites, convergirão para o duplo limite do *"domínio da conjectura ingênua"* — que é, afinal de contas, o objetivo do estudo.

A topologia desse espaço heurístico será problema para a filosofia da matemática: as seqüências serão infinitas? Convergirão? Atingirão o limite? Será que o limite é uma seqüência vazia?

ÉPSILON: Achei uma prova mais profunda que a de Cauchy, que explica também a eulerianidade do "grande dodecaedro estelado" de Ômega!

[*Passa uma anotação ao Professor.*]

ÔMEGA: A prova final! A verdadeira essência da eulerianidade será agora revelada!

PROFESSOR: Sinto muito, o tempo está passando depressa: teremos que discutir em outra ocasião a prova muito complicada de Épsilon.[104] Tudo o que realmente percebo é que não será prova final no sentido que lhe dá Ômega. De acordo, Beta?

(c) *Provas diferentes produzem teoremas diferentes*

BETA: A questão mais interessante que aprendi dessa discussão é que diferentes provas da mesma conjectura ingênua levam a teoremas totalmente diferentes. *A conjectura ingênua Descartes-Euler é aperfeiçoada mediante cada prova num teorema diferente.* Nossa prova original deu: *"Todos os poliedros de Cauchy são eulerianos"*. Agora aprendemos sobre dois teoremas completamente diferentes: *"Todos os poliedros gergoneanos são eulerianos"* e *"Todos os poliedros legendrianos são eulerianos"*. Três provas, três teoremas com um antepassado comum.[105] A

104 *Nota dos Organizadores.* Os conteúdos da nota de Épsilon são revelados a seguir, no Capítulo 2.

105 Existem muitas outras provas da conjectura de Euler. Para uma discussão pormenorizada das provas de Euler, Jordan e Poincaré, veja-se Lakatos [1961].

costumeira expressão *"diferentes provas do teorema de Euler"* é, pois, confundidora, porque oculta o papel vital das provas na formação do teorema.[106]

PI: A diferença entre provas distintas vai muito mais além. Só a conjectura ingênua é sobre poliedros. Os teoremas são sobre objetos de Cauchy, objetos gergonnianos, objetos legendrianos, respectivamente, mas de modo algum sobre poliedros.

---

[106] Poinsot, Lhulier, Cauchy, Steiner e Crelle, todos eles pensavam que provas diferentes provam o mesmo teorema: o Teorema de Euler. Frase característica de um manual diz: "O teorema vem de Euler, a primeira prova vem de Legendre, a segunda, de Cauchy" (Crelle [1827], 2, p. 671).

Poinsot chegou muito perto de observar a diferença quando observou que a prova de Legendre aplicava-se a mais que os poliedros convexos comuns. (Veja-se Nota 94.) Mas quando comparou a prova de Legendre com a de Euler (que se baseava em retirar cantos piramidais do poliedro e chegar a um tetraedro final sem alterar a característica euleriana) deu preferência à de Legendre, por motivo de "simplicidade" [1858]. "Simplicidade" equivale, no caso, à idéia de rigor no século XVIII: clareza no experimento mental. Não lhe ocorreu comparar as duas provas quanto ao conteúdo: a prova de Euler se teria mostrado superior. (De fato, nada há de errado na prova de Euler. Legendre aplicava o padrão subjetivo contemporâneo de rigor e desprezava o padrão objetivo de conteúdo.)

Lhulier numa crítica velada dessa passagem (ele não menciona Poinsot) assinala que a simplicidade de Legendre é apenas aparente, porque ela presume considerável familiaridade com a trigonometria esférica ([1812:13*a*], p. 171). Mas Lhulier também acredita que Legendre "provou o mesmo teorema" como Euler (ibid., p. 170).

Jacob Steiner junta-se a ele na apreciação da prova de Legendre e ao presumir que todas as provas comprovam o mesmo teorema ([1826]). A única diferença é que enquanto de acordo com Steiner todas as diferentes provas provam que "todos os poliedros são eulerianos", para Lhulier todas as diferentes provas provam que "todos os poliedros que não tenham túneis, cavidades e faces circundantes são eulerianos".

Cauchy escreveu seu [1813] sobre poliedros quando ainda muito jovem, mal saído dos vinte anos, muito tempo antes da revolução do rigor, e não se pode condená-lo por repetir a comparação das provas de Poinsot, de Euler e Legendre na introdução da segunda parte de seu tratado.

Ele, como a maioria de seus contemporâneos, não apreendeu a diferença em profundidade de diferentes provas e assim não pôde apreciar a real força de sua própria prova. Achava ele que havia dado outra prova do mesmíssimo teorema — mas mostrou-se preo-
[illegible] em acentuar que chegou a uma generalização mais ou menos
[illegible]la fórmula de Euler para certos agregados de poliedros.
[illegible]gonne foi o primiero a apreciar a profundidade sem igual da
[illegible]le Cauchy (Lhulier [1812-13*a*], p. 179).

BETA: Você está querendo fazer graça?
PI: Não. Explicarei meu ponto de vista. Mas o farei em contexto mais amplo. Quero discutir a *formação de conceito* em geral.
ZETA: Devíamos primeiro discutir conteúdo. Achei a *Norma 4* de Ômega muito fraca, mesmo em sua interpretação radical. [107]
PROFESSOR: Muito bem. Vamos primeiro ouvir o enfoque de Zeta do problema de conteúdo, e então travaremos o debate ao discutir a formação do conceito.

7. *O Problema do Conteúdo Reinspeccionado*

(a) *A ingenuidade da conjectura ingênua*

ZETA: Estou com Ômega em deplorar o fato de que os antimonstros, os antiexceções e os incorporadores de lemas, todos, lutam em procura de certa verdade em detrimento do conteúdo. Mas sua *Norma 4*, [108] exigindo provas mais profundas da mesma conjectura ingênua, não basta. Por que nossa procura de conteúdo deve ser limitada pela primeira conjectura ingênua com que depararmos? Por que o objetivo de nosso estudo deve ser o "domínio da conjectura ingênua"?

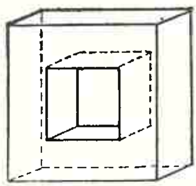


Fig. 16

ÔMEGA: Não acompanho você. Sem dúvida, nosso problema era descobrir o domínio da verdade de $V - A + F = 2$?
ZETA: Não! Nosso problema era encontrar a relação entre V, A e F para qualquer poliedro. Foi puro acaso que primeiro tivéssemos adquirido familiaridade com poliedros

107 Veja-se acima, p. 83.
108 Veja-se p. 83.

para os quais $V - A + F = 2$. Mas um estudo crítico desses poliedros "eulerianos" mostrou-nos que há muito mais poliedros não-eulerianos do que eulerianos. Por que não procurar o domínio de $V - A + F = -6$, $V - A + F = 28$ ou $V - A + F = 0$? Por acaso esses problemas não são também interessantes?

SIGMA: Você tem razão. Prestamos muita atenção a $V - A + F = 2$ só porque antes pensávamos que isso era verdadeiro. Sabemos agora que não, e temos que encontrar uma *nova* conjectura ingênua *mais profunda*...

ZETA: ... que seja menos ingênua...

SIGMA: ... que seja uma relação entre V, A e F para *qualquer* poliedro.

ÔMEGA: Por que tanta pressa? Vamos primeiro resolver o problema mais modesto que nos dispúnhamos a solucionar, isto é, explicar por que alguns poliedros são eulerianos. Até agora chegamos apenas a explicações parciais. Por exemplo, nenhuma das provas encontradas explicou por que uma estrutura-imagem com faces circundantes tanto na frente como atrás é euleriana (fig. 16). Ela tem 16 vértices, 24 arestas e 10 faces...

ZETA: Certamente, não se trata de um poliedro cauchyano: tem um túnel, tem faces circundantes...

BETA: E, no entanto, é euleriano! Como é irracional! Poliedro acusado de uma única falta — um túnel com faces circundantes (fig. 9) — a ser jogado entre os cabritos, embora um que ofenda de tantos outros modos — tendo também faces circundantes (fig. 16) — admitido entre os cordeiros? [109]

ÔMEGA: Você percebe, Zeta? Já temos muitos enigmas com os poliedros eulerianos. Vamos resolvê-los primeiro antes de prosseguir com o problema mais geral.

ZETA: Não, Ômega. "Mais questões podem ser mais fáceis de responder do que apenas uma. Um problema novo e mais ambicioso pode ser mais fácil de se solucionar do que o problema original." [110] E de fato, vou mostrar que o seu problema limitado e casual só pode ser solucionado pela resolução de problema essencial mais amplo.

---

[109] O problema foi observado por Lhulier ([1812-13*a*], p. 189) e, independentemente, por Hessel [1832]. No trabalho de Hessel, as figuras das duas estruturas-imagens aparecem próximas uma das outras. Cf. também nota 128.

[110] Pólya chama isso de "paradoxo do inventor" ([1945], p. 110).

ÔMEGA: Mas eu quero descobrir o segredo da eulerianidade!

ZETA: Compreendo sua resistência. Você caiu de amores pelo problema de descobrir onde Deus traçou a linha divisória entre poliedros eulerianos e não-eulerianos. Mas não há razão para acreditar que o termo "euleriano" tenha ocorrido na planta divina do universo. Que será se a eulerianidade for tão-somente propriedade casual de certos poliedros? Nesse caso, seria desinteressante ou até mesmo impossível descobrir os ziguezagues ao acaso da linha demarcatória entre poliedros eulerianos e não-eulerianos. Tal admissão, porém, deixaria racionalismo puro, porque a eulerianidade não é então parte do desígnio racional do universo. Assim sendo, esqueçamo-la. Uma das principais questões sobre o racionalismo crítico é que se está sempre preparado para abandonar o problema original cuja solução está em curso e substituí-lo por outro.

(b) *Indução como base do método de provas e refutações*

SIGMA: Zeta tem razão. Que calamidade!

ZETA: Calamidade?

SIGMA: Sim. Você pretende agora uma nova "conjectura ingênua" sobre a relação entre V, A e F, para qualquer poliedro, não é? É impossível! Considere a vasta multidão de contra-exemplos. Poliedros com cavidades, poliedros com faces circundantes, com túneis, misturados com arestas, vértices... $V - A + F$ pode aquirir qualquer valor! Dificilmente você poderá reconhecer qualquer ordem nesse caos! Deixamos a terra firme dos poliedros eulerianos para entrar num pantanal! Perdemos irremediavelmente a conjectura ingênua, e não temos esperança alguma de encontrar outra!

ZETA: Mas...

BETA: Por que não? Lembre-se do caos aparentemente desesperador de nossa tabela de número de vértices, arestas e faces até dos poliedros convexos mais comuns. [111] Fracassamos muitas vezes em ajustá-los numa fórmula. No entanto, de repente a real regularidade que os governa nos surpreendeu: $V - A + F = 2$.

---

111 *Nota dos Organizadores.* Essa tabela foi discutida antes de entrarmos na sala de aula.

KAPA (à parte): "Regularidade real"? Expressão engraçada para uma completa falsidade.

BETA: Tudo o que temos de fazer agora é completar nossa tabela com os dados para poliedros não-eulerianos e procurar uma nova fórmula: com observação paciente e operosa, e um pouco de sorte, atinaremos com a fórmula certa; depois poderemos aperfeiçoá-la de novo, mediante aplicação do método de provas e refutações!

ZETA: Observação paciente e operosa? Experimentar uma fórmula após outra? Talvez você invente uma máquina de fazer suposições que produza fórmulas ao acaso e as compare com a sua tabela? É assim que você pensa que a ciência progride?

BETA: Não compreendo sua chacota. Certamente você há de convir que nosso primeiro conhecimento, nossas conjecturas ingênuas, só podem advir de operosa observação e súbito vislumbre, embora muito de nosso método crítico de "provas e refutações" prepondere uma vez *descoberta* a conjectura ingênua! Qualquer método dedutivo tem que começar por uma base indutiva!

SIGMA: Seu método indutivo jamais terá êxito. Só chegamos a $V - A + F = 2$ porque aconteceu de não haver estrutura imagem ou ouriçocacheiro em nossas tabelas originais. Agora que esse acaso histórico...

KAPA (à parte): ... ou benevolente orientação de Deus...

SIGMA: ...não mais existe, você jamais "induzirá" ordem a partir do caos. Começamos com laboriosa observação e vislumbre de sorte — e fracassamos. Agora você propõe começarmos de novo com laboriosa observação e vislum-

---

112 Veja-se nota 117. A tabela foi tomada a Pólya [1954], vol. I, p. 36 e é a seguinte:

	Poliedro	*F*	*V*	*A*
I	Cubo	6	8	12
II	Prisma triangular	5	6	9
III	Prisma pentagonal	7	10	15
IV	Pirâmide quadrada	5	5	8
V	Pirâmide triangular	4	4	6
VI	Pirâmide pentagonal	6	6	10
VII	Octaedro	8	6	12
VIII	"Torre"	9	9	16
IX	"Cubo truncado"	7	10	15

bre mais feliz. Mesmo que chegássemos a uma nova conjectura ingênua — o que duvido — acabaríamos na mesma situação.

BETA: Talvez devamos renunciar a toda pesquisa? *Temos* que começar de novo — primeiro com uma nova conjectura ingênua e depois prosseguir com o método de provas e refutações.

ZETA: Não, Beta. Concordo com Sigma — em conseqüência, não começarei de novo com outra conjectura ingênua.

BETA: Então, de onde pretende começar senão com uma generalização indutiva de baixo nível como conjectura ingênua? Ou você terá um método alternativo por onde começar?

(c) *Suposição dedutiva "versus" suposição ingênua*

ZETA: Começar? Por que devo *começar?* Minha mente não está vazia quando descubro (ou invento) um problema.

PROFESSOR: Não implique com Beta. O problema é este: *"Haverá uma relação entre o número de vértices, arestas e faces dos poliedros, análoga à relação trivial entre o número de vértices e arestas de polígonos, isto é, que* $V = A$*?"* [113] Como é que *você* começaria?

ZETA: Em primeiro lugar, não disponho de verbas do governo para empreender uma pesquisa extensa de poliedros, nenhum exército de assistentes de pesquisa para contar os números de seus vértices, arestas e faces, e elaborar tabelas a partir desses dados. Mas mesmo que eu tivesse, não teria paciência, nem interesse, em experimentar uma fórmula após outra para verificar se ela presta.

BETA: E então, você vai ficar parado, fechando os olhos e esquecendo os dados?

ZETA: Precisamente. Preciso de uma idéia com que começar, mas não preciso de dado algum.

BETA: E de onde você tira a sua idéia?

ZETA: Ela já está em nossas mentes quando formulamos o problema: de fato, está na própria formulação do problema.

BETA: Que idéia?

ZETA: A de que, para um polígono, $V = A$.

BETA: E daí?

---

113 Veja-se acima, Nota 7.

ZETA: Um problema nunca surge do vazio. Está sempre relacionado com o nosso senso comum. Sabemos que para polígonos $V = A$. Ora, o polígono é um sistema de polígonos que consiste de um único polígono. O poliedro é um sistema de polígonos que consiste de mais de um polígono. Mas para poliedros, $V \neq A$, a que ponto a relação $V = A$ cessa na transição de sistemas monopoligonais para sistemas polipoligonais? Em vez de recolher dados, investigo como o problema surgiu do nosso senso comum; ou, qual era a expectativa cuja refutação apresentou o problema?

SIGMA: Certo. Sigamos sua recomendação. Para qualquer polígono $A - V = 0$ (fig. 17 (A)). Que acontece se ajusto outro polígono a ele (não necessariamente no mesmo plano)? O polígono adicional tem n_1 arestas e n_1 vértices; ajustando-o agora ao original ao longo de uma cadeia de n'_1 arestas e $n'_1 + 1$ vértices aumentaremos o número de arestas em $n_1 - n'_1$ e o número de vértices em $n_1 - (n'_1 + 1)$; isto é, no novo sistema bipoligonal haverá um excesso no número de arestas sobre o número de vértices: $A - V = 1$ (fig. 17 (*b*); para uma ajustagem pouco comum mas perfeitamente adequada, veja-se

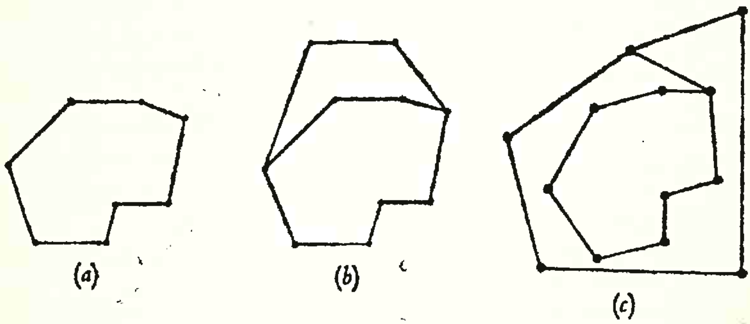


Fig. 17

figura 17 (*c*). "Ajustar" nova face ao sistema sempre aumentará esse excesso em um, ou, para um sistema F-poligonal elaborado desse modo, $A - V = F - 1$.

ZETA: Ou, $V - A + F = 1$.

LAMBDA: Mas isso é falso para a maioria dos sistemas poligonais. Veja-se o cubo...

SIGMA: Mas minha construção só pode levar a sistemas poligonais "abertos" — limitados por um circuito de arestas! Posso, facilmente, estender meu experimento mental a sistemas poligonais "fechados", sem nenhum desses limites. Esse fechamento pode ser conseguido cobrindo-se um sistema poligonal aberto, do tipo vaso, com um polígono como tampa: ajustando esse polígono tampa aumentamos F de um, sem mudar V ou A...

ZETA: Ou, para um sistema poligonal fechado — ou poliedro fechado — construído desse modo, $V - A + F = 2$: conjectura que você obteve agora sem "observar" o número de vértices, arestas e faces de um único poliedro!

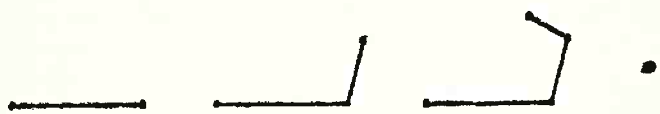
LAMBDA: E agora você pode aplicar o método de provas e refutações sem um "ponto de partida indutivo".

ZETA: Com a diferença de que você não precisa descobrir uma prova — a prova já está lá! Você pode prosseguir imediatamente com refutações, análises de prova e formação de teorema.

LAMBDA: Então em seu método — em vez da observação — a prova precede a conjectura ingênua! [114]

ZETA: Bem, eu não chamaria de conjectura ingênua aquela que saísse de uma prova. Em meu método, não há lugar absolutamente para ingenuidades indutivas.

BETA: Protesto! Você apenas pôs para trás a partida indutiva "ingênua": você começa com "$V = A$ para polígonos". Você não baseia isso em observações?



(a) (b) (c)

Fig. 18

ZETA: Do mesmo modo que a maioria dos matemáticos, não sei contar. Há pouco tentei contar as arestas e vértices de um heptágono: encontrei primeiro 7 arestas e 8 vértives, e depois 8 arestas e 7 vértices...

BETA: Deixando de lado o gracejo, como você conseguiu $V = A$?

[114] Trata-se de importante exceção à Nota 7.

ZETA: Fiquei profundamente chocado quando primeiro compreendi que para o triângulo $V - A = 0$. É claro que eu sabia muito bem que numa aresta $V - A = 1$ (fig. 18 (a)). Também sabia que, ajustando novas arestas, isso resultará sempre num aumento de um, tanto no número de vértices como de arestas (figs. 18 (b) e 18 (c)). Por que, no sistema de aresta poligonal, dá $V - A = 0$? Então, compreendi que isto se deve à transição de um sistema aberto de arestas (que é limitado por dois vértices) a um sistema fechado de arestas (que não tem tal limite): porque "tampamos" o sistema aberto ajustando uma aresta sem acrescentar um novo vértice. Assim provei, não
para observei, que $V - A = 0$ polígonos.

BETA: Sua habilidade não lhe será útil. Você apenas pôs atrás o ponto de partida indutivo, recuando-o ainda mais: agora declarando que $V - A = 1$ para qualquer aresta. Você provou ou *observou* isso?

ZETA: Provei-o. É claro que eu sabia que para um único vértice $V = 1$ (fig. 19). Meu problema era construir uma relação análoga...

BETA (*furioso*): Você não *observou* que para um ponto $V = 1$?

ZETA: *Você* observou? [à parte, a Pi]: Devo dizer a ele que meu "ponto de partida indutivo" era espaço vazio? Que eu comecei por "observar" nada?

LAMBDA: Seja como for, surgiram duas questões. Primeiro, Sigma disse que *só por acaso histórico pode-se chegar a conjecturas indutivas ingênuas*: quando nos defrontamos com um caos real de fatos, dificilmente podemos ajustá-los numa fórmula correta. Depois, Zeta mostrou que *para a lógica de provas e refutações não precisamos de conjectura ingênua e absolutamente não precisamos de ponto de partida indutivista.*

BETA: Protesto! Que dizer das famosas conjecturas que não foram precedidas (nem seguidas) de provas, como a conjectura das quatro cores que afirma bastarem quatro
de cores para colorir qualquer mapa, ou a conjectura Goldbach? Só por acasos históricos as provas podem preceder teoremas e que pode ocorrer a "suposição dedutiva" de Zeta: do contrário, vêm em primeiro lugar conjecturas indutivas ingênuas.

PROFESSOR: Certamente, devemos aprender *ambos* os padrões heurísticos: a *suposição dedutiva* é melhor, mas a *suposição ingênua* é melhor que nenhuma suposição. Mas *suposição ingênua não é indução: não existe isso de conjecturas indutivas!*

BETA: Mas nós achamos a conjectura ingênua por indução! "Isto é, ela foi sugerida pela observação, indicada por casos especiais... E entre os casos especiais que examinamos pudemos distinguir dois grupos: aqueles que precedem a formulação da conjectura e aqueles que vêm depois. Os primeiros *sugeriram* a conjectura, os últimos *apoiaram-na.* Ambos os tipos de casos deram uma espécie de contato entre a conjectura e "os 'fatos'..." [115] Esse duplo contato é o núcleo da indução: o primeiro faz a *heurística indutiva,* o segundo faz a justificação indutiva, ou *lógica indutiva.*

PROFESSOR: Não! Fatos não sugerem conjecturas, nem as amparam!

BETA: Então que foi que sugeriu $V - A + F = 2$ a *mim,* a não ser os fatos arrolados em minha tabela?

PROFESSOR: Eu lhe direi. Foi você mesmo quem declarou ter fracassado muitas vezes em ajustá-los numa fórmula. [116] Ora, o que aconteceu foi isso: você tinha três ou quatro conjecturas que alternadamente foram refutadas. Sua tabela foi elaborada no processo de testagem e refutação dessas conjecturas. Essas conjecturas mortas e agora esquecidas sugeriram os fatos, e não os fatos as conjecturas. *Conjecturas ingênuas não são conjecturas indutivas: chegamos a elas por tentativa e erro, mediante conjecturas e refutações.* [117] Mas se você acredita — equivocadamente — que chegou a elas indutivamente, a partir de suas tabelas, se você acredita que quanto mais longa a tabela mais conjecturas ela sugerirá, e apoio posterior, você estará perdendo tempo compilando dados desnecessários. Além disso, estando persuadido de que o caminho da descoberta vai dos fatos à conjectura, e da conjectura à prova (mito da indução), você pode esquecer completamente a alternativa heurística: a suposição dedutiva. [118]

---

[115] Pólya [1954], vol. I, pp. 5 e 7 (itálicos meus).

[116] Veja-se p. 96.

[117] Essas tentativas e erros são belamente reconstruídos por Pólya. A primeira conjectura é que F aumenta com V. Sendo refutado isso, seguem-se duas outras conjecturas: A aumenta com F; A aumenta com V. A suposição vencedora é a quarta: $F + V$ aumenta com A ([1954], vol. 1, pp. 33-7).

[118] Por outro lado, aqueles que, devido à apresentação dedutiva cos-

A heurística matemática é muito parecida com a heurística científica — não devido a que ambas sejam indutivas, mas devido a que ambas se caracterizam por conjecturas, provas e refutações. A diferença — importante — reside na natureza das respectivas conjecturas, provas (ou, na ciência, explicações), e contra-exemplos.[119]

BETA: Percebo. Então nossa conjectura ingênua não foi a *primeira* conjectura já "sugerida" por fatos brutos, não-conjecturais: foi precedida por muitas conjecturas e refutações "pré-ingênuas". A lógica de conjecturas e refutações não tem ponto de partida — mas a lógica das provas e refutações tem: ela começa com a primeira conjectura ingênua a ser seguida de um experimento mental.

ALFA: Talvez. Mas nesse caso não deveremos chamá-la "ingênua"![120]

KAPA (*à parte*): Mesmo em heurística, não existe coisa como perfeita ingenuidade!

BETA: O principal é sair do período de tentativa e erro o mas breve possível, ir rapidamente a experimentos mentais sem ter demasiado respeito "indutivo" por "fatos" Esse respeito pode prejudicar o progresso do conhecimento. Imagine que você chegue por tentativa e erro à conjectura: $V - A + F = 2$, e que seja imediatamente refutado pela observação de que $V - A + F = 0$ no caso da estrutura-imagem. Se você tiver muito respeito pelos fatos, especialmente quando eles refutam sua conjectura, você continuará com tentativa e erro pré-ingênuos em

---

tumeira da matemática, chegam a acreditar que o caminho do descobrimento vai dos axiomas e/ou definições às provas e teoremas, podem esquecer completamente a possibilidade e importância da suposição ingênua. De fato, na heurística matemática é o dedutivismo que representa o maior perigo, enquanto em heurística científica é o indutivismo.

[119] Devemos a Pólya o renascimento da heurística matemática neste século. Sua ênfase nas semelhanças entre a heurística científica e matemática é um dos principais aspectos de sua obra admirável. O que pode ser considerado sua única fragilidade relaciona-se com sua força: ele jamais questionou que a ciência é indutiva, e devido à sua correta visão da profunda analogia entre heurística científica e matemática foi levado a pensar que a matemática é também indutiva. O mesmo aconteceu antes a Poincaré ([1902], Introdução), e também a Fréchet (veja-se seu [1938]).

[120] Veja-se acima, p. 61.

busca de outra conjectura. Mas se você tiver heurística melhor, pelo menos tentará ignorar o teste observacional adverso, e irá experimentar um *teste por experimento mental*: como a prova de Cauchy.

SIGMA: Que confusão! Por que chamar de *teste* a *prova de Cauchy*?

BETA: Por que chamar de *prova* o *teste* de Cauchy? Era *teste*! Ouçam. Vocês começaram com uma conjectura ingênua: $V - A + F = 2$ para todos os poliedros. Daí vocês tiraram conseqüências: "se a conjectura ingênua estiver certa, depois de retirar uma face, para a restante rede $V - A + F = 1$"; "se essa conseqüência estiver certa, $V - A + F = 1$ mesmo depois da triangulação"; "se essa última conseqüência estiver certa, $V - A + F = 1$ será válido enquanto os triângulos forem retirados um a um"; "se isso estiver certo, $V - A + F = 1$ para um único triângulo", e assim por diante...

Ora, é sabido que essa última conclusão é verdadeira. Mas que aconteceria se tivéssemos concluído que para um único triângulo $V - A + F = 0$? Teríamos imediatamente rejeitado, como falsa, a conjectura original. Tudo que fizemos foi testar nossa conjectura: tirar conseqüências dela. O teste parecia corroborar a conjectura. Mas corroboração não é prova.

SIGMA: Nesse caso, nossa prova provou ainda menos do que esperávamos que provasse! Temos, então, que inverter o processo e tentar construir um experimento mental que leve ao sentido contrário: do triângulo ao poliedro!

BETA: Isso mesmo. Só Zeta observou que em vez de resolver nosso problema mediante primeiro descobrir uma conjectura ingênua através de tentativa e erro, testando-a, invertendo o teste em prova, podemos começar diretamente com a prova real. Se tivéssemos compreendido a possibilidade de suposição dedutiva, poderíamos ter evitado todas essas hesitações pseudo-indutivas!

KAPA (*à parte*): Que dramática seqüência de vira-casacas! O crítico Alfa vira dogmático, o dogmático Delta vira refutacionista e o indutivista Beta agora vira dedutivista!

SIGMA: Mas espere. Se o *teste experimento mental*...

BETA: A que chamarei de *análise*...

SIGMA: ...pode ser acompanhado por uma *prova experimento mental*...

BETA: A que chamarei de *síntese*... [121]

SIGMA: ...será o "teorema analítico" necessariamente idêntico ao "teorema sintético"? Indo no sentido oposto, podemos utilizar lemas diferentes! [122]

BETA: Se eles são diferentes, então o teorema sintético deve suplantar o analítico — afinal de contas, a análise apenas testa, enquanto a síntese prova.

PROFESSOR: Sua descoberta de que nossa "*prova*" era de fato um teste parece ter chocado a turma e distraiu sua atenção de seu principal argumento: de que, se tivermos uma conjectura que já foi refutada por um contra-exemplo, devemos pôr a refutação de lado e tentar testar a conjectura por uma experiência mental: desse modo, poderíamos deparar com a prova, deixar a fase da tentativa e erro, e passar para o método de provas e refutações. Mas foi exatamente isto que me fez dizer que "estou disposto a 'provar' uma conjectura falsa"! [123] E Lambda também exigia em sua *Norma 1*: "Se tivermos uma conjectura, disponhamo-nos a prová-la *e* refutá-la."

ZETA: Certo. Mas permitam-me suplementar as normas de Lambda e a *Norma 4* de Ômega pela

Norma 5. Se tivermos contra-exemplos de qualquer tipo, experimentemos encontrar, por suposição dedutiva, um teorema mais profundo ao qual eles não mais sejam contra-exemplos.

ÔMEGA: Agora você estende meu conceito de "profundidade" — e pode ser que esteja certo. Mas que dizer da aplicação real de sua nova norma? Até agora ela só nos deu resultados que já conhecíamos. É fácil ser sábio depois do acontecido. Sua "suposição dedutiva" é exatamente a síntese correspondente à *análise* original do Professor. Mas agora, por uma questão de honestidade, você deve empregar o seu método para encontrar uma conjectura sobre a qual você nada saiba, com o prometido aumento de conteúdo.

---

[121] De acordo com a heurística pappiana, a descoberta matemática começa com uma conjectura que é seguida de análisee e então, desde que a análise não falseie a conjectura, é seguida de síntese (Cf. também, Notas 7 e 103). Mas, enquanto nossa versão de análise-síntese melhora a conjectura, a versão pappiana apenas aprova-a ou desaprova-a.

[122] Cf. Robinson [1936], p. 471.

[123] Veja-se acima, p. 40.

ZETA: Certo. Começo com o teorema gerado por meu experimento mental: "*Todos os poliedros normais fechados são eulerianos*".

ÔMEGA: Normais?

ZETA: Não quero perder tempo indo pelo método de prova e refutações. Chamo de "normais" exatamente a todos os poliedros que podem ser construídos a partir de um polígono "perfeito" pela ajustagem dele (*a*) primeiro $F - 2$ faces sem alterar $V - A + F$ (esses são poliedros normais abertos) e (*b*) então uma última face para fechá-lo que aumente $V - A + F$ de 1 (e transforma o poliedro aberto em poliedro fechado).

ÔMEGA: "Polígono perfeito"?

ZETA: Por polígono "perfeito" entendo aquele que pode ser construído a partir de um único vértice pela ajustagem a ele primeiro de $n - 1$ arestas sem alterar $V - A$, e então uma última aresta fechadora que diminua $V - A$ de 1.

ÔMEGA: O seu poliedro normal fechado coincidirá com o nosso poliedro de Cauchy?

ZETA: Não desejo prosseguir com isso agora.

(*d*) *Conteúdo aumentado por suposição dedutiva*

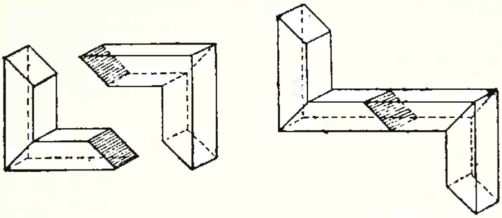
PROFESSOR: Basta de preliminares. Vamos à sua dedução.

ZETA: Perfeitamente, senhor. Tomo dois poliedros normais fechados (fig. 20 (*a*)) e colo-os ao longo de um circuito poligonal de modo que as duas faces que se encontram desapareçam (fig. 20 (*b*)). Uma vez que para os dois poliedros $V - A + F = 4$, o desaparecimento das duas faces no poliedro unido irá precisamente restaurar a fórmula de Euler — nenhuma surpresa depois da prova de Cauchy, visto que o novo poliedro pode também facilmente ser enchido como uma bola.[124] Desse modo, a fórmula prevalece também para esse teste de colagem.

---

[124] *Nota dos Organizadores.* Essa inferência é falaciosa, embora a conclusão esteja correta. A colagem implica de fato a perda de 8 vértices, 6 arestas e 6 faces. A característica euleriana é reduzida, portanto, de dois (A exata coincidência presumida das duas faces sombreadas na fig. 20 (*b*) implica inverter a chanfradura em uma das meias-estruturas de modo que as arestas mais larga e mais estreita sejam intercambiadas. Visto que essa operação não altera V nem A nem F, o argumento, de fato, ainda prevalece).

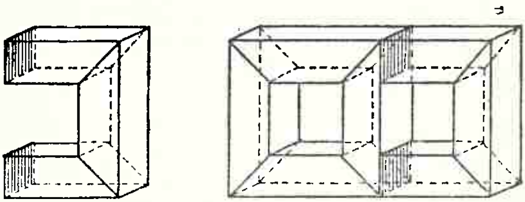
Mas tentemos agora um teste de dupla colagem: "colemos" os dois poliedros ao longo de dois circuitos poligonais (fig. 20 (*c*)). Agora 4 faces desaparecerão e para o novo poliedro $V - A + F = 0$.



(*a*) (*b*) (*c*)

Fig. 20

GAMA: Mas esse é o *Contra-exemplo 4* de Alfa, a estrutura-imagem!
ZETA: Agora, se eu "colo de novo" essa estrutura-imagem (fig. 20 (*c*)) ainda outro poliedro normal (fig. 21 (*a*)), $V - A + F$ será -2 (fig. 21 (*b*))...



(*a*) (*b*)

Fig. 21

SIGMA: Para um poliedro monoesferóide $V - A + F = 2$; para um poliedro diesferóide, $V - A + F = 0$, para um triesferóide $V - A + F = -2$, para um poliedro *n*-esferóide $V - A + F = 2 - 2\ (n - 1)$...
ZETA: ...que é sua nova conjectura de conteúdo sem precedentes, completa, com prova, sem ter compilado uma única tabela.[125]

[125] Isso foi feito por Raschig [1891].

SIGMA: Isto é realmente encantador. Não só você explicou a obstinada estrutura-imagem como também produziu uma variedade infinita de novos contra-exemplos...

ZETA: Completos, com explicação.

RO: Também cheguei ao mesmo resultado de maneira diferente. Zeta começou com dois exemplos eulerianos e converteu-os em contra-exemplo numa experiência controlada. Eu começo com um contra-exemplo e converto-o em exemplo. Fiz a seguinte experiência com uma estrutura imagem: "Seja o poliedro de algum material fácil de cortar como argila macia; passemos um cordão pelo túnel e depois através da argila. Ele não se dividirá..."[126] Mas tornou-se um poliedro esferóide conhecido, simples! É certo, aumentamos o número de faces em 2, e o número de arestas e vértices em m; mas desde que sabemos que a característica euleriana de um poliedro simples é 2, o original deve ter tido a característica 0. Ora, se precisarmos mais, digamos n, desses cortes para reduzir o poliedro a simples poliedro, sua característica será $2 - 2n$.

SIGMA: Isso é interessante. Zeta já nos mostrou que podemos não precisar de uma conjectura a fim de começar *provando*, que podemos imediatamente vislumbrar uma *síntese*, isto é, uma experiência mental prova a partir de uma proposição relacionada que seja conhecida como verdadeira. Agora Ro nos mostra que não precisamos de uma conjectura nem para começar a *testagem*, mas que podemos começar — fazendo crer que o resultado já lá está — para achar uma *análise*, isto é, uma experiência mental.[127]

ÔMEGA: Mas, seja o que for que você escolha, ainda deixará hordas de poliedros inexplicados! De acordo com o seu novo teorema, para todos os poliedros $V - A + F$ é um número uniforme, menor que 2. Mas vimos uns tantos poliedros com *exóticas* características eulerianas. Veja o cubo empenachado (fig. 12) com $V - A + F = 1$...

---

[126] Hoppe [1879], p. 102.

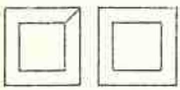
[127] Trata-se de parte da heurística pappiana. Ele chama de "teórica" uma análise que comece com uma conjectura, e de "problemática" a que comece sem nenhuma conjectura (Heath [1925]), vol. I, p. 138). A primeira refere-se a problemas a provar, a segunda a problemas a solucionar (ou problemas a encontrar). Cf. também Pólya [1945], pp. 129-36 ("Pappus") e 197-204.

ZETA: Eu nunca disse que meu teorema se aplica a *todos* os poliedros. Ele se aplica apenas a todos os poliedros n-esferóides construídos de acordo com a minha elaboração. Minha elaboração, tal como prevalece, não leva a faces circundantes.

ÔMEGA: Então?

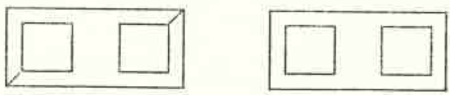
SIGMA: Sei! Pode-se também estendê-lo a poliedros com faces circundantes: pode-se construir um polígono com faces circundantes pela supressão de uma aresta sem reduzir o número de faces num apropriado sistema de polígonos gerados pela prova (figs. 22 (a) e 22 (b)). Imagino que talvez haja também sistemas "normais" de polígonos, construídos de acordo com nossa prova, nos quais podemos suprimir até mais de uma aresta sem reduzir o número de faces...

GAMA: Certo. Considere esse sistema poligonal "normal" (fig. 23 (a)). Você suprime duas arestas sem reduzir o número de faces (fig. 23 (b)).



(a) (b)

Fig. 22



(a) (b)

Fig. 23

SIGMA: Muito bom! Então, generalizando, temos

$$V - A + F = 2 - 2\,(n - \mathrm{I}) + \sum_{k=1}^{F} e_k$$

para poliedros n-esferóides — ou ligados — com e_k arestas suprimidas sem redução do número de faces.

BETA: Esta fórmula explica meu cubo empenachado (fig. 12), um poliedro monoesferóide ($n = 1$) com uma face circundante: e_k são zero, exceto para e_6 que é 1, ou $\sum_{k=1}^{F} e_k$ conseqüentemente $V - A + F = 3$.

SIGMA: Explica também sua fantasia euleriana "irracional": o cubo com duas faces circundantes e um túnel (fig. 16). É um poliedro disferóide ($n = 2$) com $\sum_{k=1}^{F} e_k = 2$. Por conseguinte, sua característica é $V - A + F = 2 -$

$- 2 + 2 = 2$. A ordem moral volta a reinar no mundo dos poliedros! [128]

ÔMEGA: E quanto aos poliedros com cavidades?

SIGMA: Sei! Para eles temos que acrescentar as características eulerianas de cada superfície desligada:

$$V - A + F = \sum_{j=1}^{K} \left\{ 2 - 2(n_j - 1) + \sum_{k=1}^{F} e_{kj} \right\}.$$

---

128 A "ordem" foi restaurada por Lhulier com aproximadamente a mesma fórmula ([1812-13*a*], p. 189); e por Hessel com fórmulas desajeitadas *ad hoc* sobre diferentes modos de ajustar diferentes poliedros eulerianos ([1832], pp. 19-20). Cf. nota 109.

Do ponto de vista histórico, Lhulier — em seu ([1812-13*a*] cuidou de generalizar a fórmula de Euler pela suposição ingênua e chegou à seguinte fórmula: $V - A + F = 2 [(C - T + 1) + (P_1 + P_2 + \ldots)]$, em que C é o número de cavidades, T o número de túneis e P_1 o número de polígonos internos na *i*nésima face. Também provou-a quanto a "polígonos internos", mas os túneis ao que parece o venceram. Ele elaborou a fórmula na tentativa de dar conta de suas três espécies de exceções; mas sua lista de exceções estava incompleta (Cf. Nota 30). Além do mais, o fato de ~~não~~ estar incompleta não era a única razão para a falsidade da conjectura ingênua: porque ele não observou a possibilidade de que cavidades pudessem estar multiplamente ligadas; que não se pode determinar inequivocamente o número de túneis em poliedros com um sistema de túneis ramificantes; e que não é o "número de polígonos internos", mas o número de faces circundantes o que é relevante (sua fórmula falha quanto a polígonos internos adjacentes, com uma face em comum). Para uma crítica da "generalização indutiva" de Lhulier, veja-se Listing [1861], pp. 98-9. Cf. também Nota 152.

129 Alguns matemáticos do século XIX ficaram confusos com esse aumento trivial de conteúdo, e realmente não souberam como lidar com ele. Alguns — como Möbius — empregaram definições antimonstro (veja-se p.); outros — como Hoppe — empregaram o ajustamento do monstro. O trabalho [1879] de Hoppe é sobremodo revelador. Por um lado, como muito de seus contemporâneos, estava certo de ter uma "fórmula euleriana generalizada" perfeitamente completa que abrangesse tudo. Por outro, abalou-se com complexidades triviais. Assim, embora alegasse que sua fórmula era "completa, tudo abrangendo", acrescentava confusamente que "casos especiais podem tornar a enumeração (dos constituintes) dubitável" (p. 103). Isto é, se um poliedro desajeitado anula a sua fórmula, então seus constituintes estavam erradamente contados, e o monstro devia ser ajustado pela visão correta: p. ex., os vértices e arestas comuns de poliedros gêmeos devem ser vistos e contados duas vezes e cada gêmeo reconhecido como poliedro distinto (ibidem). Para mais exemplos cf. p. Nota 158.

130 Veja-se antes, pp. 72-7.

BETA: E os tetraedros gêmeos?

SIGMA: Sei! . . .

GAMA: De que vale todo esse rigor? Pare com esse caudal de trivialidades pretensiosas! [129]

ALFA: Por que deverá parar? Ou se trata de monstros tetraedros gêmeos e não autênticos poliedros? Um tetraedro gêmeo por acaso não é tão válido quanto o seu cilindro? Era você quem gostava de rigor *lingüístico*. [130] Por que agora faz pouco do nosso rigor? Temos que fazer com que o teorema abranja todos os poliedros — tornando-o rigoroso estamos aumentando o seu conteúdo, e não diminuindo. Agora o rigor é virtude!

KAPA: Virtudes maçantes são tão ruins quanto vícios maçantes! Além disso, vocês jamais conseguirão rigor *completo*. Devemos parar quando deixar de ser interessante prosseguir.

ALFA: Tenho uma opinião diferente. Começamos a partir de

(1) Um vértice é um vértice.

Deduzimos disso

(2) $V = A$ para todos os polígonos perfeitos.

Deduzimos disso

(3) $V - A + F = 1$ para todos os sistemas poligonais abertos normais.

Disso deduzimos que

(4) $V - A + F = 2$ para todos os sistemas poligonais fechados normais, isto é, poliedros.

Ainda disso, deduzimos, alternadamente

(5) $V - A + F = 2 - 2\,(n - 1)$ para poliedros n-esferóides normais.

(6) $V - A + F = 2 - 2\,(n - 1) + \sum_{k=1}^{F} e_k$ para poliedros n-esferóides normais com faces multiligadas.

(7) $V - A + F = \sum_{j=1}^{K} \{2 - 2\,(n_j - 1) + \sum_{k=1}^{F} e_{kj}\}$ para poliedros n-esferóides normais com faces multiligadas e com cavidades.

Acaso não é um desdobramento maravilhoso das riquezas implícitas do ponto de partida trivial? E visto que (1) é verdadeiro, logo todo o restante o é.

RO (*à parte*): Riquezas implícitas? Só os dois últimos mostram como as generalizações se podem tornar *baratas*! [131]

LAMBDA: Você realmente acredita que (1) é o único axioma do qual tudo o mais se segue? Que a dedução aumenta o conteúdo?

ALFA: Naturalmente! Acaso não é o milagre da experiência dedutiva? Se você algum dia obtiver uma pequena semente de verdade, a dedução se expandirá infalivelmente numa árvore do conhecimento. [132] Se uma dedução *não* aumentasse o conteúdo eu não a chamaria de dedução, mas de "verificação": "a verificação difere da demonstração verdadeira precisamente porque é puramente analítica e porque é estéril". [133]

LAMBDA: Mas sem dúvida a dedução não pode aumentar o conteúdo! Se a crítica revela que a conclusão é mais rica que a premissa, temos que reforçar a premissa tornando explícitos os lemas implícitos.

KAPA: Esses lemas implícitos é que contêm o requinte e falibilidade e em última instância destroem o mito da dedução infalível. [134]

PROFESSOR: Mais alguma questão sobre o método de Zeta?

---

131 Cf. pp. 131-2.

132 Antigos filósofos não hesitaram em deduzir uma conjectura de uma conseqüência muito trivial dela (veja-se, por exemplo, nossa prova sintética que vai do triângulo ao poliedro). Platão pensava que "um único axioma poderia bastar para gerar todo um sistema". "Em geral ele pensava numa única hipótese como fértil por si mesma, ignorando em sua metodologia as outras premissas à qual ele a está aliando" (Robinson [1953], p. 168). Isso é característico da antiga lógica não-formal, isto é, da lógica da prova ou experimento mental ou de construção; consideramo-la como entimemática apenas *a posteriori*: só mais tarde o aumento em conteúdo tornou-se sinal, não de força, mas de fraqueza da inferência. Essa antiga lógica não-formal foi veementemente defendida por Descartes, Kant e Poincaré; todos eles desprezaram a lógica formal de Aristóteles e se desfizeram dela como estéril e irrelevante ao mesmo tempo enaltecendo a infalibilidade de fértil lógica não formal.

133 Poincaré [1902], p. 33.

134 A caça de lemas implícitos, que começou apenas em meados do século XIX com a crítica matemática, estava intimamente relacionada com o processo que mais tarde substituiu provas por análises de provas e leis do pensamento por leis da linguagem. Os fatos mais importantes em teoria lógica foram em geral precedidos do desenvolvimento da crítica matemática. Infelizmente, mesmo os melhores historiadores da lógica tendem a dar exclusiva atenção às mudanças na

(*e*) *Contra-exemplos lógicos "versus" contra-exemplos heurísticos*

ALFA: Gosto da *Norma 5* de Zeta [135] — como gostava da *Norma 4* de Ômega. [136] O método de Ômega me agradava porque considerava contra-exemplos locais, mas não globais, que as três normas [137] originais de Lambda desprezavam como logicamente inofensivos, portanto desinteressantes do ponto de vista heurístico. Ômega foi estimulado por elas para divisar novos experimentos mentais: avanços concretos em nosso conhecimento.

Agora Zeta é inspirado por contra-exemplos que são ao mesmo tempo globais e locais — perfeitas corroborações do ponto de vista lógico, mas não do ponto de vista heurístico: embora corroborações, ainda demandam ação. Zeta propõe estender, requintar nosso experimento mental original, a fim de converter corroborações lógicas em heurísticas, instâncias logicamente satisfatórias em instâncias que sejam satisfatórias tanto do ponto de vista lógico como heurístico.

Ômega e Zeta inclinam-se por novas idéias, ao passo que Lambda e sobretudo Gama preocupam-se com artifícios lingüísticos para tratar de seus contra-exemplos globais, mas não locais: os únicos relevantes do seu ponto de vista excêntrico.

TETA: Você quer dizer que o ponto de vista lógico é "excêntrico"?

ALFA: O *seu* ponto de vista lógico, sim. Mas desejo fazer outra observação. Se a dedução aumenta ou não o conteúdo — veja bem, é fato — com certeza parece garantir o progresso continuado do *conhecimento*. Começáramos com um vértice e deixamos o conhecimento progredir obrigatória e harmoniosamente para explicar a relação entre o número de vértices, arestas e faces de qualquer poliedro: um progresso sem espalhafato e sem refutações!

TETA (*para Kapa*): Será que Alfa perdeu todo o seu juízo? Começamos com um *problema*, não com um vértice! [138]

---

teoria lógica, sem observar suas raízes nas mudanças na prática lógica. Cf. também Nota 171.

135 Veja-se g. 105.

136 Veja-se p. 83.

137 Vejam-se pp. 72-3.

138 Alfa certamente parece ter resvalado na falácia da heurística dedutiva. Cf. Nota 118.

ALFA: Essa campanha por partes, mas irresistivelmente vitoriosa, nos levará a teoremas que são "não por si mesmos evidentes, mas apenas deduzidos de princípios verdadeiros e conhecidos por contínua e ininterrupta atividade de um espírito que tem clara visão de cada passo no processo".[139] Jamais poderia ser conseguida por observação "sem tendenciosidade" e um instante de vislumbre.

TETA: Tenho minhas dúvidas sobre essa vitória final. Tal vitória jamais nos levará ao cilindro — porque (1) começa com um vértice, e o cilindro não tem vértice. Nunca poderemos chegar também ao poliedro de um lado só, ou poliedros multidimensionais. Essa expansão contínua e por partes pode muito bem parar em algum ponto em que tenhamos de procurar uma nova e revolucionária partida. E mesmo essa "continuidade pacífica" está plena de refutações e críticas! Por que vamos em frente a partir de (4) a (5), de (5) a (6), de (6) a (7) a não ser sob a pressão de contra-exemplos ao mesmo tempo globais e locais? Lambda aceitou como contra-exemplos autênticos apenas aqueles que são globais, mas não locais: eles revelaram a *falsidade* do teorema. A inovação de Ômega —com justeza exaltada por Alfa — consistia em considerar também contra-exemplos que são locais mas não globais como contra-exemplos autênticos: eles revelaram a *pobreza da verdade* do teorema. Agora Zeta nos diz que reconheçamos inclusive aqueles contra-exemplos que sejam globais e locais como autênticos: eles também atestam a *pobreza da verdade* do teorema. Por exemplo, estruturas-imagens são tanto contra-exemplos globais como locais ao teorema de Cauchy: são evidentemente corroborações na medida em que só a *verdade* está em jogo — mas são refutações no que se refere ao conteúdo. Podemos chamar de *lógicos* os primeiros contra-exemplos (globais, mas não locais) e aos outros de *contra-exemplos heurísticos*. *Quanto mais admitimos refutações* — lógicas ou heurísticas — mais rapidamente progride o conhecimento. Alfa considera contra-exemplos lógicos como irrelevantes e se recusa a chamá-los de contra-exemplos heurísticos, devido à sua obsessão com a idéia de que o progresso do conhecimento matemático é contínuo e de que a crítica não desempenha papel algum.

---

139 Descartes [1628], *Regra III*.

ALFA: Você expande o conceito de refutação e o de crítica artificialmente apenas para justificar sua teoria crítica do progresso do conhecimento. Artifícios lingüísticos como instrumentos de um filósofo crítico?
PI: Acho que a discussão da formação do conceito pode ser de valor para elucidarmos o problema.
GAMA: Somos todos ouvidos.

8. *Formação de Conceito*

(a) *Refutação por expansão do conceito. Reavaliação do antimonstro e dos conceitos de erro e refutação.*

PI: Gostaria primeiramente de voltar ao tempo pré-Zeta ou mesmo pré-Ômega, aos três principais métodos de formação do teorema: antimonstro, antiexceção e ao método de provas e refutações. Cada qual começou com a mesma conjectura ingênua, mas terminou com diferentes *teoremas* e diferentes *termos teóricos*. Alfa já sublinhou alguns aspectos dessas diferenças,[140] mas o que disse foi insatisfatório — sobretudo no caso do antiexceção e do método de provas e refutações. Alfa achava que o teorema do antimonstro "oculta um aperfeiçoamento essencial por trás da identidade da expressão lingüística" na conjectura ingênua: achava ele que Delta paulatinamente *reduzia* a classe dos poliedros "ingênuos" numa classe de monstros não-eulerianos expurgados.
GAMA: Que há de errado nisso?
PI: Que não eram os antimonstros os que *reduziam* conceitos — eram as refutações que os *expandiam*.
DELTA: Bravo, bravo!
PI: Recuemos ao tempo dos pioneiros no estudo do assunto que nos ocupa. Eles estavam fascinados pela bela simetria dos poliedros *regulares*: achavam que os cinco corpos regulares mantinham o segredo do cosmos. Foi nessa época que se apresentou a conjectura Descartes-Euler, quando o conceito de poliedro incluía todos os tipos de poliedros convexos e até mesmo alguns poliedros côncavos. Mas certamente não abrangia poliedros que não eram simples, ou poliedros com faces circundantes. Para os poliedros que eles tinham em mente, a conjectura era

---

[140] Veja-se p. 61.

verdadeira na medida em que prevalecia, e a prova era imaculada. [141]

Vieram então as refutações. Em seu zelo crítico, eles estenderam o conceito de poliedro, para abranger objetos que eram estranhos à sua pretendida interpretação. A conjectura era verdadeira em sua *pretendida interpretação*; era falsa apenas numa *interpretação não pretendida*, insinuada pelos refutacionistas. A "refutação" deles não revelou qualquer *erro* na conjectura original, nenhum engano na prova original: revelou a falsidade de uma nova conjectura que ninguém havia afirmado e sobre a qual ninguém havia pensado antes.

Coitado do Delta! Ele defendeu valorosamente a interpretação original do poliedro. Contrapôs a cada contra-exemplo uma nova cláusula para salvaguardar o conceito original...

GAMA: Mas não era Delta quem sempre mudava de posição? Sempre que apresentávamos novo contra-exemplo, ele mudava sua definição para outra mais longa que exibisse outras de suas "cláusulas" implícitas!

PI: Que monstruosa apreciação de antimonstro! Só em *aparência* ele mudava sua posição. Sem razão, você o acusou de empregar epiciclos terminológicos sub-reptí-

---

141 A fig. 6 em [1758*a*] de Euler é o primeiro poliedro côncavo jamais aparecido num trabalho de geometria. Legendre fala de poliedros convexos e côncavos em seu [1809]. Mas antes de Lhulier ninguém mencionou poliedros côncavos que não fossem simples.

No entanto, pode-se acrescentar uma interessante restrição. A primeira classe de poliedros estudados em toda a história consistia de cinco poliedros regulares comuns e poliedros semi-regulares como prismas e pirâmides (cf. Euclides). Essa classe foi estendida depois do Renascimento em dois sentidos. Um é indicado no texto: para incluir todos os poliedros convexos e alguns poliedros intermediários denteados simples. A outra era a de Kepler: ele ampliou a classe dos poliedros regulares por sua invenção dos poliedros regulares estelados. Mas a invenção de Kepler foi esquecida, para ser de novo feita por Poinsot (cf. acima, pp.). Euler certamente jamais imaginou poliedros estelados. Cauchy os conheceu, mas seu espírito estava estranhamente dividido: quando tinha uma idéia interessante sobre poliedros estelados ele a publicava; mas ignorava esses poliedros quando apresentando contra-exemplos a seus teoremas gerais sobre poliedros. Isso não aconteceu com o jovem Poinsot ([1810]) — mas posteriormente ele mudou seu modo de ver (cf. p.).

Assim, a declaração de Pi, embora correta heuristicamente (isto é, verdadeira numa história racional da matemática), é historicamente falsa. (Isto não nos deve preocupar: a história real é freqüentemente uma caricatura de suas reconstruções racionais.)

cios na obstinada defesa de uma idéia. Sua má sorte foi a portentosa *Definição 1*: "Poliedro é o sólido cuja superfície consiste de faces poligonais", de que os refutacionistas se valeram imediatamente. Mas Legendre pretendia com isso abranger apenas seus poliedros ingênuos; ele não percebeu absolutamente que ela abrangesse muito mais do que ele propunha. O público matemático pretendia digerir o conteúdo monstruoso que lentamente surgia de sua definição plausível e aparentemente inocente. Isso foi o que fez Delta às vezes titubear, "eu queria dizer..." e o obrigou a explicitar suas intermináveis cláusulas "tácitas": tudo porque o conceito ingênuo jamais foi declarado, e foi suplantado por uma definição monstruosa não pretendida. Mas imagine-se uma situação diferente em que a definição determinasse adequadamente a interpretação pretendida de "poliedro". Caberia então aos refutacionistas vislumbrar definições cada vez mais *incluidoras de monstros* para, digamos, "poliedros complexos": "poliedro complexo é um agregado de poliedros (reais) tais que cada dois deles estejam ligados por faces congruentes". "As faces de poliedros complexos podem ser polígonos complexos que sejam agregados de polígonos (reais) tais que cada dois deles estejam soldados por arestas congruentes". Esse *poliedro complexo* corresponderia então ao conceito de poliedro gerado pela refutação de Alfa e Gama — a primeira definição valendo também para poliedros que não são simples, e a segunda também para faces que não sejam ligadas simplesmente. Assim, a procura de novas definições não é necessariamente tarefa dos antimonstros ou mantenedores de conceitos; pode ser também tarefa dos incluidores de monstros e dos ampliadores de conceitos.[142]

SIGMA: Conceitos e definições — isto é, conceitos intencionais e definições inintencionais — podem depois pregar peças umas às outras! Nunca imaginei que a formação de conceito pudesse atrapalhar uma ampla definição inintencional!

PI: Mas pode. Só os antimonstros limitam-se ao conceito original, enquanto os ampliadores de conceito o ampliam;

---

142 Interessante exemplo de definição incluidora de monstro é a redefinição de Poinsot de convexidade, que inclui os poliedros estelados na respeitável classe dos corpos regulares convexos [1810].

curioso é que a ampliação se dá sub-repticiamente: ninguém se dá conta da coisa, e uma vez que o "sistema coordenado" de todos expande-se com a ampliação do conceito, cai-se vítima da ilusão heurística de que o ser antimonstro estreita os conceitos, quando de fato torna-os invariantes.

DELTA: Então quem era intelectualmente desonesto? Quem mudava sub-repticiamente de posição?

GAMA: Admito que estávamos sem razão ao culpar Delta por contradições sub-reptícias de seu conceito de poliedro: todas as suas seis definições denotavam o mesmo antigo bom conceito de poliedro que ele herdou de seus antepassados. *Ele definia o mesmíssimo pobre conceito em estruturas teóricas de referência ou linguagens cada vez mais ricas: antimonstro não forma conceitos, mas apenas traduz definições.* O teorema antimonstro não significa aperfeiçoamento algum da conjectura ingênua.

DELTA: Você quer dizer que todas as minhas definições eram equivalentes do ponto de vista lógico?

GAMA: Isso depende de sua teoria lógica — de acordo com a minha, sem dúvida não são.

DELTA: Esta resposta não adiantou muito, você há de convir. Mas, diga-me, você refutou a conjectura ingênua? Você a refutou somente por perverter sub-repticiamente sua interpretação original!

GAMA: Bem, nós a refutamos de modo mais imaginativo e interessante do que você jamais teria sonhado. Nisso vai a diferença entre *refutações que apenas revelam um engano idiota* e *refutações que são fatos destacados no progresso do conhecimento.* Se você tivesse descoberto que "para todos os poliedros $V - A + F = 1$" devido a não saber contar, e eu tivesse corrigido você, não chamaria isso de "refutação".

BETA: Gama tem razão. Depois da revelação de Pi, podíamos hesitar em chamar nossos "contra-exemplos" de *contra-exemplos lógicos*, visto que eles não são, afinal, inconsistentes com a nossa conjectura em sua interpretação intencional; mas são, sem dúvida, *contra-exemplos heurísticos*, já que estimulam o progresso do conhecimento. Se aceitássemos a lógica limitada de Delta, o conhecimento não progrediria. Suponha-se que alguém com limitada estrutura conceptual descubra a prova cauchyana da conjectura de Euler. Essa pessoa achará que todos os passos dessa experiência mental podem ser facilmente desempenhados em *qualquer* poliedro. Ela toma como óbvio, indubitável, o "fato" de que se todos os poliedros são simples e que todas as faces são simplesmente ligadas. Nunca lhe ocorrerá converter seus lemas "óbvios" a condições numa conjectura aperfeiçoada e assim elaborar um teorema — devido ao estímulo de contra-exemplos, ao exibir alguns lemas "trivialmente verdadeiros" como falsos, como lacunosos. Assim pensa ela que a prova, fora de qualquer dúvida, estabelece a verdade da conjectura ingênua, e que ela é certamente indubitável. Mas essa certeza longe está de ser sinal de êxito; é apenas sintoma de falta de imaginação, de pobreza conceptual. Produz pedante satisfação e impede o progresso do conhecimento.[143]

---

[143] Trata-se de fato do caso de Cauchy. É provável que se Cauchy já tivesse descoberto seu revolucionário método antiexceção (cf. pp.), ele teria procurado e encontrado algumas exceções. Mas talvez só mais tarde tenha se defrontado com o problema das exceções, quando decidiu desfazer o caos em análise. (Parece ter sido Lhulier o primeiro a observar, e defrontar-se com o fato de que esse "caos" não se limitava à análise).

Historiadores, por exemplo, Steinitz em seu [1914-31] geralmente afirmam que Cauchy, observando que seu teorema não era válido de modo universal, enunciou-o apenas para poliedros convexos, É certo que ele em sua prova empregue a expressão "a superfície convexa de um poliedro" ([1813*a*], p. 81), e em seu [1813*b*] enuncie o teorema de Euler sob a rubrica geral: "Teoremas sobre ângulos sólidos e poliedros convexos." Mas talvez para contrabalançar esse título, dê particular ênfase à validade universal do teorema de Euler para qualquer poliedro (Teorema XI, p. 94), embora enunciando três outros teoremas (Teorema XIII e seus dois corolários) explicitamente para poliedros convexos (pp. 96 e 98).

Por que a terminologia desarrumada de Cauchy? O conceito de poliedro de Cauchy quase coincidia com o de poliedro convexo. Mas não coincidia com exatidão: Cauchy sabia sobre poliedros côncavos, que podem ser obtidos avançando ligeiramente no lado dos poliedros convexos, mas ele não discutiu o que parecia ser irrelevantes corroborações a mais — e não refutações — de seu teorema (Corroborações nunca se comparam com contra-exemplos nem mesmo com "exceções", como catalisadores para o progresso dos conceitos). Esta a razão para o emprego casual de "convexo": foi um engano compreender que poliedros côncavos podiam dar contra-exemplos, e não um esforço consciente para eliminar esses contra-exemplos. No mesmíssimo parágrafo, ele argumenta que o teorema de Euler é "conseqüência ime-

(b) *Conceitos gerados pela prova "versus" conceitos ingênuos. Classificação teórica "versus" classificação ingênua.*

PI: Permitam-me voltar ao teorema gerado pela prova: "Todos os *poliedros* simples, com faces simplesmente ligadas, são eulerianos." Essa formulação é enganadora. Devia ser: "Todos os *objetos* simples, com faces simplesmente ligadas, são eulerianos."

GAMA: Por quê?

PI: A primeira formulação sugere que a classe dos poliedros simples que ocorre no teorema é uma subclasse de "poliedros" da conjectura ingênua.

---

diata" do lema de que $V - A + F = 1$ para redes poligonais planas, e declara que "para a validade do teorema $V - A + F = 1$ não importa absolutamente se os polígonos jazem no mesmo plano ou em planos diferentes, visto que o teorema se refere apenas ao número de polígonos e ao número de seus constituintes" (p. 81). Esse argumento está perfeitamente correto dentro da estreita estrutura conceitual de Cauchy, mas incorreto em contexto mais amplo, em que "poliedro" refere-se também a, digamos, estruturas-imagens. O argumento foi freqüentemente repetido na primeira metade do século XIX (p. ex. Olivier [1826], p. 230, ou Grunert [1827], p. 367, ou R. Baltzer [1860-62], vol. 2, p. 207). Foi criticado por J. C. Becker ([1869*a*], p. 68).

Não raro, tão logo uma extensão de conceito refute uma proposição, esta parece erro tão elementar que mal se pode imaginar que um grande matemático possa tê-lo cometido. Essa importante característica da refutação da extensão de conceito explica por que respeitáveis historiadores, devido a não compreenderem que os conceitos progridem, criam para si um labirinto de problemas. Após salvar Cauchy pela alegação de que ele "não podia talvez omitir" poliedros que não são simples e que portanto ele "categoricamente" (!) restringiu o teorema ao domínio de poliedros convexos, o respeitável historiador tem agora que explicar por que a linha divisória de Cauchy era "desnecessariamente" estreita. Por que teria ela ignorado poliedros eulerianos não-convexos? A explicação de Steinitz é esta: a formulação correta da fórmula de Euler é em termos de ligação de superfícies. Uma vez que no tempo de Cauchy esse conceito não estava ainda "claramente apreendido" a "saída mais simples" era presumir a convexidade (p. 20). Assim dirime Steinitz um erro que Cauchy jamais cometeu.

Outros historiadores procedem de maneira diferente. Dizem que o ponto em que a estrutura conceitual correta (isto é, a que eles conhecem) foi atingido houve apenas uma "idade de Trevas" com resultados "raramente bons, se é que os houve". Esse ponto na teoria dos poliedros é a prova [1866*a*] de Jordan de acordo com Lebesgue ([1923], pp. 59-60); é Poincaré [1895] de acordo com Bell ([1945], p. 460).

144 Veja-se p. 83.

SIGMA: É claro que a classe dos poliedros simples é uma subclasse de poliedros! O conceito de poliedro simples *restringe* a ampla classe original de poliedros ao limitá-los àqueles em que o primeiro lema de nossa prova é plausível. O conceito de "poliedro simples, com faces simplesmente ligadas" indica maior restrição ainda da classe original...

PI: Não! A classe original de poliedros continha somente poliedros que eram simples e cujas faces eram simplesmente ligadas. Ômega estava errado quando dizia que a incorporação de lema restringe o conteúdo. [144]

ÔMEGA: Mas acaso cada incorporação de lemas não elimina um contra-exemplo?

PI: Claro que sim! Mas contra-exemplo que foi produzido por extensão de conceito.

ÔMEGA: Assim sendo, a incorporação de lema *conserva* conteúdo, do mesmo modo que a antiexceção?

PI: Não, a incorporação de lema aumenta o conteúdo; o antimonstro, não.

ÔMEGA: O quê? Você pretende realmente me convencer de que não apenas a incorporação de lema não *restringe* o conteúdo, mas que ainda o *aumenta*? Que em vez de restringir conceitos ela os estende?

PI: Exatamente. Ouça bem. Um globo, tendo nele desenhado um mapa político, era elemento da classe original de poliedros?

ÔMEG: É claro que não.

PI: Mas ficou sendo, depois da prova de Cauchy. Porque você pode executar a prova de Cauchy nele sem a mínima dificuldade, bastando não haver nele países ou mares circundantes. [145]

GAMA: Tem razão! Enchendo um poliedro até que fique esférico, e destorcendo arestas e faces, em nada se alterará a execução da prova — desde que a distorção não altere o *número* de vértices, arestas e faces.

SIGMA: Percebo o que você quer dizer. Então o "poliedro simples" gerado pela prova não significa uma restrição, uma especificação, mas também *generalização*, expansão do "poliedro" ingênuo. [146] A idéia de generalizar o con-

---

[145] Cf. Nota 44.

[146] Darboux, em seu [1847*a*], chegou perto dessa idéia. Mais tarde, ela foi claramente formulada por Poincaré: "... matemática é a arte de dar o mesmo nome a coisas diferentes... Quando a linguagem é bem escolhida, ficamos admirados de ver que todas as provas

ceito de poliedro de modo a que ele inclua "poliedros" enrugados, *curvilíneos*, com faces *curvas*, dificilmente teria ocorrido a alguém antes da prova de Cauchy; mesmo que tivesse, seria recusada como excêntrica. Mas agora é uma generalização natural, visto que as operações de nossa prova podem ser interpretadas para eles tão bem quanto para poliedros comuns ingênuos, com arestas retas e faces planas. [147]

PI: Bom. Mas você tem que dar um passo a mais. *Conceitos gerados por prova* nem são "especificação" nem "generalização" dos conceitos ingênuos. O impacto de provas e refutações sobre conceitos ingênuos é muito mais revolucionário do que isso: elas *eliminam* completamente os conceitos básicos ingênuos e os *substituem* por conceitos gerados pela prova. [148] O termo ingênuo "poliedro",

---

feitas para certo objeto aplicam-se imediatamente a muitos novos objetos; nada há a alterar, nem mesmo as palavras, visto que os nomes tornaram-se os mesmos" ([1908], p. 375). Fréchet chama isto de "um princípio extremamente proveitoso de generalização", e o formula assim: "Quando uma série de propriedades de uma entidade não determina essa entidade, a proposição pode ser estendida para aplicar-se a uma entidade mais geral" ([1928], p. 18). Observa ele que essas generalizações não são triviais e que "podem exigir esforços muito grandes" *(ibid.)*.

147 Cauchy não notou isso. Sua prova era diferente da prova dada pelo professor em importante aspecto: Cauchy em seu [1813*a*] e [1813*b*] não imaginou o poliedro feito de borracha. A novidade dessa idéia prova foi imaginar o poliedro como uma superfície, e não como um sólido, como Euclides, Euler e Legendre o fizeram. Mas ele o imaginou como uma superfície sólida. Quando ele retirou uma face e marcou a restante estrutura poligonal espacial numa rede poligonal plana, não concebeu seu mapeamento como uma extensão que podia curvar faces ou arestas. O primeiro matemático a notar que a prova de Cauchy podia ser executada em poliedros com faces curvas foi Crelle ([1826-71, pp. 671-2), mas ele ainda tratava cuidadosamente de arestas retas. Para Cayley, porém, parecia reconhecível "à primeira vista" que "a teoria não seria materialmente alterada permitindo-se que as arestas fossem linhas curvas" ([1861], p. 425). A mesma observação foi feita, independentemente, na Alemanha por Listing ([1861], p. 99) e na França, por Jordan ([1866*a*], p. 39).

148 Essa teoria da formação de conceito casa-se com provas e refutações. Pólya juntou-a a observações: "Quando os físicos começaram a falar de 'eletricidade', os médicos a falar de 'contágio', esses termos eram vagos, obscuros, confusos. Os termos que os cientistas empregam hoje, como 'carga elétrica', 'corrente elétrica', 'infecção por fungo', 'infecção a vírus', são incomparavelmente mais claros e mais definidos. No entanto, que tremenda quantidade de observações, quantos experimentos engenhosos jazem entre as duas terminologias, e alguns grandes descobrimentos também. A indução mudou

mesmo após ter sido estendido pelos refutacionistas, denotava algo claro como cristal: um sólido com faces "planas" e arestas retas. As idéias de prova engoliam esse conceito ingênuo e digeriam-no inteiramente. Nos diferentes teoremas gerados pela prova, nada temos do conceito ingênuo. Ele desapareceu sem deixar rastros. Pelo contrário, cada prova proporciona seus conceitos caracte rísticos gerados por uma a uma delas, que se referem à extensibilidade, capacidade de esfericidade, fotografibilidade, projetabilidade, etc. Desaparecia o velho problema e outros novos surgiam. Depois de Colombo, não é de admirar que *não se solucione o problema que se quer resolver.*

SIGMA: Assim, a "teoria dos sólidos", o reino "ingênuo" original da conjectura euleriana, dissolve-se, e a conjectura remodelada reaparece na geometria projetiva se provada por Gergonne; na topologia analítica, se provada por Cauchy, na topologia algébrica, se provada por Poincaré...

PI: Perfeitamente. Agora então você compreenderá por que formulei os teoremas, não como Alfa ou Beta, como: "Todos os poliedros gergonnianos são eulerianos", "Todos os poliedros cauchyanos são eulerianos", e assim por diante, mas: "Todos os objetos gergonnianos são eulerianos", "Todos os objetos cauchyanos são eulerianos", etc. [149] *Assim é que achei sem interesse discutir não apenas quanto à exatidão de conceitos ingênuos como também sobre a verdade ou falsidade de conjecturas ingênuas.*

BETA: Mas, com certeza, poderíamos reter o termo "poliedro" para o nosso termo predileto gerado pela prova, isto é, "objetos cauchyanos"?

PI: Como você quiser, mas tenha em mente que *o seu termo não mais denota o que pretendíamos denotar*: que seu significado ingênuo desapareceu e que agora é empregado...

BETA: ...para um conceito mais geral, aperfeiçoado!

---

a terminologia, esclareceu os conceitos. Podemos ilustrar também esse aspecto do processo, o esclarecimento indutivo dos conceitos, mediante exemplos matemáticos apropriados" ([1954], vol. I, p. 55). Mas mesmo essa equivocada teoria indutivista da formação de conceito é preferível à tentativa de tornar a formação de conceito autônoma, tornar o "esclarecimento" ou a "explicação" de conceitos uma preliminar a qualquer discussão científica.

[149] Veja-se p. 93.

TETA: Não! Para um conceito novo, inteiramente diferente.

SIGMA: Acho que os pontos de vista de vocês são paradoxais!

PI: Se você entende por paradoxal "uma opinião ainda não aceita de modo geral",[150] e possivelmente inconsistente com algumas de suas idéias ingênuas arraigadas, nem pense nisso: você tem apenas que substituir suas idéias ingênuas por idéias paradoxais. Isso pode ser um modo de "solucionar" paradoxos. Mas que opinião minha em especial você tem em mente?

SIGMA: Como você deve se lembrar, descobrimos que alguns poliedros estelados são eulerianos, ao passo que outros não o são. Estivemos à procura de uma prova que fosse suficientemente profunda para explicar a eulerianidade tanto de poliedros comuns como estelados...

ÉPSILON: Eu a tenho.[151]

SIGMA: Sei. Mas apenas para argumentar, imaginemos que não exista essa prova; que, em vez disso, alguém ofereça, em acréscimo à prova de Cauchy para poliedros "comuns" eulerianos, uma prova correspondente mas totalmente diferente para os poliedros estelados eulerianos. Você dividiria em dois, Pi, o que anteriormente classificamos como um? E você teria duas coisas completamente diferentes unidas sob um mesmo nome porque alguém acha uma explicação comum para algumas de suas propriedades?

PI: Sim, evidentemente. É claro que não chamaria uma baleia de peixe, nem a um rádio de caixa barulhenta (como os índios costumam fazer), e nem me perturbo quando um físico se refere a um vidro como um líquido. O progresso de fato substitui a *classificação ingênua* pela *classificação teórica*, isto é, por classificação gerada pela teoria (gerada pela prova, ou, se quiserem, gerada pela explicação). Tanto conjecturas como conceitos têm de passar pelo purgatório de provas e refutações. *Conjecturas e conceitos ingênuos são suplantados por conjecturas (teoremas) e conceitos (conceitos gerados por prova ou conceitos teóricos) que surgem do método de provas e refutações.* E à medida que idéias e conceitos suplantam idéias

---

150 Hobbes [1656], *Censuras à Resposta do Bispo N.º xxi.*

151 Veja-se nota 104.

e conceitos ingênuos, a linguagem teórica suplanta a linguagem ingênua. [152]

---

[152] É interessante acompanhar as mudanças paulatinas desde a classificação mais ou menos ingênua de poliedros até a mais altamente teórica. A primeira classificação ingênua que abrange não apenas poliedros simples vem de Lhulier: classificação de acordo com o número de cavidades, túneis e "polígonos internos" (veja-se nota 128).

(a) Cavidades. A primeira prova de Euler e, por acaso, a do próprio Lhulier ([1812-13*a*], pp. 174-7), repousavam na decomposição do sólido, ou pela retirada de seus cantos um a um, ou pela decomposição dele em pirâmides a partir de um ou mais pontos no interior. A idéia de prova de Cauchy, porém — Lhulier não a conhecia — repousava na decomposição da superfície poliedral. Quando, finalmente, a teoria das superfícies poliedrais suplantou a dos sólidos poliedrais, as cavidades perderam o interesse: um "poliedro com cavidades" vem a ser uma classe inteira de poliedros. Assim, nossa antiga definição 2 antimonstro (p.) tornou-se uma definição teórica, gerada pela prova, e o conceito taxonômico de "cavidade" desapareceu da tendência de progresso.

(b) Túneis. Já Listing manifestava insatisfação com esse conceito (veja-se nota 128). A substituição não veio de qualquer "explicação" do conceito "vago" de túnel, como era de se esperar dos carnapianos, mas da tentativa de provar e refutar a conjectura ingênua de Lhulier sobre as características eulerianas de poliedros com túneis. Durante esse processo, o conceito de poliedro com *n* túneis desapareceu e a "conexibilidade múltipla" gerada pela prova (o que chamamos de "*n*-esfericidade") assumiu seu lugar. Em alguns ensaios encontramos mantido o termo ingênuo para o novo conceito gerado pela prova: Hoppe define o número de "túneis" pelo número de cortes que deixam o poliedro ligado ([1879]), p. 102). Para Ernst Steinitz o conceito de túnel está impregnado de teoria, de tal modo que é incapaz de achar qualquer diferença "essencial" entre a classificação ingênua de Lhulier de acordo com o número de túneis e a classificação gerada pela prova de acordo com a múltipla conexibilidade; portanto, ele considera a crítica de Listing da classificação de Lhulier como "amplamente sem razão" ([1914-31], p. p. 22).

(c) Polígonos internos. Esse conceito ingênuo também logo foi substituído por face circundante, e depois por faces multiplamente ligadas (cf. também nota 128), (substituída, e não "explicada", porque "face circundante" não é evidentemente uma explicação para polígono interno"). Por um lado, quando a teoria das superfícies poliedrais foi suplantada pela teoria topológica das superfícies, e, por outro, pela teoria diagramática, perdeu todo o interesse o problema de como as faces multiplamente ligadas influem na característica euleriana de um poliedro.

Assim, dos três conceitos-chaves da primeira classificação ingênua, só um "ficou" e mesmo esse, numa forma dificilmente reconhecível — a fórmula generalizada de Euler reduziu-se, por um momento, a $V - A + F = 2 - 2n$. (Para maior desenvolvimento, cf. nota 147.)

ÔMEGA: Por fim, chegaremos à verdadeira classificação final e real, à linguagem perfeita, tendo partido da classificação ingênua, casual e meramente nominal! [153]

(c) *Refutações lógicas e heurísticas reinspeccionadas*

PI: Permitam-me retomar alguns dos problemas que suscitamos relacionados com a suposição dedutiva. Primeiro, tomemos o problema dos contra-exemplos heurísticos *versus* contra-exemplos lógicos, tal como surgiu na discussão entre Alfa e Teta.

Minha exposição demonstrou, acho eu, que mesmo os chamados "contra-exemplos lógicos" eram heurísticos. Na interpretação originariamente pretendida, não há inconsistência, absolutamente, entre: (*a*) todos os poliedros são eulerianos e (*b*) a estrutura-imagem não é euleriana.

Se nos ativermos às normas tácitas de nossa linguagem original, nossos contra-exemplos não são contra-exemplos. Foram convertidos em contra-exemplos lógicos apenas pela mudança das normas da linguagem pela extensão de conceito.

GAMA: Você quer dizer que *todas* as refutações interessantes são heurísticas?

PI: Exatamente. Você não pode distinguir refutações e provas, de um lado e, do outro, mudanças na estrutura

---

153 No que se refere à classificação ingênua, os nominalistas estão perto da verdade quando alegam que a única coisa que os poliedros têm em comum é seu nome. Mas após alguns séculos de provas e refutações, à medida que se desenvolve a teoria dos poliedros, e a classificação teórica substitui a classificação ingênua, o saldo pende em favor dos realistas. O problema dos universais deve ser reconsiderado em vista do fato de que, à medida que o conhecimento progride, a língua muda.

Félix [1957], p. 10. De acordo com os positivistas lógicos, a tarefa exclusiva da filosofia é elaborar linguagens "formalizadas" em que estados da ciência artificialmente congelados sejam expressos (veja-se nossa citação de Carnap, na primeira página de nossa Introdução). Mas essas investigações dificilmente vingam, porque o rápido progresso da ciência desfaz-se do antigo "sistema de linguagem". A ciência nos ensina a não respeitar qualquer estrutura linguística conceitual para que não se converta em prisão conceitual — os analistas da língua têm um interêsse marcante em pelo menos disfarçar esse processo, a fim de justificar suas terapêuticas lingüísticas, isto é, mostrar que têm uma retroalimentação superior e valor para a ciência, que não estão degenerando em "pura névoa seca" (Einstein [1953]). Críticas semelhantes do positivismo lógico têm sido feitas por Popper: veja-se, p. ex., seu [1959], p. 128, nota de rodapé n.º 3.

lingüística conceptual e taxonômica. Em geral, quando se apresenta um "contra-exemplo", você tem uma opção: ou você se recusa a incomodar-se com ele, visto que não é absolutamente um contra-exemplo em sua *dada* linguagem L_1, ou você concorda em modificar sua linguagem estendendo conceito e aceita o contra-exemplo em sua nova linguagem L_2...

ZETA: ...e o *explica* em L_3!

PI: De acordo com a racionalidade estática tradicional, você tem que fazer a primeira escolha. A ciência ensina a fazer a segunda.

GAMA: Quer dizer, podemos ter dois enunciados que sejam consistentes em L_1, mas mudamos para L_2 em que são inconsistentes. Ou, podemos ter duas declarações que sejam inconsistentes em L_1, mas mudamos para L_2 em que elas são consistentes. À medida que o conhecimento progride, a linguagem muda. "Cada período de criação é ao mesmo tempo período em que a linguagem muda." O progresso do conhecimento não pode ser modelado em qualquer linguagem.

PI: Muito bem. A heurística trata da dinâmica da linguagem, enquanto a lógica trata da estática da linguagem.

(*d*) *Extensão teórica do conceito "versus" extensão ingênua do conceito. Progresso contínuo "versus" progresso crítico.*

GAMA: Você prometeu voltar à questão quanto a se a suposição dedutiva nos oferece ou não um padrão contínuo de progresso do conhecimento.

PI: Em primeiro lugar, permitam-me esboçar algumas das muitas formas *históricas* que esse padrão heurístico pode assumir.

O primeiro *padrão principal* é quando a extensão de conceito ingênua excede de muito a teoria e produz imenso caos de contra-exemplos: nossos conceitos ingênuos se perdem, mas nenhum conceito teórico os substitui. Nesse caso, a suposição dedutiva pode nivelar-se — por partes — com o exigido pelos contra-exemplos. Trata-se, se quiserem, de um "padrão generalizador" contínuo — mas não se esqueçam de que ele começa com refutações, que sua continuidade é a explicação por partes, por uma teoria em crescimento das refutações heurísticas de sua primeira versão.

GAMA: Ou, progresso "contínuo" somente indica que as refutações estão quilômetros à frente!

PI: Correto. Mas pode acontecer que cada refutação ou expansão isoladas de conceitos ingênuos seja *imediatamente* seguida de expansão da teoria (e conceitos teóricos) que expliquem o contra-exemplo; a "continuidade", então, dá lugar então a uma sensacional alternação de refutações de extensões de conceito e teorias cada vez mais poderosas, de *extensões de conceito ingênuas* e *extensões de conceito teóricas explanatórias.*

SIGMA: Duas variações históricas casuais no mesmo tema heurístico!

PI: Bem, não há realmente muita diferença entre elas. Em ambas, o *poder da teoria reside em sua capacidade de explicar suas refutações no curso do seu progresso.* Mas há um *segundo padrão principal* de suposição dedutiva...

SIGMA: Ainda outra variação casual?

PI: Sim, se você quiser. Contudo, nessa variação a teoria em progresso não só *explica*, mas *produz* suas refutações.

SIGMA: O quê?

PI: Nesse caso, o progresso teórico alcança — e, de fato, elimina — a extensão de conceito ingênua. Por exemplo, começa-se com, digamos, o teorema de Cauchy sem nenhum contra-exemplo no horizonte. Testa-se então o teorema transformando-se o poliedro de todos os modos possíveis: cortando-o em dois, retirando ângulos piramidais, dobrando-o, destorcendo-o, enchendo-o como uma bola... Algumas dessas idéias testes levarão a idéias provas [154] (chegando-se a algo sabido como certo e então voltando-se, isto é, seguindo-se o padrão pappiano de análise-síntese), mas algumas — como o "teste de dupla colagem" de Zeta — nos levarão de volta a algo já conhecido, mas nenhuma novidade real, a alguma refutação heurística da proposição testada — *não pela extensão de um conceito ingênuo, mas pela extensão da estrutura teórica.* Essa espécie de refutação é explicatória por si mesma...

JOTA: Como é dialético! Testes que se convertem em provas, contra-exemplos que viram exemplos pelo próprio método de sua construção...

---

[154] Pólya discrimina entre testes "simples" e "severos". Testes 'severos podem dar "a primeira insinuação" de uma prova' ([1954], vol. I, pp. 34-40).

PI: Por que dialético? O teste de uma proposição converte-se em prova de uma *outra*, de uma proposição mais profunda, contra-exemplos da primeira em exemplos da segunda. Por que chamar de dialética a confusão? Mas permita-me voltar à minha opinião: não acho que meu segundo padrão principal de suposição dedutiva possa ser encarado — como Alfa o teria feito — como progresso contínuo do conhecimento.

ALFA: É claro que pode. Compare nosso método com a idéia de Ômega de *substituir* uma idéia prova por uma radicalmente diferente e mais profunda. Ambos os métodos aumentam o conteúdo, mas, enquanto o método de Ômega nos faz substituir operações da prova que sejam aplicáveis num domínio estreito por operações que sejam aplicáveis em domínio mais amplo, ou, mais radicalmente, substitui toda a prova por uma que seja aplicável em domínio mais amplo — a suposição dedutiva *estende* a referida prova acrescentando operações que ampliam sua aplicabilidade. Isso, por acaso, não é continuidade?

SIGMA: Certo! Deduzimos de um teorema uma cadeia de teoremas mais amplos! De um caso especial deduzimos casos sempre mais gerais! Generalização por dedução! [155]

PI: Mas plena de contra-exemplos, desde que você reconheça que *quaisquer* deles aumentam o conteúdo, *qualquer* prova mais profunda segue ou gera refutações heurísticas dos teoremas mais pobres anteriores...

ALFA: Teta expandiu o "contra-exemplo" para abranger contra-exemplos heurísticos. Agora você o expande para abranger contra-exemplos heurísticos que jamais existem na realidade. Você alega que seu "segundo padrão" está pleno de contra-exemplos e se baseia na expansão do conceito de contra-exemplo para contra-exemplos com duração zero, cuja descoberta coincide com sua explicação! Mas por que deve ser "crítica" toda atividade intelectual, toda luta por conteúdo aumentado numa estrutura teórica unificada? Sua "atitude crítica" dogmática está complicando o problema!

PROFESSOR: O problema entre você e Pi está de fato complicado — porque o seu "progresso contínuo" e o "progresso crítico" de Pi são perfeitamente consistentes. Estou mais interessado nas *limitações*, se as houver, da suposição dedutiva ou "crítica contínua".

(e) *Os limites do aumento de conteúdo. Refutações teóricas "versus" refutações ingênuas*

PI: Acho que, cedo ou tarde, o progresso "contínuo" tende a atingir um ponto morto, um *ponto de saturação* da teoria.

GAMA: Mas certamente posso sempre estender alguns dos conceitos!

PI: É claro. A extensão *ingênua* do conceito pode prosseguir — mas a extensão *teórica* de conceito tem limites! Refutações por extensão ingênua de conceitos são apenas acicates que nos torturam para a extensão teórica de conceitos. Há, pois, duas espécies de refutações. Nós *esbarramos* na primeira por coincidência ou boa sorte, ou por uma expansão arbitrária de algum conceito. São como milagres, seu comportamento "anômalo" é inexplicável; aceitamo-las como contra-exemplos *de boa fé* apenas porque estamos acostumados a aceitar crítica da extensão de conceito. Vamos chamá-las de contra-exemplos *ingênuos* ou *fantasias*. Há, então, os *contra-exemplos teóricos*: estes são ou originariamente produzidos pela extensão da prova ou, alternativamente, são fantasias atingidas por provas estendidas, explicadas por elas, e com isso elevadas ao *status* de contra-exemplos teóricos. As fantasias têm que ser encaradas com grande suspeição: podem não ser autênticos contra-exemplos, mas casos de uma teoria totalmente diferente — quando não erros redondos.

SIGMA: Mas que fazer quando encalhamos? Quando não pudermos converter nossos contra-exemplos em contra-*exemplos teóricos pela expansão de nossa prova original?*

PI: Podemos investigar a fundo, cada vez mais, para ver se nossa teoria ainda tem alguma capacidade implícita de progresso. Às vezes, porém, temos boas razões para parar. Por exemplo, como Teta observou com justeza, se a nossa suposição dedutiva começa a partir de um vértice, pode ser que jamais tenhamos esperança de explicar o cilindro sem vértice.

---

155 Em lógica não-formal nada há de errado no "fato, tão comum em matemática e ainda tão surpreendente para o iniciante, ou para o filósofo que se considera avançado, de que o caso geral possa ser logicamente equivalente a um caso particular" (Pólya [1954], vol. I, p. 17). Cf. também Poincaré [1902], pp. 31-3.

ALFA: Assim sendo, afinal de contas, o cilindro não era um monstro, mas uma fantasia!

TETA: Mas não devemos desdenhar as fantasias! Elas são as *reais* refutações: não podem ser ajustadas num padrão de "generalizações" contínuas, e podem de fato obrigar-nos a revolucionar nossa estrutura teórica... [156]

ÔMEGA: Bem! Pode-se chegar a um *ponto de saturação relativo* de *determinada* cadeia de suposição dedutiva — mas acha-se, então, uma idéia-prova nova, revolucionária, que tem mais poder explanatório. Por fim, chega-se a uma prova *final* — sem limite, sem ponto de saturação, sem fantasia para refutá-la.

PI: Quê? Uma única teoria unificada para explicar *todos* os fenômenos do universo? Jamais! Cedo ou tarde, chegaremos a algo como um *ponto de saturação absoluto.*

GAMA: Não quero saber se chegamos ou não. Se um contra-exemplo pode ser explicado por uma extensão elementar, *trivial* da prova, ainda a consideraria como fantasia. Repito: não percebo qualquer questão em generalizar "poliedro" de modo a incluir um poliedro com cavidades: não se trata de um poliedro, mas classe de poliedros. Também esqueceria quanto a "faces multiplamente ligadas" — por que não traçar as diagonais faltantes? Quanto à generalização que inclui tetraedros gêmeos, ouso dizer que serve apenas para elaborar fórmulas complicadas e pretenciosas a troco de nada.

RO: Finalmente você redescobre meu método de ajustamento de monstro! [157] Ele livra você de generalizações tolas. Ômega não devia ter chamado o conteúdo de "pro-

---

[156] Cayley [1861] e Listing [1861] tomaram a sério a extensão dos conceitos básicos da teoria dos poliedros. Cayley definia aresta como "o caminho de uma ponta a ela mesma, ou a qualquer outra ponta" mas concedia em que as arestas degenerassem em curvas fechadas sem vértice, a que ele chamava "contornos" (p. 426). Listing tinha um termo para arestas, seja com dois, um ou nenhum vértices: "linhas" (p. 104). Ambos compreenderam que era necessária uma teoria completamente nova para explicar as "fantasias" que eles tornaram naturais com sua estrutura conceptual liberal — Cayley inventou a "Teoria de Partições de um Recinto", Listing, um dos grandes pioneiros da topologia moderna, o "Censo de Complexos espaciais".

[157] Veja-se, pp. 58-60.

fundo"; *nem todo aumento de conteúdo é também aumento em profundidade*: pense em (6) e (7)! [158]

ALFA: Quer dizer que você pararia em (5) na minha série?

GAMA: Sim. (6) e (7) não significam progresso, mas degenerescência! Em vez de prosseguir a (6) e (7), eu preferiria encontrar e explicar algum contra-exemplo novo e *sensacional*! [159]

ALFA: Afinal de contas, você pode estar com razão. Mas quem decide *onde* parar? Profundidade é apenas uma questão de gosto.

---

158 Alguns matemáticos não podem distinguir o trivial do não trivial. Isso é sobremodo terrível quando falta de sentimento pela relevância se alia com a ilusão de que se pode elaborar uma fórmula perfeitamente completa que abranja todos os casos concebíveis (cf. Nota 129). Tais matemáticos podem trabalhar durante anos na "generalização" derradeira de uma fórmula, e acabar por estendê-la com umas poucas correções triviais. O excelente matemático J. C. Becker, dá um divertido exemplo: após muitos anos de trabalho ele produziu a fórmula $V - A + F = 4 - 2n + q$ em que n é o número de cortes necessários para dividir a superfície poliedral em superfícies simplesmente ligadas para as quais $V - A + F = 1$, e q é o número de diagonais que se tem de acrescentar para reduzir todas as faces a simplesmente ligadas ([1869*a*], p. 72). Ele ficou muito orgulhoso de sua realização que — dizia ele — lançava "luz inteiramente nova", e, inclusive, "levava à conclusão" "um assunto em que pessoas como Descartes, Euler, Cauchy, Gergonne, Legendre, Grunert e von Staudt tiveram interesse" antes dele (p. 65). Mas faltavam três nomes no rol citado: Lhulier, Jordan e Listing. Quando lhe falaram de Lhulier ele publicou uma melancólica nota, admitindo que Lhulier sabia de tudo isso há mais de cinqüenta anos. Quanto a Jordan, ele não estava interessado em faces circundantes, mas acontecia ter interesse em poliedros abertos com limites, de modo que em sua fórmula m, o número de limites, figura em acréscimo a n ([1866*b*], p. 86). Assim, Becker — em novo trabalho [1869*b*] — combinava as fórmulas de Lhulier e de Jordan em $V - A + F = 2 - 2n + q + m$ (p. 343). Mas em seu embaraço apressou-se, e não digeriu o longo trabalho de Listing. De modo que melancolicamente concluiu em seu [1869*b*] com "A generalização de Listing é ainda mais ampla". (A propósito, este último tentou estender sua fórmula também a poliedros estelados [1874]; cf. nota 39).

159 Algumas pessoas podem manter idéias filistéias sobre uma lei de lucros decrescentes em refutações. Quanto a Gama, certamente não. Não discutiremos agora os poliedros de um lado (Möbius, [1865]), ou poliedros n-dimendionais (Schläfli, [1852]). Esses confirmariam a expectativa de Gama de que refutações de extensão de conceito totalmente inesperadas podem sempre dar a toda teoria um novo impulso — talvez revolucionário.

GAMA: Por que não haver críticos matemáticos como temos críticos literários para aperfeiçoar o gosto matemático pela crítica pública? Podemos, inclusive, conter a maré de trivialidades pretenciosas na literatura matemática. [160]

SIGMA: Se você parar em (5) e converter a teoria dos poliedros numa teoria de esferas trianguladas com n lados, como poderá, em caso de necessidade, tratar de anomalias triviais como aquelas explicadas em (6) e (7)?

MI: Brincadeira de criança!

TETA: Bem. Então paremos em (5) por enquanto. *Mas podemos parar*? A extensão de conceito pode refutar (5)! Podemos ignorar a extensão de um conceito se ele produzir contra-exemplo que demonstre a pobreza do conteúdo de nosso teorema. Mas se a extensão produzir um contra-exemplo que demonstre sua patente falsidade, que acontece? Podemos nos recusar a aplicar nossas *Normas 4* ou *5* de aumento de conteúdo para explicar uma fantasia, mas temos que aplicar nossa *Norma 2* de manutenção de conteúdo para desviar refutação por uma fantasia.

GAMA: É isso! Podemos recusar *"generalizações"* baratas, mas dificilmente podemos recusar *refutações* "baratas".

SIGMA: Por que não elaborar uma definição antimonstro de "poliedro", acrescentando uma nova cláusula para cada fantasia?

TETA: Em ambos os casos temos nosso antigo pesadelo, novamente o eterno retorno.

ALFA: Enquanto você está aumentando o conteúdo, você revela idéias, cria matemática; com isso você esclarece conceitos, cria lingüística. Por que não parar logo quan-

---

160 Pólya assinala que generalização superficial, barata, é "mais da moda hoje do que antigamente. Ela dilui uma ideiazinha numa enorme terminologia. O autor em geral prefere até mesmo tomar essa ideiazinha de alguém, abstém-se de acrescentar qualquer observação original, e evita solucionar qualquer problema, a não ser uns poucos problemas decorrentes das dificuldades de sua própria terminologia. Seria muito fácil citar exemplos, mas não desejo hostilizar pessoas" ([1954], Vol. I, p. 30). Outro dos grandes matemáticos do nosso século, John von Neumann, também advertia contra esse "perigo de homens com um gosto excepcionalmente bem desenvolvido" ([1947], p. 196). Fica-se imaginando, no entanto, se a "influência de homens com gosto excepcionalmente bem desenvolvido" será suficiente para salvar a matemática em nossa era do "publique ou desapareça".

do se para de aumentar o conteúdo? Por que nos enredarmos em círculos viciosos?

MI: Nada de matemática *versus* lingüística de novo! O conhecimento jamais ganha com essas discussões.

GAMA: O termo "jamais" logo se converte em "cedo". Acho que devemos de novo encerrar nossa antiga discussão.

MI: Mas ainda terminamos num beco sem saída! Ou alguém tem algo de novo a dizer?

KAPA: Acho que tenho.

9. *Como a Crítica Pode Converter a Verdade Matemática em Verdade Lógica*

(*a*) *A extensão ilimitada do conceito destrói o significado e a verdade*

KAPA: Alfa já declarou que nosso "velho método" leva a um círculo vicioso.[161] Gama e Lambda responderam com a esperança de que o fluxo de refutações pode esgotar-se:[162] mas agora que compreendemos o mecanismo do êxito refutacional — a extensão de conceito — sabemos que sua esperança era vã. Para qualquer proposição há sempre alguma interpretação suficientemente estreita de seus termos, tal que ela se converte em verdadeira, e alguma interpretação suficientemente ampla tal que ela se torne falsa. Depende, é claro, de nossas intenções qual interpretação é pretendida e qual não é. A primeira interpretação pode ser chamada de *dogmática, verificacionista ou justificacionista.* A segunda pode ser chamada de *interpretação cética, crítica ou refutacionista.* Alfa chamou a primeira de estratagema convencionalista[163] — mas agora vemos que a segunda também o é. Todos vocês puseram em ridículo as interpretações dogmáticas de Delta de sua conjectura ingênua[164] e depois a interpretação dogmática de Alfa do teorema.[165] Mas a extensão de conceito refutará qualquer declaração, e não dará *qualquer* declaração verdadeira.

---

161 Vejam-se pp. 76-7.
162 Veja-se, *ibidem.*
163 Alfa de fato não empregou esse termo popperiano explicitamente; veja-se p. 38.
164 Veja-se acima, § 4, (*b*).
165 Veja-se acima, § 5.

GAMA: Espere. De fato, nós estendemos "poliedro" — depois fizemo-lo em pedaços e o jogamos fora: como Pi observou, o conceito ingênuo "poliedro" não mais figura no teorema.

KAPA: Mas então você começará estendendo um termo no teorema, um termo teórico, não é? Você prefere estender "face simplesmente ligada" de modo a incluir o círculo e o rolo do cilindro.[166] Você deu a entender que era questão de honestidade intelectual esticar o pescoço para atingir o respeitável *status* de refutabilidade, isto é, tornar possível a interpretação refutacionista. Mas, devido à extensão de conceito, a refutabilidade significa refutação. Assim, você escorrega numa ladeira infinita, refutando cada teorema e substituindo-o por um mais "rigoroso" — por um cuja falsidade ainda não foi "revelada"! Mas você *jamais se livra da falsidade.*

SIGMA: Mas que acontece se pararmos em certo ponto, adotarmos interpretações justificacionistas, e não nos importarmos com a verdade ou com certa forma lingüística em que a verdade foi expressa?

KAPA: Então você terá que afastar contra-exemplos que estendam conceito com definições antimonstro. Com isso, você vai escorregar em outra ladeira infinita: você será obrigado a admitir cada "forma lingüística especial" de seu teorema verdadeiro que não era suficientemente rigoroso, e será obrigado a incorporar nele definições cada vez mais "rigorosas" depositadas em termos cuja vagueza ainda não foi revelada! Mas *você jamais se livra da vagueza.*[167]

TETA (à parte): Que há de errado com uma heurística em que a vagueza é o preço que pagamos pelo progresso?

ALFA: Eu lhe digo: conceitos rigorosos e verdades inabaláveis não residem na linguagem, mas apenas no pensamento!

---

166 Veja-se acima, pp. 62-8.

167 *Nota do Organizador.* É correta a alegação de Kapa de que a vagueza é inevitável (alguns termos tendem a ser primitivos). Mas está enganado ao pensar que isso significa que se pode sempre produzir contra-exemplos por "extensão de conceito". Por definição, prova válida é aquela em que, seja de que modo se interpretem os termos descritivos, nunca se produz um contra-exemplo — isto é, sua validade não depende do significado dos termos descritivos, que podem ser assim extensíveis o quanto se queira. Isto é observado pelo próprio Lakatos mais adiante, pp. 138-9 e (mais claramente), no capítulo 2, p. 163.

GAMA: Vou desafiá-lo, Kapa. Tome o teorema tal como era, depois que tomamos em consideração o cilindro: "Para todos os objetos simples, com faces simplesmente ligadas tais que as arestas e as faces terminem em vértices, $V - A + F = 2$." Como você refutaria isso pelo método de extensão de conceito?

KAPA: Primeiro recuo aos termos definidores e enuncio a proposição por extenso. Escolho então o conceito a estender. Por exemplo, "simples" equivale a "extensível num plano depois de retirada uma face". Estenderei "extensão". Tomemos o já discutido tetraedro gêmeo — o par com uma *aresta* em comum (fig. 6 (*a*)). É simples, suas faces são simplesmente ligadas, mas $V - A + F = 3$. Então, nosso teorema é falso.

GAMA: Mas esse tetraedro gêmeo *não é* simples!

KAPA: É claro que é simples. Retirando qualquer face, posso planificá-lo: É preciso cuidado quando chegar à aresta crítica, para que não se rasgue nada ali quando abrir o segundo tetraedro ao longo daquela aresta.

(*a*) (*b*)

Fig. 24

GAMA: Mas isso não é estender! Você *rasga* — ou *divide* — a aresta em duas arestas! Você, certamente, não pode delinear um ponto em dois: *estender é um delineamento bicontínuo um a um.*

KAPA: *Def. 7?* Receio que essa interpretação estreita e dogmática de "estender" não apele ao *meu* senso comum. Por exemplo, posso bem imaginar a extensão de um quadrado (fig. 24 (*a*)) em dois quadrados encaixados pela extensão das linhas demarcatórias (fig. 24 (*b*)). Você chamaria isso de rasgar ou dividir só porque não é um "delineamento bicontínuo um a um? A propósito, surpreende-me porque você não definiu estender como transformação que deixa V, A e F inalterados, e o fez com ele!

GAMA: Certo. Você vence de novo. Tenho que concordar com sua interpretação refutacionista de "estender" e expandir minha prova, ou descobrir uma ainda mais profunda, ou incorporar um lema — ou tenho que introduzir nova definição antimonstro. Contudo, em qualquer desses casos, terei que tornar meus termos definidores cada vez mais claros. Por que não devo chegar a um ponto em que os significados dos termos sejam tão claros como cristal de modo a haver uma só interpretação, como no caso de $2 + 2 = 4$? Nada há de elástico sobre o significado desses termos, e nada de refutável quanto à verdade dessa proposição, que brilha eternamente à luz natural da razão.

KAPA: Pálida luz essa!

GAMA: Estenda, se puder.

KAPA: Mas isso é brincadeira de criança! Em certos casos, dois mais dois são cinco. Suponha que peça a remessa de dois artigos, cada um pesando duas libras; eles são entregues numa caixa pesando uma libra; então, nesse invólucro duas libras e duas libras farão cinco libras!

GAMA: Mas você obtém cinco libras pela soma de *três* pesos, 2 mais 2 mais 1!

KAPA: Certo, nossa operação "dois mais dois igual a 5" não é uma soma no sentido originalmente pretendido. Mas podemos transformar o resultado em verdadeiro, pela simples extensão do significado de adição. A soma ingênua é um caso muito especial da embalagem quando o peso do material envoltório é zero. Temos que levar esse lema como condição na conjectura: nossa conjectura aperfeiçoada será: "$2 + 2 = 4$ para soma 'sem peso'".[168] Toda a história da álgebra é uma série de tais extensões de conceito e prova.

GAMA: Acho que você leva "estender" um pouco longe. Da próxima vez você interpretará "mais" como "vezes" e vai considerá-lo uma refutação! Ou você interpretará "todos" como "nenhum" em "Todos os poliedros são poliedros"! Você estende o conceito de extensão de conceito! Temos que demarcar a refutação por *extensão racional*, distintamente de "refutação" por *extensão irracional*. Não podemos permitir que você estenda qualquer termo a seu bel-prazer.

---

168 Cf. Félix [1957], p. 9.

Devemos exprimir o conceito de contra-exemplo em termos claros como cristal!

DELTA: Até Gama converteu-se em antimonstro: ele agora quer uma definição antimonstro da refutação de extensão de conceito. *A racionalidade, afinal de contas, depende de conceitos inelásticos, exatos!* [169]

KAPA: *Mas não existem conceitos como esses! Por que não admitir que nossa capacidade para especificar o que queremos dizer é nula, por conseguinte nula nossa capacidade de comprovar?* Se você quiser que a matemática tenha significado, deve resignar-se à certeza. Se você quiser ter certeza, desfaça-se do significado. Você não pode ter ambos ao mesmo tempo. Palavras sem nexo estão a salvo de refutações; proposições significativas são refutáveis por extensão de conceito.

GAMA: Nesse caso, suas últimas declarações são também refutáveis, e você sabe disso. "Os céticos não são uma seita de pessoas que se persuadem do que dizem, mas uma seita de mentirosos."[170]

KAPA: Blasfêmias: o derradeiro refúgio da razão!

(b) *Extensão de conceito mitigada pode converter a verdade matemática em verdade lógica*

TETA: Acho que Gama tem razão quanto à necessidade de distinguir a extensão de conceito racional da irracional. Porque a extensão de conceito percorreu longo caminho, e modificou-se de uma atividade racional moderada para uma atividade radical e irracional.

Inicialmente, a crítica concentra-se exclusivamente na *ligeira* extensão de *determinado* conceito. Tem que ser *ligeira*, de modo que não a notemos; se sua natureza real fosse descoberta, poderia não ser aceita como crítica legítima. Ela se concentra em *determinado* conceito, como no caso de nossas proposições universais um tanto sem requinte: *"Todos os AA são BB."* A crítica então significa achar um *A* ligeiramente extenso (*poliedro*, no nosso caso) que não seja *B* (*euleriano*, em nosso caso).

---

169 A exigência de Gama de uma definição cristalina de "contra-exemplo" equivale a uma exigência de conceitos inelásticos, cristalinos na metalinguagem como condição de discussão racional.

170 Arnauld e Nicole [1724], pp. xx-xxi.

Mas Kapa acentuou isso em dois sentidos. Primeiro, submeter *mais* de um constituinte da proposição sob ataque para crítica de extensão de conceito. Segundo, converter a extensão de conceito a partir de atividade sub-reptícia e mais ou menos modesta em *deformação franca* do conceito, como a deformação de "todos" em "nenhum". No caso, qualquer tradução significativa dos termos sob ataque que torne o teorema falso é aceita como refutação. Eu diria, então, que *se uma proposição não pode ser refutada com respeito aos constituintes a, b,..., então é logicamente verdadeira com respeito àqueles constituintes.*[171] Tal proposição é o resultado final de um longo processo especulativo-crítico durante o qual a carga significativa de alguns termos é completamente transferida para os termos restantes e para a forma do teorema.

Agora, tudo o que Kapa afirma é que não existem proposições que sejam logicamente verdadeiras com respeito a todos os seus constituintes. Mas pode haver proposições logicamente verdadeiras com respeito a *alguns* constituintes, de modo que o fluxo de refutações só pode ser novamente inaugurado se forem acrescentados novos constituintes extensíveis. Se vamos ao fundo da coisa, culminamos no irracionalismo — mas não temos necessidade. Ora, onde devemos traçar a linha divisória? Podemos perfeitamente consentir na extensão de conceitos apenas para determinado subsetor de constituintes marcantes que se transformem nos principais alvos da crítica. A verdade lógica não dependerá de seu significado.

SIGMA: Desse maneira, chegamos afinal à questão de Kapa: fizemos com que a verdade seja independente do significado de pelo menos *alguns* de seus termos!

TETA: Certo. Mas se quisermos livrar-nos do ceticismo de Kapa e fugir de seu círculo vicioso, temos certamente que parar a extensão de conceito no ponto em que ele deixa de ser instrumento de progresso e passa a ser arma de destruição: é possível que tenhamos que encontrar aqueles

---

171 Trata-se de uma versão ligeiramente parafraseada da definição de Bolzano de verdade lógica ([1837], § 147). A razão pela qual Bolzano, por volta de 1830, propunha sua definição, é uma questão enigmática, sobretudo desde que sua obra prevê o conceito de modelo, uma das grandes inovações na filosofia matemática do século XIX.

termos cujo significado só pode ser estendido à custa de destruir os princípios básicos de racionalidade.[172]

KAPA: Podemos estender os conceitos em sua teoria da racionalidade crítica? Ou será ela manifestamente verdadeira, formulada em termos exatos, inextensíveis, que não precisam ser definidos? Terminará sua teoria da crítica numa "fuga ao compromisso": será tudo criticável, exceto sua teoria da crítica, a sua "metateoria"?[173]

ÔMEGA (*a Épsilon*): Não gosto dessa transição de Verdade para racionalidade. Racionalidade *de quê?* Percebo uma infiltração convencionalista.

BETA: De que é que vocês falam? Compreendo o "padrão moderado" de extensão de conceito de Teta. Compreendo também que a extensão de conceito pode atacar mais de um termo: vimos isso quando Kapa estendeu "extensão" ou quando Gama estendeu "tudo"...

SIGMA: Certamente, Gama estendeu "simplesmente ligados"!

BETA: Mas não. "Simplesmente ligados" é uma fórmula — ele apenas estendeu o termo "todos" que ocorria entre os termos definidores.[174]

---

172 A crítica matemática do século XIX ampliou mais e mais conceitos, e alterou a carga significativa de mais e mais termos no sentido da forma lógica das proposições e no sentido dos poucos (por enquanto) termos inestendidos. Na década de 30 do nosso século esse processo parecia tornar-se mais lento e a linha demarcatória entre termos inextensíveis ("lógicos") e extensíveis ("descritivos") parecia tornar-se estável. Uma lista, contendo pequeno número de termos lógicos, veio a adquirir amplo consenso, de modo que uma definição geral de verdade lógica tornou-se possível; a verdade lógica não mais era "com respeito a" uma lista *ad hoc* de constituintes (Cf. Tarski, [1935,] Tarski, porém, estava perturbado com essa demarcação e imaginava se, afinal, teria que voltar a um conceito relativizado de contra-exemplo, e, conseqüentemente, de verdade lógica (p. 420) — como o de Bolzano que, aliás, Tarski não conhecia. O resultado mais interessante nesse sentido foi o de Popper [1947-8], do qual se segue que não se pode desistir de mais constantes lógicas sem desistir de alguns princípios básicos de discussão racional.

173 "Recuo do compromisso" é expressão de Bartley [1962]. Ele investiga o problema quanto a se uma defesa racional do racionalismo crítico é possível sobretudo com respeito ao conhecimento religioso — mas os padrões de problemas são os mesmíssimos quanto ao conhecimento matemático.

174 Veja-se antes, pp. 62-8. Gama de fato retirou alguma carga do significado de "todos", de modo a que ele não mais se aplicasse apenas a classes não-vazias. A modesta extensão de "todos" pela retirada

TETA: Volte à questão. Você está insatisfeito com a extensão de conceito radical, "aberta"?

BETA: Sim. Ninguém aceitaria isso como autêntica refutação! Percebo claramente que a tendência moderada de estender conceito do criticismo heurístico que Pi descobriu é dos mais importantes veículos do progresso matemático. Mas os matemáticos jamais aceitarão essa última forma moderada de refutação!

PROFESSOR: Você está enganado, Beta. Eles *de fato* a aceitaram, e sua aceitação foi uma encruzilhada na história da matemática. *Essa revolução na crítica matemática alterou o conceito de verdade matemática, alterou os padrões de prova matemática, alterou os padrões de progresso matemático!*[175] Mas encerremos, por ora, nossa discussão: discutiremos o novo estágio da matemática em outra oportunidade.

SIGMA: Mas então nada está solucionado. Não podemos parar *agora*.

PROFESSOR: Estou de acordo. Esse estágio mais recente terá importantes retroalimentações para nosso debate[176] Mas uma investigação científica "começa e termina com problemas".[177] (*Deixa a sala de aula*).

BETA: Mas eu não tinha problema algum no começo! E agora *só* tenho problemas!

---

da "carga existencial" de seu significado e, com isso, convertendo a seqüência vazia de monstro em *burguês* comum foi um fato importante — relacionado não somente com a reinterpretação da lógica aristotélica pela teoria booleana dos conjuntos, mas também com o surgimento do conceito de satisfação vazia em discussão matemática.

175 Os conceitos de crítica, contra-exemplo, conseqüência, verdade e prova são inseparáveis; quando eles mudam, a principal mudança ocorre no conceito de crítica e a alteração nos demais vem a seguir.

176 Cf. Lakatos [1962].

177 Popper [1963*b*], p. 968.

II

Introdução dos Organizadores

A prova de Poincaré da conjectura Descartes-Euler já foi antes mencionada.[178] Em sua tese doutoral, Lakatos apresentou comentário pormenorizado dessa prova, mediante uma discussão dos argumentos pró e contra o enfoque "euclideano" da matemática. Parte dessa discussão foi incorporada por Lakatos ao Capítulo I (veja-se, p.ex., pp.   ) e outras partes foram reescritas como partes de *Eterno Retorno e os Fundamentos da Matemática* (Lakatos [1962]). Por conseguinte, omitiremos esses comentários aqui.

O defensor do programa euclideano — a tentativa de dotar a matemática de axiomas verdadeiros, indubitáveis, calcados em termos perfeitamente claros — foi Épsilon. A filosofia de Épsilon é desafiada, mas o professor observa que o modo mais óbvio e direto de desafiar Épsilon é pedir-lhe que dê uma prova da conjectura Descartes-Euler que satisfaça aos padrões euclideanos. Épsilon aceita o desafio.

1. *Tradução da Conjectura em Termos "Perfeitamente Conhecidos" da Álgebra Vetorial. O Problema de Tradução*

ÉPSILON: Aceito o desafio. Provarei que todos os poliedros simplesmente ligados com faces simplesmente ligadas são eulerianos.

---

178 Vejam-se pp. 91-2 e 121-2.

PROFESSOR: Sim, enunciei esse teorema numa aula anterior. [179]

ÉPSILON: Como acentuei, tenho primeiro que encontrar a verdade a fim de comprová-la. Ora, eu nada tenho contra o emprego do seu método de provas e refutações como método de descobrir a verdade, mas onde o senhor pára, começo eu. Onde o senhor cessa o aperfeiçoamento, daí eu começo provando. [180]

ALFA: Mas esse longo teorema está cheio de conceitos extensíveis. Não acho que seja difícil refutá-lo.

ÉPSILON: Você achará impossível refutá-lo. Circunscreverei o significado de cada termo isoladamente.

PROFESSOR: Vá em frente.

ÉPSILON: Primeiramente, empregarei apenas os conceitos mais claros possíveis. Talves possamos ser capazes de estender nosso conhecimento perfeito para abranger câmaras óticas, papel e tesouras, bolas de borracha e bombas, mas agora devemos esquecer essas coisas. A finalidade, certamente, não pode ser alcançada utilizando-se todas essas diversas ferramentas. Nossas falhas anteriores, a meu ver, prendem-se ao fato de que empregávamos métodos alheios à natureza pura e simples dos poliedros. A imaginação exuberante que mobilizou todos esses instrumentos está completamente mal orientada. Introduziu elementos externos, contingentes, que não pertencem à essência dos poliedros, e assim não surpreende que fracasse quanto a certos poliedros. A fim de obter uma prova perfeita, temos que restringir a gama de instrumentos utilizados. [181] Isso, porque essa imaginação exuberante torna a *certeza* demasiado difícil de atingir. A verdade dos lemas que pendem nas propriedades da borracha, lentes, etc., é difícil de garantir. Devemos abandonar tesouras,

---

179 Veja-se p. 56.

180 Épsilon é talvez o primeiro euclideano em toda a história a apreciar o valor heurístico do processo de prova. Até o século XVII, os euclideanos aprovavam o método platônico de análise como o método de heurística; mais tarde, eles substituíram o método pelo golpe de sorte ou de gênio.

181 Em análise de prova, não existe limitação quanto aos "instrumentos". Podemos utilizar qualquer lema, qualquer conceito. Isto vale para qualquer teoria não-formal em progresso, onde a solução de problemas é uma questão de luta livre. Numa teoria formalizada os instrumentos são totalmente prescritos na sintaxe da teoria. No caso ideal (em que há um processo decisório) a solução de problema é ritual.

bombas, câmaras e semelhantes, porque "para a compreensão de uma questão, devemos escoimá-la de tudo o que é supérfluo, tornando-a o mais simples possível." [162] Expurgo meu teorema [183] e minha prova de tudo isso, e os restrinjo às coisas mais simples e fáceis: [184] isto é, a vértices, arestas e faces. Não definirei *esses* termos, visto que talvez não possa haver desacordo quanto a seu significado. Definirei qualquer termo que seja obscuro no mínimo, em termos "primitivos" perfeitamente conhecidos.[185]

Ora, é claro que nenhum dos lemas específicos em qualquer das provas era evidentemente verdadeiro; não passavam de conjecturas tais como "Todos os poliedros são enchíveis como bola", etc. Mas agora exijo que nenhuma conjectura de qualquer espécie seja permitida nos julgamentos que transmitiremos à verdade das coisas". [186] Decomporei a conjectura em lemas que não são mais conjecturas, porém "intuições", isto é, "indubitáveis apreensões de um espírito puro e atencioso, nascidas exclusivamente à luz da razão". [187] Exemplos dessas "intuições" são: *todos os poliedros têm faces; todas as faces têm arestas; todas as arestas têm vértices.* Não levantarei questões quanto a se o poliedro é um sólido ou uma superfície. Essas são noções vagas e de qualquer modo supérfluas para os nossos fins. Para mim, um poliedro consiste de três séries: a série V vértices (chamá-los-ei $P^0{}_1$, $P^0{}_2$, ..., $P^0{}_V$); a série de A arestas (chamá-las-ei $P^1{}_1$, $P^1{}_2$, ..., $P^1{}_A$), e a série de F faces (chamá-las-ei $P^2{}_1$, $P^2{}_2$, ..., $P^2{}_F$). A fim de caracterizar um poliedro também precisaremos de uma espécie de tabela que nos informe que vértices pertencem a que arestas, e que arestas pertencem a que faces. Chamarei essas tabelas de "matrizes de incidência".

---

182 Trata-se de palavras de Descartes em seu [1628], *Regra XIII.*

183 Não se deve esquecer que embora a análise de prova conclua com um teorema, a prova euclideana começa com ele. Na metodologia euclideana não há conjecturas, somente teoremas.

184 Descartes [1628], *Regra IX.*

185 Regras de Pascal para definições ([1659], pp. 596-7): "Não definir qualquer termo que seja perfeitamente conhecido. Não deixar sem definição qualquer termo que contenha o mínimo de equívoco e obscuridade. Empregar na definição de termos apenas palavras perfeitamente conhecidas ou já explicadas."

186 Descartes [1628], Notas à *Regra III.*

187 *Ibidem.*

GAMA: Estou um tanto confuso com sua definição de poliedros. Em primeiro lugar, como você se dá ao incômodo de definir a noção de poliedro, concluo que você não a considera perfeitamente bem conhecida. Mas então de onde você obtém a sua definição? Você definiu o obscuro conceito de poliedro em termos de conceitos "perfeitamente conhecidos" de faces, arestas e vértices. Mas a sua definição — isto é, de que poliedro é uma série de vértices, mais uma série de arestas e mais uma série de faces, mais uma matriz de incidência, evidentemente deixa de apreender a noção intuitiva de poliedro. Ela implica, por exemplo, que qualquer polígono é um poliedro, como, digamos, um polígono que tenha uma aresta livre e saliente. Você tem agora duas alternativas. Você pode dizer que "a metemática nada tem a ver com o significado corrente de seus termos técnicos... a definição matemática cria o significado matemático".[188] Nesse caso, definir a noção de poliedro é abandonar toda a velha noção e substituí-la por novo conceito. Mas nesse caso qualquer semelhança entre o seu "poliedro" e qualquer poliedro autêntico será inteiramente casual, e é certo que você não terá certo conhecimento sobre autênticos poliedros ao estudar o seu poliedro burlesco. A outra alternativa é permanecer fiel à idéia de que definição é esclarecimento, que ela explicita aspectos essenciais, que é uma tradução ou transformação preservadora de significado de um termo numa linguagem mais clara. Neste último caso, as suas definições são conjecturas, podendo ser verdadeiras, mas também ser falsas. Como você pode ter tradução certamente verdadeira de um termo vago em termos precisos?

ÉPSILON: Confesso que fui apanhado de surpresa por essa crítica. Eu achava que você podia duvidar da verdade absoluta de meus axiomas. Achava que poderia perguntar como tais juízos sintéticos *a priori* são possíveis, e preparei alguns contra-argumentos, mas não esperava um ataque na linha de definições. Mas suponho que minha resposta seja: obtenho minhas definições do mesmo modo como obtenho meus axiomas, isto é, por intuição. Elas são realmente de igual porte: você pode tomar minhas definições como axiomas adicionais[189] ou pode tomar meus axiomas

---

188 Pólya [1945], pp. 81-2.

189 "Definição como um enunciado indemonstrável de natureza essencial" (Aristóteles, *Analytica Posteriora*, 94*a*).

como definições implícitas.[190] Ambos dão a essência dos termos em questão.

PROFESSOR: Basta de filosofia! Vamos à sua prova. Não gosto de sua filosofia, mas pode ser que goste de sua prova.

ÉPSILON: Muito bem. Primeiro, traduzirei o teorema a ser provado em minha estrutura conceitual perfeitamente simples e clara. Meus termos específicos indefinidos serão: vértices, arestas, faces e poliedros. Às vezes me referirei a eles como politopos[191] adimensionais, unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais.

ALFA: Mas há menos de dez minutos você definia poliedros em termos de vêrtices, arestas e faces!

ÉPSILON: Eu estava enganado. Aquela "definição" era uma antecipação insensata. Eu me precipitei em julgamento, tolamente. A verdadeira intuição, a verdadeira interpretação, amadurece lentamente, e expurgar a alma de conjecturas leva tempo.[192]

BETA: Há um momento você mencionou alguns de seus axiomas, como: faces *têm* arestas, ou a cada face *pertencem* arestas — "pertencem a": essa também é uma expressão primitiva?

ÉPSILON: Não. Menciono apenas termos *específicos* à teoria em questão, no caso presente a teoria dos poliedros, mas não a lógica, a teoria dos conjuntos, a aritmética da teoria subjacente, com a qual presume perfeita familiaridade. Mas deixe-me agora prosseguir com o termo "simplesmente ligados", que evidentemente não é absolutamente claro. Primeiro definirei simples conexibilidade de poliedros e depois simples conexibilidade de faces. Tomo a simples conexibilidade de poliedros em primeiro lugar. Trata-se de fato da abreviação de uma longa expressão: diz-se que um poliedro é simplesmente ligado (1) se to-

---

190 Gergonne [1818].

191 Schläfli descobriu que esses termos podem ser abrangidos sob um único termo abstrato ([1852]). Chamou-os de "poli-esquemas". Listing [1861] chama-os de *"curian"*. Mas foi Schläfli que estendeu a generalização a mais de três dimensões.

192 "Por questão de distinção, chamo as conclusões da razão humana quando aplicada comumente em questões da natureza de Previsões da Natureza (como uma coisa precipitada ou prematura). Aquilo que a razão extrai dos fatos por um processo correto e metódico, chamo de Interpretação da Natureza" (Bacon [1620], XXVI).

dos os sistemas de arestas fechados sem presilhas têm um interior e um exterior e (2) se houver apenas um sistema de faces fechados sem presilhas — que separem o interior do exterior do poliedro. Ora, isto está cheio de termos mais ou menos vagos como "fechados", "dentro", "fora" e assim por diante. Mas definirei todos eles em termos perfeitamente conhecidos.

GAMA: Você exorcizou termos mecânicos — como bombear, cortar — por não serem dignos de confiança; agora, você alivia a carga de termos geométricos, como fechamento. Acho que você está exagerando no seu zelo de limpeza. "Um sistema fechado de arestas" é termo perfeitamente claro, não precisa ser definido.

ÉPSILON: Não. Você está enganado. Você chamaria um polígono estelado de sistema fechado de arestas? Talvez sim, porque ele tem limites. Mas ele não "abrange" qualquer área bem definida, e pode ser que alguém defina "sistema fechado de arestas" um sistema de arestas que abranja. Nesse caso, você tem que decidir-se por uma alternativa ou outra.

GAMA: O polígono estelado pode não ser limitado, mas é obviamente *fechado*.

ÉPSILON: Acho que ele é fechado e também limitado. O desacordo é já eloqüente, mas darei ainda maior prova disso. Você diria que o heptaedro é um sistema fechado de faces e que é limitado?

GAMA: Nunca ouvi falar do seu heptaedro.

ÉPSILON: Trata-se de um tipo interessante de poliedro, visto que tem um lado só. Não se refere a qualquer sólido geométrico, não separa o espaço em duas partes, em interior e exterior. Alfa, por exemplo, guiado por sua "clara" intuição geométrica, disse anteriormente que um sistema fechado de faces limita "se existe limite entre o interior e o exterior de um poliedro". Você diria que a superfície do heptaedro não limita? Ou, familiarizando-se com o heptaedro, mudaria o seu conceito de sistemas "limitantes". Neste caso, devo humildemente perguntar-lhe: acaso conceitos perfeitamente conhecidos podem ser mudados pela experiência? Não podem. Portanto, "fechado" "limitado" não são termos *perfeitamente* conhecidos. Por conseguinte, passo a defini-los.

TETA: Desenhe o heptaedro. Com que se parece?

ÉPSILON: Pois não. Começo primeiro com um octaedro comum bem conhecido (fig. 25). Agora, acrescento três quadrados aos planos abrangidos pelas diagonais, por exemplo *A B C D* (fig. 26).

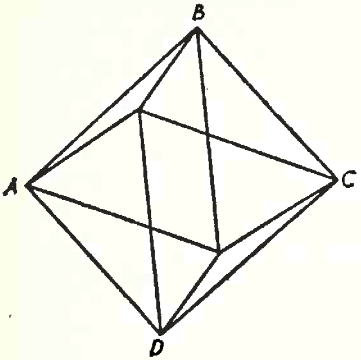


Fig. 25

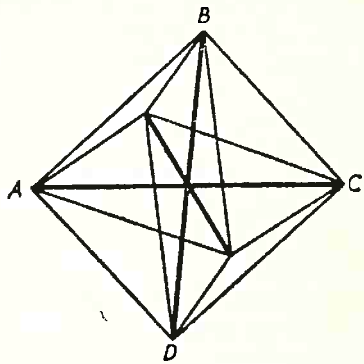


Fig. 26

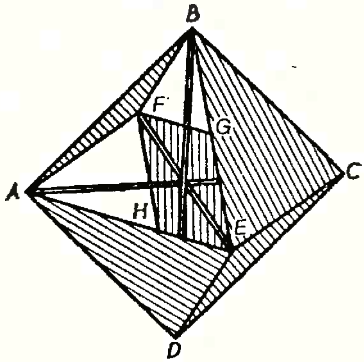


Fig. 27

DELTA: Deve-se esperar de um poliedro normal que nas arestas apenas duas faces se encontrem. Temos, no caso, três.

ÉPSILON: Espere. Tiro agora quatro triângulos para satisfazer a essa exigência: da primeira metade da figura retiro o triângulo superior do lado esquerdo e o triângulo inferior do lado direito. Da parte traseira da figura retiro

193 A figura 27 foi redesenhada de Hilbert e Cohn-Vossen [1932].

o triângulo inferior da esquerda e o superior da direita. Permanecem, então, apenas os quatro triângulos sombreados no diagrama (fig. 27). Obtivemos, assim, uma figura que consiste de quatro triângulos e três quadrados. Este é o heptaedro.[194] Suas arestas e vértices são as arestas e vértices originais do octaedro. As diagonais do octaedro não são arestas de nossa figura, mas linhas em que ele se corta. Não dou muita importância à intuição geométrica, nem estou muito interessado no fato de que meu poliedro fique tão mal situado no espaço tridimensional. Este fato não é mostrado pelas matrizes de incidência de meu heptaedro. (A propósito, o heptaedro pode otimamente situar-se sem auto-intersecção no espaço a cinco dimensões.)[195]

Então pergunta-se: a superfície do heptaedro limita? A resposta será "não" se definirmos superfície "limitante" quando, e apenas quando, for o limite de um poliedro no sentido de que separe o lado de dentro do lado de fora do poliedro em questão. Por outro lado, a resposta será "sim" se definirmos uma superfície como "limitante" quando, e apenas quando, for o limite do poliedro no sentido de que ele contenha todas as suas faces. Vocês percebem? Temos que *definir* "limite", temos que definir "limitação". Esses conceitos podem dar a impressão de familiaridade antes que se comece a investigar a riqueza das formas poliedrais, mas durante essa investigação os conceitos rústicos originais separam-se e exibem uma fina estrutura, e assim temos que definir os conceitos cuidadosamente de modo que fique claro o sentido em que os estamos empregando.

KAPA: Aí você tem que vetar maiores investigações para evitar mais divisões de conceitos!

PROFESSOR: Épsilon, não dê atenção a Kapa. Refutações, inconsistências, crítica em geral são muito importantes, mas apenas se levam a aperfeiçoamento. *Mera refutação não significa vitória alguma.* Se a pura crítica, mesmo que correta, tivesse autoridade, Berkeley teria cessado

---

194 Descoberto por C. Reinhardt (veja-se seu [1885], p. 114).

195 Essa característica de um só lado ou de dois lados dependente do número de dimensões do espaço foi notada pela primeira vez por W. Dyck. Veja-se seu [1888], p. 474.

o desenvolvimento da matemática e Dirac não teria encontrado editor para os seus trabalhos.

ÉPSILON: Não se preocupe. Não dou importância às tolices inoportunas de Kapa. Vou agora traduzir os meus termos, traduzir tudo em meus poucos termos específicos primitivos — polítopos e matrizes de incidência. Começarei por definir "limitação". O limite de um k-polítopo é a soma dos (k-1) polítopos que pertencem a ele de acordo com as matrizes de incidência. Chamarei a soma de k polítopos de uma cadeia k. Por exemplo, a "superfície" de um poliedro (ou qualquer parte dele) é essencialmente uma cadeia-2. Defino limite de uma cadeia-k como a soma dos (k — 1) polítopos que pertencem à cadeia-k, mas em vez da soma comum tomo a soma módulo 2. Isto significa que o seguinte valeria:

$$0 + 0 = 0, \quad 1 + 0 = 1, \quad 0 + 1 = 1, \quad 1 + 1 = 0.$$

Vocês devem perceber que essa é a verdadeira definição do limite de uma cadeia-k.

BETA: Um momento. Não posso acompanhar com facilidade suas definições k-dimensionais. Deixe-me pensar em voz alta sobre um exemplo.[196] Por exemplo, o limite de uma *face* é, de acordo com a sua definição, a série de arestas que pertencem a ele. Ora, quando eu junto duas faces, a linha limítrofe comum não contém as arestas que ambas contêm. Assim, ao acrescentar as arestas, omitirei aquelas que ocorrem em pares. Por exemplo, tomo dois triângulos (fig. 28). O limite do primeiro é $c + d + e$; o limite do segundo é $a + b + e$, e o limite de sua junção é $a + b + e + c + d + e = a + b + c + d$. Percebo agora por que você introduziu as somas *mod 2* em sua definição. Por favor, continue.

ÉPSILON: Após haver definido "limite" em termos específicos perfeitamente conhecidos, definirei agora "fechamento". Até o momento vocês tinham que confiar num vago vislumbre, ou tinham que definir fechamento em cada caso distintamente: primeiro, o fechamento dos sistemas de arestas, depois o fechamento do sistema de faces.

[196] Nota do editor inglês: "pensar ruidosamente" era uma expressão técnica do inglês lakatosiano. (Traduzimo-la aqui pela expressão corrente. N. do T.)

Agora lhes mostrarei que existe um conceito geral de fechamento, aplicável a qualquer cadeia k, ou, em resumo, um circuito k, se, e apenas se, seu limite for zero.

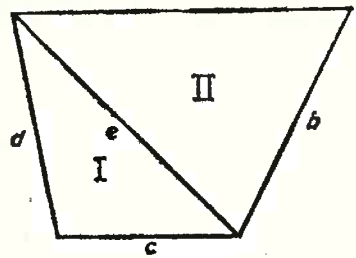


Fig. 28

BETA: Um momento. Deixe-me ver: um polígono comum é intuitivamente fechado, e é de fato de acordo com sua definição, visto que seu limite é zero, já que cada vértice ocorre duas vezes no limite, e que dá zero em sua álgebra *mod 2*. Um poliedro simples comum é fechado, e seu limite é zero, já que em seu limite cada aresta ocorre duas vezes.

KAPA (*à parte*): Beta certamente não pugna em verificar os "vislumbres óbvios e imediatos" de Épsilon!

ÉPSILON: O termo a ser elucidado a seguir é "limitado". Direi que um circuito k limita, se for o limite de uma cadeia $(k + 1)$. Por exemplo, o "equador" de um poliedro esferóide limita, mas o "equador" de um poliedro toróide não. Neste último caso, a idéia alternativa, isto é, que ele limita "todo" o poliedro é agora eliminada, visto que o limite de todo o poliedro é vazio. Agora está absolutamente claro que, por exemplo, o heptaedro limita.

BETA: Você está indo um tanto depressa, mas parece-me que está certo.

GAMA: Você pode provar que qualquer cadeia k limitante é um circuito? Você definiu "limitante" apenas para circuitos — você poderia tê-lo feito para cadeias de um modo geral. Suponho que a razão para a sua definição restrita seja esse teorema latente.

ÉPSILON: Certo. Posso provar isso.

GAMA: Outra coisa. Algumas cadeias são circuitos, alguns circuitos limitam. Isto me parece em ordem. Mas penso que o limite de uma cadeia correta k devia ser fechado.

Por exemplo, talvez eu não pudesse aceitar como poliedro um cubo a que faltasse o topo; talvez não pudesse aceitar como polígono um quadrado a que faltasse uma aresta. Você poderá provar que o limite de qualquer cadeia *k* é fechado?

ÉPSILON: Posso provar que o limite do limite de qualquer cadeia *k* é zero?

GAMA: Isso mesmo.

ÉPSILON: Não. Não posso. Isso é indubitavelmente verdadeiro. É um axioma. Não há necessidade de prová-lo.

PROFESSOR: Ande, vá em frente! Acho que agora você pode traduzir nosso teorema em termos perfeitamente conhecidos.

ÉPSILON: Sim. Em resumo, o teorema traduzido é: "*Todos os poliedros, todos cujos circuitos limitam, são eulerianos.*" O termo específico "poliedro" é indefinido; já defini "circuito" e "limite" em termos perfeitamente conhecidos.

GAMA: Você esqueceu a conectibilidade simples das faces. Você traduziu apenas a simples conectibilidade do poliedro.

ÉPSILON: Você está enganado. Postulo que *todos* os circuitos devam limitar: inclusive circuitos zero. Traduzi "simples conectibilidade de um poliedro" por "todos os unicircuitos e bicircuitos limitam"; e "simples conectibilidade das faces" por 'todos os circuitos zero limitam".

GAMA: Não estou com você. Que vem a ser um circuito zero?

ÉPSILON: Cadeia zero é qualquer soma de vértices. Circuito zero é qualquer soma de vértices cujo limite seja zero.

GAMA: Mas que é o limite de um vértice? Não existem politopos unidimensionais *minus*!

ÉPSILON: É claro que existem. Ou melhor, existe um: a seqüência vazia.

GAMA: Você está maluco!

ALFA: Talvez não esteja. Ele está introduzindo uma convenção. Não me importa quais os instrumentos conceituais que adote. Vejamos os resultados.

ÉPSILON: Não emprego convenções, nem meus conceitos são "instrumentos". A seqüência vazia é o politopo unidimensional *minus*. A existência dela é para mim certamente mais óbvia do que a existência de um cachorro.

PROFESSOR: Nada de propaganda platônica! Mostre como os seus "circuitos zero limitantes" traduzem "faces simplesmente ligadas".

ÉPSILON: Se vocês chegarem a entender que o limite de qualquer vértice é a seqüência vazia, o resto é nada. De acordo com minha definição anterior, o limite de um vértice é a seqüência vazia, mas o limite de dois vértices é zero, devido à álgebra *mod 2*. O limite de três vértices é ainda a seqüência vazia, e assim por diante. Assim, números pares de vértices são circuitos, números ímpares não são.

GAMA: Assim, a questão da sua exigência de que circuitos zero devam limitar equivale à exigência de que dois vértices quaisquer devam limitar uma cadeia I, ou, em linguagem comum, à exigência de que dois vértices quaisquer devam ser ligados por algum sistema de arestas. Isso, evidentemente, elimina faces circundantes. Essa é, de fato, a exigência que costumávamos chamar de "simples conectibilidade de faces tomadas separadamente".

ÉPSILON: Você dificilmente poderá negar que minha linguagem, que é a linguagem *natural* refletindo a *essência* de poliedros, mostra pela primeira vez a identidade essencial profundamente enraizada de critérios *ad hoc* isolados, antigamente desligados!

GAMA (*à parte*): O que dificilmente posso negar é que estou confuso! É um tanto estranho que para chegar a essa "simplicidade natural" tenhamos que enveredar por tais complicações.

ALFA: Vamos ver se compreendi. Você afirma que todos os vértices têm o mesmo limite: a seqüência vazia?

ÉPSILON: Isso mesmo.

ALFA: Presumo que, para você, é axioma que "todos os vértices têm a seqüência vazia; assim como "todas as faces têm arestas" ou "todas as arestas têm vértices.

ÉPSILON: Isso mesmo.

ALFA: Mas esses axiomas talvez não possam ter o mesmo valor! O primeiro é uma convenção, os dois últimos são necessariamente verdadeiros!

PROFESSOR: O teorema foi traduzido. Quero ver a prova.

ÉPSILON: Daqui a pouco, professor. Permita-me ligeira reformulação do teorema para: "*Todos os poliedros nos quais circuitos e circuitos limitantes coincidam são eulerianos.*"

PROFESSOR: Prove isso.

ÉPSILON: Daqui a pouco, professor. Eu o enuncio de outro modo.[197]

BETA: Mas por quê? Você já traduziu todos os seus termos que eram um pouco obscuros em termos que são perfeitamente conhecidos!

ÉPSILON: Certo. Mas a tradução que tenho em mente é muito diferente. Traduzirei a série dos meus termos primitivos para outra série de termos primitivos, que são ainda mais básicos.

BETA: Sendo assim, alguns de seus termos perfeitamente conhecidos são ainda mais bem conhecidos que outros!

PROFESSOR: Beta, por favor, não importune tanto a Épsilon! Fixe sua atenção ao que ele está fazendo e não interprete o que ele está fazendo. Prossiga, Épsilon.

ÉPSILON: Se examinarmos mais de perto minha última formulação do teorema, veremos que se trata de teorema sobre o número de dimensões de certos espaços vetoriais determinados pela matriz de incidência.

BETA: O quê?

ÉPSILON: Veja nosso conceito de cadeia, digamos a cadeia 1. É isto:

$$x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + \ldots + x_E\theta_E ,$$

em que $\theta_1, \ldots, \theta_E$ são as arestas E, e $x_1, x_2, \ldots, x_E$ são zero ou 1.

É fácil de perceber que as cadeias I formam um espaço vetorial E-dimensional sobre o campo de classes residuais módulo 2. Em geral, as cadeias k formam espaços vetoriais N_k-dimensionais pelo campo de classes residuais *módulo 2* (em que N_k equivale ao número de polítopos k). Os circuitos constituem subespaços dos espaços da cadeia e os circuitos limitantes constituem ainda subespaços dos espaços circuitos.

Assim, meu teorema é, de fato, que "*Se os espaços circuitos e espaços circuito limitantes coincidirem, o número de dimensões do espaço da cadeia zero menos o número de dimensões do espaço da cadeia 1 mais o número de dimensões do espaço da cadeia 2 é igual a 2*". Esta é a essência do teorema de Euler.

---

197 "Você poderia enunciar de novo o problema? Você poderia enunciá-lo de modo diferente?" (Pólya [1945], nota de quarta de capa).

PROFESSOR: Gosto dessa reformulação que realmente me mostrou a natureza de seus instrumentos simples, tal como você prometeu. Você agora sem dúvida irá provar o teorema de Euler pelos métodos simples da álgebra vetorial. Vejamos sua prova.

2. *Outra Prova da Conjectura*

ÉPSILON: Decomponho meu teorema em duas partes. A primeira declara que os espaços circuitos e espaços circuitos limitantes coincidem se, e apenas se, os números de suas dimensões coincidirem. A segunda declara que, se os espaços circuitos e espaços circuitos limitantes têm a mesma dimensão, então o número de dimensões do espaço da cadeia 1, mais o número de dimensões do espaço da cadeia 2, é igual a 2.

PROFESSOR: A primeira parte é teorema trivialmente verdadeiro da álgebra vetorial. Prove a segunda parte.

ÉPSILON: Nada mais fácil. Preciso apenas voltar às definições dos conceitos em jogo.[198] Primeiramente, escrevamos por extenso nossas matrizes de incidência. Por exemplo, tomemos as matrizes de incidência do tetraedro *ABCD*, com arestas *AD*, *BD*, *CD*, *BC*, *AC*, *AB* e faces *BCD*, *ACD*, *ABD*, *ABC*. As matrizes são $\eta^{k}_{ij} = 1$ ou zero, conforme $P^{i}_{k} - 1$ pertencer ou não a P^{j}_{k}. Sendo assim, nossas matrizes são:

η^0	*A*	*B*	*C*	*D*
a seqüência vazia	1	1	1	1

η^1	*AD*	*BD*	*CD*	*BC*	*AC*	*AB*
A	1	0	0	0	1	1
B	0	1	0	1	0	1
C	0	0	1	1	1	0
D	1	1	1	0	0	0

---

[198] "Substituir mentalmente as definições em lugar das coisas definidas" (Pascal [1659]). "Voltar às definições" (Pólya [1945], quarta de capa e p. 84).

η^2	BCD	ACD	ABD	ABC
AD	0	1	1	0
BD	1	0	1	0
CD	1	1	0	0
BC	1	0	0	1
AC	0	1	0	1
AB	0	0	1	1

η^3	$ABCD$
BCD	1
ACD	1
ABD	1
ABC	1

Ora, graças a essas matrizes, os espaços de circuito e os espaços de circuito limitados podem ser facilmente caracterizados. Já vimos que as cadeias k são realmente os vetores

$$\sum_{i=1}^{N_k} x_i P_i^k.$$

Definimos agora o limite de um polítopo P_j^k como

$$\sum_{i=1}^{N_{k-1}} \eta_{ij}^k P_i^{k-1}.$$

(Essa, como todas as fórmulas que seguem, é apenas um reenunciado de nossa antiga definição em notação simbólica.)

O limite de uma cadeia k $\quad \Sigma x_j P_j^k \quad$ é $\quad \sum_i \sum_j x_j \eta_{ij}^k P_i^{k-1}.$

Ora, uma cadeia k $\Sigma x_j P_i^k$ é um circuito-k se, e apenas **se,**

(1) $\Sigma \eta_{ij}^k x_j = 0$ **para cada** i.

Uma cadeia k desse tipo é um circuito k limitante se, e apenas se, for o limite de alguma cadeia $\Sigma \gamma_m P_m^{k+1}$, isto é, se, e apenas se, existirem coeficientes $\gamma_m (m = 1, \ldots, N_{k+1})$ **tais que**

(2) $X_j = \Sigma \gamma_m \eta_{jm}^{k+1}$.

É óbvio então que o espaço circuito e o espaço circuito limitante são idênticos se, e apenas se, o número de suas dimensões forem idênticos, isto é, se e apenas se, **a** ordem do número de soluções independentes das equações lineares homogêneas N_{k-1} (1) igualar o número de soluções independentes do sistema de equações lineares não-homogêneas (2). Ora, o primeiro número é, de acordo com teoremas bem conhecidos da álgebra linear, $N_k - \rho_k$ em que ρ_k é a ordem de $||\eta_{ij}^k||$; o segundo número é $\rho_k + 1$.

Assim, tenho apenas de provar que se $N_k - \rho_k = \rho_k + 1$, então $V - A + F = 2$.

LAMBDA: Ou, "Se $N_k = \rho_k + \rho_{k+1}$, então $N_0 - N_1 + N_2 = 2$". N_k são dimensões de certos espaços vetoriais, ρ_k as ordens de certas matrizes. Trata-se não mais de um teorema sobre poliedros, mas sobre certa seqüência de espaços vetoriais multidimensionais.

ÉPSILON: Vejo que você acaba de acordar. Enquanto você dormia, analisei nossos conceitos de poliedros e mostrei que eles são realmente conceitos algébrico-vetoriais. Traduzi o círculo de idéias do fenômeno euleriano em álgebra vetorial, exibindo assim a sua essência. Agora estou certamente provando um teorema em álgebra vetorial, que é uma teoria clara e distinta com termos perfeitamente conhecidos, axiomas nítidos e indubitáveis, e com provas nítidas e inequívocas. Por exemplo, veja a nova prova trivial de nosso antigo e discutidíssimo teorema: Se $N_k = \varrho_k + \varrho_{k+1}$, então $N_0 - N_1 + N_2 = \varrho_0 = \varrho 1 - \varrho 1 - \varrho 2 + \varrho 3 = \varrho_0 + \varrho 3 = 1 + 1 = 2$. Quem ousaria duvidar da certeza desse teorema agora? Assim, provei o controvertido teorema de Euler com certeza indubitável.[199]

ALFA: Mas olhe aqui, Épsilon, se tivéssemos aceito uma convenção rival de que os vértices não têm limite, a matriz η°, por exemplo, no caso do tetraedro teria sido

η^0	A	B	C	D
	0	0	0	0

a ordem ϱ_0 teria sido zero, e conseqüentemente $V - A + F = \varrho^{\circ} + \varrho_3 = 1$. Você não acha que a sua "prova" confia demais numa convenção? Você não terá escolhido sua convenção apenas para salvar o teorema?

ÉPSILON: Meu axioma referente a p_0 não era uma "convenção". $\varrho_0 = 1$ tem em minha linguagem o mesmíssimo significado real que cada par de vértices limita, isto é, a rede de arestas está ligada (as faces circundantes estão portanto excluídas). A expressão "convenção" é totalmente enganadora. Para poliedros com faces simplesmente ligadas, $\varrho_0 = 1$ é verdadeiro, $\varrho_0 = 0$ é falso.

ALFA: Ah! Você parece dizer que tanto $\varrho_0 = 1$ como $\varrho_0 = 0$ caracterizam alguma estrutura em espaços vetoriais. A diferença é que $\varrho_0 = 1$ tem um modelo real em poliedros com faces simplesmente ligadas, enquanto os demais não têm.

3. *Algumas Dúvidas sobre a Finalidade da Prova. Processo de Tradução e Enfoque Essencialista "Versus" Enfoque Nominalista das Definições.*

PROFESSOR: De qualquer forma, obtivemos a nova prova. Mas será final?

ALFA: Não é. Tome esse poliedro (fig. 29). Ele tem duas faces circundantes, na frente e atrás, e pode ser enchido como um tubo. E tem 16 vértices, 24 arestas e 10 faces. Assim, $V - A + F = 16 - 24 + 10 = 2$. É euleriano, mas longe de ser simplesmente ligado.

---

[199] Esta prova é devida a Poincaré (veja-se seu [1899]).

BETA: Não acho que se trate de um caso do fenômeno Descartes-Euler. Trata-se de caso do fenômeno Lhulier; isto é, *para um poliedro com* k *túneis e* m *faces circundantes* $V - A + F = 2 - 2k + m$.[200] Para qualquer poliedro como esse, com duas vezes mais faces circundantes e túneis, $V - A + F = 2$, mas não significa que seja euleriano. E esse fenômeno lhuleriano explica de uma vez por que não podíamos obter facilmente uma condição necessária e suficiente — ou teorema-chave — para a conjectura Descartes-Euler, porque esses casos lhulerianos insinuavam-se entre os eulerianos.[201]

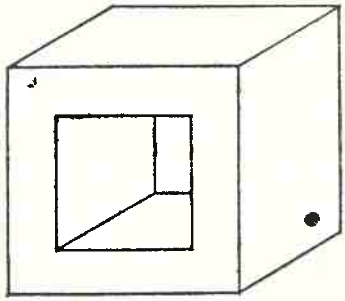


Fig. 29

PROFESSOR: Mas Épsilon nunca prometeu finalidade; apenas mais profundidade do que havíamos atingido anteriormente. Ele agora cumpriu sua promessa de dar uma prova que explica tanto o caráter euleriano de poliedros comuns como o caráter euleriano de poliedros estelados de uma só vez.

LAMBDA: É verdade. Ele traduziu a exigência de que as faces sejam simplesmente ligadas — isto é, que no processo de triangulação cada nova diagonal crie nova face — de tal modo que a idéia de triangulação desapareceu completamente. Nesta nova tradução, uma face é simplesmente ligada se todos os circuitos vértices limitam-se nela — e essa exigência vale para poliedros estelados eulerianos! E enquanto temos dificuldades em aplicar o conceito intuitivo de Jordan de simples conectibili-

200 Veja-se Lhulier [1812-13*a*]. A relação foi redescoberta cerca de doze vezes entre 1812 e 1890.

201 Veja-se acima, p. 89.

dade a poliedros estelados, na tradução de Poincaré essas dificuldades desaparecem. Poliedros estelados, do mesmo modo que os poliedros comuns, são séries de vértices, arestas e faces mais uma matriz de incidência; não nos interessa o problema da concretização do poliedro no espaço que venha a ser nosso material, tridimensional, rusticamente euclideano. O pequeno dodecaedro estelado, por exemplo, não é euleriano: não é muito difícil traçar i-circuitos nele que não limitem.

BETA: Acho isso interessante também de outro aspecto. A prova de Épsilon é ao mesmo tempo mais rigorosa e mais abrangente. Haverá uma ligação necessária entre essas duas coisas?

ÉPSILON: Não sei. Mas enquanto nosso professor exige apenas *mais profundidade* em minha prova, eu estou exigindo *absoluta certeza.*

KAPA: Seu teorema é suscetível de ser refutado por alguma extensão imaginativa de conceito como qualquer conjectura anterior.

ÉPSILON: Você está enganado, Kapa, como explicarei.[202]

ALFA: Primeiro, permita-me suscitar uma segunda questão sobre sua prova, ou antes, sobre a finalidade e certeza que você alega quanto a ela. Será, de fato, o poliedro um modelo de sua estrutura algébrico-vetorial? Você está certo de que sua tradução de "poliedro" em teoria vetorial seja uma tradução verdadeira?

ÉPSILON: Já disse que é verdadeira. Se, por vezes, espanta você, isso não é razão para duvidar dela. "Estou seguindo a grande escola de matemáticos que, graças a uma série de definições impressionantes, salvaram a matemática dos céticos, e deram rígida demonstração de suas proposições."[203]

PROFESSOR: Acho, realmente, que esse método de tradução é o núcleo da questão da certeza e finalidade da prova

---

202 Vejam-se pp. 163-5.

203 Essa citação é tirada de Ramsey [1931], p. 56. Só uma palavra foi mudada: ele diz "lógicos matemáticos" em vez de "matemáticos", mas isso apenas porque ele não compreendia que o processo por ele exposto não era característica recente da lógica matemática, mas aspecto da matemática "rigorosa" de Cauchy em diante, e que as célebres definições de limite, continuidade etc. propostas por Cauchy e aprimoradas por Weierstrass se enquadram todas sob essa rubrica. Observo que Russel também cita essa expressão extraindo-a de Ramsey (Russell [1959], p. 125.)

de Épsilon. Acho que devemos chamá-la de *processo tradutório*. Mas vejamos, há ainda outras dúvidas?

GAMA: Tenho uma. Digamos que eu admita que sua dedução é infalível. Você está certo de que não pode deduzir de suas premissas a negação de seu teorema com a mesma infalibilidade?

ÉPSILON: Todas as minhas premissas são verdadeiras. Como poderão elas talvez ser inconsistentes?

PROFESSOR: Aprecio suas dúvidas. Mas sempre prefiro *um* contra-exemplo a certo número de dúvidas.

GAMA: Acaso o meu cilindro não refuta esse novo teorema?

ÉPSILON: É claro que não. No cilindro, a série vazia não limita, e por conseguinte, $\varrho_0 \neq 1$.

GAMA: Percebo. Você tem razão. Esse argumento, posto em seus termos perfeitamente conhecidos, claros e distintos, acabou por me convencer.

ÉPISILON: Entendo o seu sarcasmo! Antes você já havia posto em dúvida minhas definições. Disse então que elas, de fato, são axiomas indubitavelmente verdadeiros, enunciando a essência dos conceitos em questão, graças à infalibilidade da intuição clara e distinta. Pensei muito nisso desde então, e acho que abandonei minhas opiniões aristotélicas quanto a definições. Quando defino um termo vago, de fato o substituo por um novo, e o antigo serve apenas como *abreviação* do meu novo termo.

ALFA: Vamos esclarecer isso. Que é que você entende por "definição": uma substituição que é uma operação da esquerda para a direita ou uma abreviação que é uma operação da direita para a esquerda?

ÉPSILON: Definição é fórmula. Esqueço quanto ao significado antigo. Crio livremente o significado de meus termos, enquanto raspo antigos termos vagos. Também crio meus problemas livremente, enquanto trato dos antigos.

ALFA: Não adianta ser extremista. Mas vá em frente.

ÉPSILON: Com essa alteração em meu programa, com certeza ganho uma coisa: uma de suas dúvidas fica eliminada. Se as definições são fórmulas, então não podem ser falsas.

ALFA: Mas você perde algo que é muito mais importante. Você tem que restringir seu programa eucllideano a teorias que tenham conceitos perfeitamente conhecidos, e quando você quiser incluir teorias com conceitos vagos no escopo desse programa, você não pode fazer isso mediante sua técnica tradutória: como você disse, você não traduz; pelo contrário, cria novo significado. Mas mesmo que você tentasse *traduzir* o antigo significado, alguns aspectos essenciais do conceito vago original podem perder-se nessa tradução. O novo conceito claro pode não servir para a solução do problema para o qual o antigo conceito servia.[204] Se você considera sua tradução como infalível, ou se você conscientemente bane o antigo significado, ambos esses extremos produzirão o mesmo resultado: você pode jogar o problema original no limbo da história do pensamento — o que, de fato, você não deseja fazer.[205] Assim, se você se acalmar, terá de admitir que definição deve ter um toque de essencialismo modificado: deve manter alguns aspectos relevantes do antigo significado, deve transferir elementos relevantes de significado da esquerda para a direita.[206]

BETA: Mas, mesmo que Épsilon aceite esse essencialismo modificado em definições, a renúncia ao enfoque essencialista será ainda um imenso recuo de seu programa eucli-

---

204 Exemplo clássico de tradução que não satisfez o critério de adequação foi a definição dada no século XIX de área de uma superfície, que foi banida pelo contra-exemplo de Schwartz.

O problema é que o critério de adequação pode mudar com o surgimento de novos problemas que podem ocasionar alteração no instrumental conceitual. Paradigma dessa mudança é o caso do conceito de integral. É um vexame da atual instrução matemática que os estudantes possam citar exatamente as diferentes definições de Cauchy, Riemann, Lebesgue e outros, sem saber para que problemas a resolver elas foram inventadas, ou durante que soluções de problemas elas foram descobertas. À medida que o critério de adequação muda, as definições em geral se desenvolvem de modo que a definição satisfatória a todos os critérios se torna dominante. Isso não podia acontecer com a definição de integral, devido à inconsistência dos critérios — isto porque o conceito tinha que ser dividido. Definições geradas pela prova desempenham papel decisivo mesmo na elaboração de definições tradutórias no programa euclideano.

205 Esse processo é muito característico do formalismo do século XX.

206 Essa questão trivial é muito curiosamente omitida por nominalistas como Pascal e Popper. Pascal escreve *(loc. cit.)*: "... os geômetras e todos os que operam metodicamente, impõem nomes às coisas apenas para resumir o discurso". E Poper escreve ([1945], vol. 2, p. 14): "Na ciência moderna, só ocorrem definições nominalistas, isto é, símbolos abreviados ou rótulos são introduzidos para tornar curta uma longa história." É curioso como os nominalistas e essencialistas possam, cada um por seu turno, cegar-se para o núcleo racional do argumento uns dos outros.

diano original. Épsilon diz agora que há teorias euclideanas com termos perfeitamente conhecidos e inferências infalíveis — como aritmética, geometria, lógica, teoria dos conjuntos. Suponho que ele agora faça o programa euclideano consistir de traduzir teorias não euclideanas por termos vagos e obscuros e inferências inexatas — como cálculo e teoria da probabilidade — nessas teorias já euclideanas, assim abrindo novas avenidas de desenvolvimento tanto das teorias subjacentes como das teorias originalmente não euclideanas.

ÉPSILON: Chamarei tal teoria "já euclideana" ou teoria estabelecida de *teoria dominante.*

GAMA: E qual o campo de aplicabilidade desse programa abalado? Certamente não abrangerá a física. Você jamais traduzirá mecânica ondulatória em geometria. Épsilon queria, "graças a uma série de definições impressionantes, salvar a matemática dos céticos",[207] mas o que salvou foi, no máximo, algumas migalhas.

BETA: Tenho um problema sobre aquelas definições tradutórias. Elas dão a impressão de ser meras abreviações na teoria dominante e assim são verdadeiras "por definição". Mas parecem ser falseáveis se as considerarmos com referência ao reino não-euclideano.[208]

---

207 Veja-se antes, p. 159.

208 A importância metodológica dessa diferença ainda não foi adequadamente revelada. Pascal, o grande defensor das definições abreviadoras e grande adversário da teoria essencialista da definição de Aristóteles, não se deu conta de que abandonar o essencialismo significa de fato abandonar o programa euclideano de larga escala. No programa euclideano, tem-se que definir todos os termos que sejam "apenas um pouco obscuros". Se isso consistir apenas de substituição de um termo vago por outro rigoroso, arbitrariamente escolhido, de fato abandona-se o campo original de pesquisa e volta-se para outro. Mas Pascal com certeza não pretendia isso. Cauchy e Weierstrass eram essencialistas quando executando a aritmetização da matemática; Russell era essencialista quando efetuando a logicização da matemática. Todos esses homens pensavam em suas definições de continuidade, números reais, números inteiros, etc. na medida em que captavam a essência do conceito em questão. Quando enunciando a forma lógica das proposições em linguagem comum, isto é, traduzindo a linguagem comum em linguagem artificial, Russell pensava — pelo menos em seu "período de lua-de-mel" ([1959], p. 73) — que era guiado por uma intuição infalível. Popper, em sua justa arremetida furiosa contra definições essencialistas não presta bastante atenção ao importante problema de definições tradutórias e suponho que isto tem a ver com o que me parece seu tratamento insatisfatório da forma lógica em seu [1947], p. 273. De acordo com ele (e, no caso, ele

ÉPSILON: Certo.

BETA: Seria interessante ver como se falseiam essas definições.

TETA: Eu gostaria, agora, de voltar à discussão da questão da infalibilidade da dedução de Épsilon. Épsilon, você ainda alega certeza para o seu teorema?

ÉPSILON: Claro que sim.

TETA: E não imagina um contra-exemplo para ele?

ÉPSILON: Como eu disse a Kapa, minha prova é infalível. Não há contra-exemplos para ela.

TETA: Quer dizer que você eliminaria contra-exemplos como monstros?

ÉPSILON: Nem mesmo um monstro a refutaria.

TETA: Quer dizer que, seja o que for que eu substitua em seus termos perfeitamente conhecidos, o teorema permanece verdadeiro?

ÉPSILON: Você pode substituir qualquer coisa em lugar dos termos perfeitamente conhecidos que seja *específico* à álgebra vetorial.

TETA: Não posso substituir seus termos primitivos não-específicos, como "todos", "e", "2", etc.?

ÉPSILON: Não. Mas você pode substituir qualquer coisa em vez de meus termos *específicos* perfeitamente conhecidos como "vértice", "aresta", "face", etc. Mas acho que já esclareci isso quanto ao que entendo por refutação.

TETA: Certo. Mas então ou você pode ser refutado ou você de fato não fez o que pensou.

ÉPSILON: Não compreendo sua obscura indireta.

TETA: Entenderá, se quiser. Sua caracterização da noção de contra-exemplo parece razoável. Mas se contra-exemplo for isso, então o significado de seus "termos perfeitamente bem conhecidos" é imaterial. E isso, se você tiver razão, é precisamente o mérito de sua prova. Uma prova, se irrefutável, não depende — pelo próprio conceito de prova irrefutável — do significado de "termos perfeitamente bem conhecidos" específicos. Assim o peso de sua prova — se você estiver certo — está carregado do significado de termos não-específicos subjacentes — no caso, aritmé-

segue Tarski) a definição de inferência válida repousa apenas no rol de signos formativos. Mas a validade de uma inferência intuitiva depende também da tradução da inferência da linguagem comum (aritmética, geométrica, etc.) em linguagem lógica: depende da tradução que adotamos.

tica, teoria dos conjuntos, lógica — mas não, no mínimo, do significado de seus termos específicos.

Chamarei essas provas de *provas formais*, já que não dependem absolutamente do significado de termos específicos. O *grau de formalidade* certamente depende de termos não-específicos. O caráter perfeitamente conhecido desses termos — vou chamá-los de termos formativos — é de fato muito importante. Apreendendo seu significado, nós enunciamos o que pode ser aceito como contra-exemplo e o que não pode. Assim, regulamos o fluxo de contra-exemplos. Se não houver contra-exemplos ao teorema, chamá-lo-emos de *tautologia*: em nosso caso, uma tautologia teórica *arithmetico-set*.

ALFA: Parece termos uma gama de tautologias de acordo com nossa escolha de constantes semilógicas. Mas vejo no caso uma multidão de problemas. Primeiro: como sabermos que uma tautologia é uma tautologia?

KAPA: *Você nunca saberá* sem qualquer sombra de dúvida. Mas se tiver sérias dúvidas sobre uma teoria dominante, então elimine-a, e a substitua por outra teoria dominante.[209]

---

209 Tais mudanças na teoria dominante implicam a reorganização de todo o nosso conhecimento. Na antiguidade, o aspecto paradoxal e, de fato, a aparente inconsistência da aritmética induziu os gregos a abandonar a aritmética como teoria dominante e substituí-la pela geometria. Sua teoria das proporções servia ao propósito de traduzir aritmética em geometria. Eles estavam convencidos de que toda a astronomia e toda a física podiam ser traduzidas em geometria.

A grande inovação de Descartes foi substituir a geometria pela álgebra; talvez devido a que ele pensasse que na teoria dominante a própria análise levasse à verdade.

A "revolução do rigor" na matemática moderna consistiu de fato do restabelecimento da aritmética como teoria dominante pela via do imenso programa de aritmetização da matemática que foi de Cauchy a Weierstrass. A teoria dos números reais — percebida como artificial por pouquíssimos matemáticos do ofício — era o passo crucial; semelhante à igualmente "artificial" teoria das proporções dos gregos.

Russell, por sua vez, fez da lógica a teoria dominante de todas as matemáticas. A interpretação da história da matemática como busca da teoria dominante pode projetar nova luz na história desse tema, e ser possível mostrar que a "descoberta" goedeliana de que a teoria natural dominante para a matemática seja a aritmética, leve diretamente ao presente estágio da pesquisa, e abra novo panorama tanto em aritmética como em matemática.

Outro exemplo de notável tradução eculideana foi a moderna introdução da teoria da probabilidade na teoria da medida.

As teorias dominantes e a mudança de teorias dominantes determinam também muito do desenvolvimento da ciência em geral. A ela-

* *Nota do Organizador.* Esta seção do diálogo termina nesse ponto na tese de Lakatos. Teríamos tentado persuadir Lakatos a continuar o diálogo do modo seguinte:

TETA: Mas do que acabamos de dizer parece seguir-se que podemos elaborar nossas provas em sistemas em que a teoria dominante seja lógica, e depois, logo que não tenhamos graves dúvidas sobre nossa lógica, estaremos em condições de garantir a infalibilidade de nossas deduções e pôr toda a dúvida não na prova real, mas nos lemas, nos antecedentes do teorema.

ÉPSILON: Fico satisfeito de que pelo menos Teta finalmente se tenha modernizado. Minha prova pode de fato ser lançada num sistema do qual a teoria dominante seja lógica. Os enunciados condicionais com todos os lemas incorporados como antecedentes podem ser provados nesse sistema, e sabemos que (relativo a dado acervo de termos formativos "lógicos") não há quaisquer contra-exemplos a qualquer enunciado que possa ser provado desse modo. Seja como for que os termos descritivos sejam reinterpretados, esse enunciado condicional permanecerá verdadeiro.

LAMBDA: Como "sabemos"?

ÉPSILON: Não sabemos ao certo — trata-se de um teorema não-formal sobre lógica. Mas, além disso, sabemos que, diante de uma prova em tal sistema, podemos conferir de modo totalmente mecânico empregando um processo que certamente produzirá uma resposta em número finito de etapas, trate-se ou não de uma prova. Nesses sistemas, então, sua "análise de prova" reduz-se a uma trivialidade.

ALFA: Mas você há de concordar, Épsilon, em que a "análise de prova" mantém sua importância em matemática não formal; e que provas formais são sempre traduções de provas não-formais e que os problemas suscitados quanto à tradução são muito reais.

LAMBDA: Mas, de qualquer forma, Épsilon, como sabemos que a conferência da prova é sempre acurada?

ÉPSILON: Realmente, Lambda, sua insaciável sede de certeza está se tornando cansativa! Quantas vezes terei de dizer-lhe que nada podemos saber com certeza? Mas o seu anseio por certeza faz com que você levante problemas incômodos — e está cegando você para os problemas interessantes.

---

boração e posterior fracasso da mecânica racional como teoria dominante da física desempenhou papel central na história moderna da ciência. A luta da biologia contra ser "traduzida" em química, a luta da psicologia contra ser traduzida em fisiologia são aspectos curiosos da história da ciência recente. Os processos tradutórios são vastos reservatórios de problemas, tendências históricas que representam imensos esquemas de pensamento pelo menos tão importantes quando a tríade hegeliana. Essas traduções em geral aceleram o desenvolvimento da teoria dominante e da teoria absorvida, mas posteriormente a tradução se converterá em obstáculo a um maior desenvolvimento, à medida que pontos fracos da tradução venham à tona.

APÊNDICE 1

OUTRO ESTUDO DE CASO NO MÉTODO DE PROVAS E REFUTAÇÕES

1. *Defesa de Cauchy do "Princípio de Continuidade"*

O método de provas e refutações é um esquema heurístico muito geral de descoberta matemática. Contudo, parece que foi descoberto apenas por volta de 1840, e ainda hoje parece paradoxal a muitas pessoas. E, com certeza, não é adequadamente reconhecido em parte alguma. Neste apêndice, me empenharei em resumir a história da análise da prova em análise matemática e retraçar as fontes de resistência à compreensão e reconhecimento dela. Primeiramente, repito o esboço do método de provas e refutações, método que já ilustrei mediante o estudo de caso da prova de Cauchy da conjectura Descartes--Euler.

Há um padrão simples de descoberta matemática — ou do progresso das teorias matemáticas não-formais. Consiste das fases seguintes: [210]

(*1*) *Conjectura primitiva.*
(2) *Prova* (*rústico experimento mental ou argumento, decompondo a conjectura primitiva em subconjecturas ou lemas*).

---

210 Como acentuei, o padrão histórico real pode desviar-se ligeiramente desse padrão heurístico. O quarto estágio pode às vezes preceder o terceiro (inclusive na ordem heurística) — e uma análise habilidosa da prova pode sugerir o contra-exemplo.

(3) *Surgem contra-exemplos "globais" (contra-exemplos à conjectura primitiva).*

(4) *Prova reexaminada: o "lema condenado" para o qual o contra-exemplo global é um contra-exemplo "local" é localizado. Esse lema condenado pode ter permanecido anteriormente "oculto" ou pode ter sido mal identificado. Agora ele é tornado explícito, e elevado na conjectura primitiva à categoria de condição. O teorema — a conjectura aperfeiçoada — suplanta a conjectura primitiva com o novo conceito gerado pela prova como seu novo aspecto superior.*[211]

Essas quatro etapas constituem o núcleo essencial da análise da prova. Mas existem outros estágios padrões que freqüentemente ocorrem:

(5) *São examinados provas e outros teoremas para verificar se o lema recentemente achado ou o novo conceito gerado pela prova ocorre neles: esse conceito pode ser encontrado jazendo como encruzilhada de diferentes provas, daí surgindo como de importância fundamental.*

(6) *As conseqüências até então aceitas da conjectura original e agora refutada são conferidas.*

(7) *Os contra-exemplos convertem-se em novos exemplos — abrem-se novos campos de investigação.*

Gostaria, agora, de considerar outro estudo de caso. Aqui, a *conjectura primitiva* é de que o limite de qualquer

---

211 *Nota do Organizador.* Em outras palavras, esse método consiste (em parte) de dar uma série de enunciados $P_1, \ldots, P_n$ tal que P_1 &... & P_n se admite verdadeira para algum domínio de objetos interessantes e parece implicar a conjectura primitiva C. Esse pode vir a não ser o caso — em outros termos, achamos casos em que C é falsa ("contra-exemplos globais"), mas em que P_1 a P_n prevalecem. Isso leva à articulação de um novo lema P_{n+1} que é também refutado pelo contra-exemplo ("contra-exemplo local"). A prova original é assim substituída por uma nova que pode ser sumariada pelo enunciado condicional

$$P_1 \,\&\, \ldots \,\&\, P_n \,\&\, P_{n+1} \longrightarrow C$$

A verdade (lógica) desse enunciado condicional não mais é impugnada pelo contra-exemplo (visto que o antecedente é agora falso nesse caso, e por conseguinte verdadeiro o enunciado condicional).

série convergente de funções contínuas é em si contínua. Foi Cauchy quem deu a primeira prova dessa conjectura, cuja verdade foi admitida sem discussão, presumindo-se, portanto, não haver necessidade de qualquer outra prova por todo o século XVIII. Foi considerada como caso especial do "axioma" segundo o qual "o que é verdadeiro até o limite é verdadeiro no limite".[212] Achamos a conjectura e sua prova no célebre trabalho de Cauchy [1821], p. 131.

Dado que essa "conjectura" tem sido até agora considerada como trivialmente verdadeira, por que teve Cauchy necessidade de prová-la? Alguém terá criticado a conjectura?

Como veremos, a situação não era assim tão simples. Graças à observação de fatos posteriores, podemos ver agora que contra-exemplos à conjectura de Cauchy foram dados pela obra de Fourier. *Mémoire sur la Propagation de la Chaleur*,[213] de Fourier, de fato contém um exemplo do que, de acordo com as presentes noções, é uma série convergente de funções contínuas que tende a uma função cauchyana descontínua, a saber:

$$\cos x - {}^{1}/_{3} \cos 3x + {}^{1}/_{5} \cos 5x - \ldots \quad (1)$$

A atitude de Fourier para com essa série é, porém, muito clara (e, evidentemente, diferente da atitude moderna):

(*a*) Ele declara que ela é convergente em toda parte.

(*b*) Ele declara que sua função limite é composta de linhas retas distintas, cada qual paralela ao eixo χ, e igual à circunferência. Essas paralelas estão situadas alternadamente acima e abaixo do eixo, com uma distância de $\pi/4$ entre duas quaisquer, e são ligadas por perpendiculares que também fazem parte da linha.[214]

---

[212] Whewell [1858], I, p. 152. Whewell, em seu [1858], pelo menos dez anos atrasado. O princípio decorre do princípio de continuidade de Leibniz ([1687], p. 744). Boyer em seu [1939], p. 256, cita um novo enunciado característico do princípio de Lhulier [1786], p. 167.

[213] Essa *Mémoire* recebeu o *grand prix de mathématiques* de 1812, tendo sido mencionada por Laplace, Legendre e Lagrange. Foi publicada só depois do clássico *Théorie de la Chaleur* de Fourier, que apareceu em 1822, um ano depois do manual de Cauchy, mas o conteúdo da *Mémoire* era então já bem conhecido.

[214] Fourier, *op. cit.*, seções 177 e 178.

As palavras de Fourier sobre as perpendiculares no gráfico são eloqüentes. Ele considerava essas funções limite como (em certo sentido) contínuas. De fato, Fourier certamente considerava qualquer coisa como função contínua se seu gráfico pudesse ser traçado com um lápis que não se levantasse do papel. Assim é que Fourier não se teria considerado como elaborando contra-exemplos ao axioma da continuidade de Cauchy.[215] Foi apenas à luz da subseqüente caracterização da continuidade de Cauchy que as funções limite em algumas séries de Fourier vieram a ser consideradas descontínuas, e assim que as próprias séries vieram a ser vistas como contra-exemplos à conjectura de Cauchy. Dada essa nova e contra-intuitiva definição de continuidade, os inocentes desenhos contínuos de Fourier pareceram converter-se em contra-exemplos malditos contra o antigo princípio há muito estabelecido de continuidade.

A definição de Cauchy certamente traduzia o inocente conceito de continuidade em linguagem aritmética

---

215 Depois de ter escrito isso, descobri que o termo "descontínuo" aparece aproximadamente no sentido cauchyano em alguns manuscritos até então inéditos de Poisson (1807) e de Fourier (1809), que estavam sendo estudados pelo Dr. J. Ravetz, que gentilmente me permitiu examinar as cópias fotostáticas. Isso, sem dúvida, complicava minha questão, embora não a refutasse. Obviamente Fourier tinha duas noções diferentes de continuidade em mente em épocas diferentes, e de fato essas duas noções diferentes surgem muito naturalmente de dois domínios distintos. Se interpretamos uma função como

$$\text{sen } x - \frac{1}{2} \text{ sen } 2x + \frac{1}{3} \text{ sen } 3x - \ldots$$

como a posição inicial de uma série, ela certamente será considerada contínua e traçar as linhas perpendiculares — como devia ser exigido pela definição de Cauchy — parecerá antinatural. Mas se interpretarmos essa função como, digamos, representando temperatura ao longo de um fio, a função parecerá obviamente descontínua. Essas considerações sugerem duas conjecturas. Primeiramente, a célebre definição de continuidade de Cauchy, que vai contra a "interpretação serial" de uma função, pode ter sido estimulada pela investigação dos fenômenos calóricos de Fourier. Em segundo lugar, a insistência de Fourier nas perpendiculares nos gráficos (de acordo com a "interpretação calórica") dessas funções descontínuas pode ter advindo de um esforço para não entrar em conflito com o princípio de Leibniz. *Nota do Editor:* Para mais dados sobre a matemática de Fourier, veja-se I. Grattan-Guinness (em colaboração com J. R. Ravetz), *Joseph Fourier, 1768-1830* (M.I.T. Press, 1972).

de tal modo que o "senso comum" só podia ficar chocado.[216] Que espécie de continuidade é essa que implica que se girarmos o gráfico de uma função contínua um pouquinho ela se transforma em descontinuidade?[217]

Assim, se substituirmos o conceito intuitivo de continuidade pelo conceito de Cauchy então (e apenas então!) o axioma da continuidade parece ser contraditado pelos resultados de Fourier. Esse parece um argumento forte, talvez decisivo contra as novas definições de Cauchy (não apenas de continuidade, mas também outros conceitos como o de limite). Não admira pois que Cauchy quisesse mostrar que podia de fato provar o axioma da continuidade em sua nova interpretação dele, com isso dando a prova de que sua definição satisfaz essa exigência mais severa de rigor. Ele teve êxito em dar a prova — e pensava ter dado golpe mortal em Fourier, aquele diletante talentoso, mas vago e pouco rigoroso, que sem querer desafiou sua definição.

É claro que se a prova de Cauchy fosse correta, então os exemplos de Fourier, a despeito das aparências, não podiam ser verdadeiros *contra*-exemplos. Um modo de mostrar que eles não eram verdadeiros contra-exemplos seria mostrar que as séries aparentemente convergindo a funções que eram descontínuas no sentido cauchyano não eram absolutamente convergentes!

E isso era uma suposição plausível. O próprio Fourier tinha dúvidas quanto à convergência de suas séries nesses casos críticos. Ele observou que a convergência era lenta: "A convergência não é suficientemente rápida para produzir uma fácil aproximação, mas é suficiente para a verdade da equação."[218]

---

[216] Isto é, senso comum de série ou senso comum de gráfico.

[217] *Nota do Organizador.* O que é violado no caso talvez não seja nossa noção intuitiva de continuidade, mas antes nossa crença de que qualquer gráfico representando uma função representaria ainda alguma função quando ligeiramente girado. A curva de Fourier é contínua de um ponto de vista intuitivo, e essa intuição pode ainda ser explicada pelo Σ, δ definição de continuidade (que em geral se atribui a Cauchy); porque a curva de Fourier, completa com perpendiculares, é parametricamente representável por duas funções contínuas.

[218] *Op. cit.*, seção 177. Essa observação, evidentemente, difere muito da descoberta de que a convergência é nesses lugares infinitamente lenta, o que foi feito apenas após 40 anos de experiência no cálculo das séries fourierianas. E essa descoberta talvez não pudesse

Graças à observação de fatos posteriores, podemos ver que a esperança de Cauchy de que nesses casos críticos as séries de Fourier não convergem (e assim não representam a função) era também justificada de certo modo pelo fato seguinte. Onde a função limite é descontínua, a série tende a $[\frac{1}{2} f(\chi + 0) + f(x - 0)]$, e não simplesmente a $f(x)$. Ela tende a $f(x)$ apenas se $f(x) = \frac{1}{2}[f(x + 0) + f(x - 0)]$. Mas isso não era sabido antes de 1829, e de fato a opinião geral estava mais com Fourier do que com Cauchy. As séries de Fourier pareciam funcionar e quando Abel, em 1826, cinco anos depois da publicação da prova de Cauchy, mencionou numa nota de pé de página em seu [1826 *b*],[219] que há "exceções" ao teorema de Cauchy, isso constitui uma dupla vitória um tanto icômoda: as séries fourierianas foram aceitas, mas também a notável definição de continuidade de Cauchy e o teorema que ele havia provado utilizando-as.

Foi precisamente em vista dessa dupla vitória que agora parecia que deve haver *exceções* à versão específica do princípio de continuidade que estamos considerando, muito embora Cauchy o tivesse provado de modo impecável.

Cauchy deve ter chegado à mesma conclusão que Abel, pois no mesmo ano deu, sem desistir, evidentemente, de sua caracterização de continuidade, uma prova da convergência das séries de Fourier.[220] A situação, porém, deve lhe ter sido muito incômoda. O segundo volume do *Cours d'Analyse* jamais foi publicado. E, o que é ainda mais suspeito, ele não fez mais edições do primeiro volume, permitindo que seu discípulo Moigno publicasse notas de suas conferências[221] quando se tornou extremamente necessário um livro texto.

---

ser feita antes do aperfeiçoamento decisivo de Dirichlet da conjectura de Fourier, mostrando que apenas aquelas funções podem ser representadas pelas séries fourierianas cujo valor nas descontinuidades é $\frac{1}{2}[f(x + o) + f(x - o)]$.

219 Abel [1826*b*], p. 316.

220 Cauchy [1826]. A prova baseia-se numa suposição incorrigivelmente falsa (veja-se, p. e., Rieman, [1868]).

221 Moigno [1840-1].

Dado que os exemplos de Fourier eram agora interpretados como contra-exemplos, o embaraço era evidente: como podia um teorema provado ser falso, ou "sofrer exceções"? Já discutimos como se estava embaraçado na época com as "exceções" ao teorema de Euler, não obstante o fato de que fora provado.

2. *Prova de Seidel e Conceito de Convergência Uniforme Gerado pela Prova*

Todos sentiam que o caso Cauchy-Fourier não era apenas um enigma inofensivo, mas nódoa fatal no todo da nova matemática "rigorosa". Dirichlet em seus célebres escritos sobre a série fourieriana,[222] embora preocupado em mostrar exatamente como séries convergentes de funções contínuas representam funções descontínuas, e embora muito bem a par da versão de Cauchy do princípio de continuidade, não mencionou absolutamente a óbvia contradição.

Coube finalmente a Seidel solucionar o enigma ao apontar o lema condenado oculto na prova de Cauchy.[223] Mas isso só aconteceu em 1847. Por que levou tanto tempo? Para responder a essa questão teremos que considerar o famoso descobrimento de Seidel um pouco mais de perto.

Seja $\sum f_n(x)$ uma série convergente de funções contínuas e, para cada n definamos $S_n(x) = \sum_{m=0}^{n} f_m(x)$ e $r_n(x) = \sum_{m=n+1}^{\infty} f_n(x)$. Então, o cerne da prova de Cauchy é a inferência da premissa:

Dado qualquer $\varepsilon > 0$:

(1) Há δ tal que para qualquer b, se $|b| < \delta$, então $[S_n(x + b) - S_n(x)] < \varepsilon$ (existe tal δ devido à continuidade de $S_n(x)$);

(2) Existe um N, tal que $|r_n(x)| < \varepsilon$ para todo $n \geqslant N$ (existe tal N devido à convergência de $\sum f_n(x)$);

(3) Existe um N' tal que $|r_n(x + b)| < \varepsilon$ para todo

---

[222] Dirichlet [1829].

[223] Seidel [1847].

$n \geqslant N'$ (existe tal N' devido à convergência de $\sum f_n\,(x+b)$);
à conclusão de que

$$| f(x+b) - f(x) | = | S_n(x+b) + r_n(x+b) - S_n(x) - r_n(x) |$$
$$\leqslant | S_n(x+b) - S_n(x) | + | r_n(x) | + | r_n(x+b) |$$
$$< 3\,\varepsilon, \text{ para todo } b < \delta$$

Ora, os contra-exemplos globais dados pelas séries de funções contínuas que convergem para as funções descontínuas cauchyanas mostram que alguma coisa está errada nesse argumento (toscamente enunciado). Mas onde está o lema condenado?

Uma análise de prova um pouco mais cuidadosa (utilizando os mesmos símbolos que antes, mas tornando explícitas as dependências funcionais de algumas das quantidades) produz a seguinte inferência:

(1′) $| S_n\,(x+b) - S_n\,(x) | < \varepsilon$ se $b < \delta\,(\varepsilon,x,n)$
(2′) $| r_n\,(x) | < \varepsilon$ se $n > N\,(\varepsilon,x)$
(3′) $| r_n\,(x+b) | < \varepsilon$ se $n > N\,(\varepsilon, \text{se } x+b)$

Portanto,

$$| S_n\,(x+b) + r_n\,(x+b) - S_n\,(x) - r_n(x) | = | f\,(x+b) - f(x) | < 3\,\varepsilon$$

se $n > \max_2 N\,(\varepsilon,z)$ e $b < \delta\,(\varepsilon,x,n)$.

O lema oculto é que esse máximo, $\max_2 N(\varepsilon,z)$, deve existir para qualquer ε determinado. Isso é o que veio a ser chamado de exigência da *convergência uniforme*.

Houve talvez três obstáculos principais para esse descobrimento.

O *primeiro* foi o emprego indiscriminado por Cauchy de quantidades[224] "infinitamente pequenas". O *segundo* foi que mesmo que alguns matemáticos tivessem notado que a suposição da existência de um máximo de uma seqüência infinita de *Ns* esteja implicada nessa prova, podiam muito bem tê-lo feito sem segundas intenções. Esse problema só veio a ser tratado pela escola de Weierstrass. Mas o *terceiro* e principal obstáculo era a vigência da metodologia euclideana — esse espírito bom e mau da matemática de inícios do século XIX.

224 Isso impediu Cauchy de dar uma apreciação clara de sua antiga prova e mesmo de formular seu teorema de modo claro em seu [1853] (pp. 454-9).

Mas antes de discutir essa metodologia em geral, vejamos como Abel soluciona o problema levantado pelo teorema de Cauchy mediante contra-exemplos de Fourier. Mostrarei que ele o soluciona (ou o soluciona melhor) pelo primitivo método da "antiexceção".[225]

3. *Método Antiexceção de Abel*

Abel enuncia o problema, que entendo ser o problema básico de seu célebre trabalho sobre as séries binomiais,[226] somente numa nota de pé de página. Escreve ele: "Parece-me que há algumas exceções ao teorema de Cauchy", e imediatamente dá o exemplo da série

$$\text{Sen } \emptyset - {}^1/_2 \text{ sen } 2\,\emptyset + {}^1/_3 \text{ sen } 3\,\emptyset - \ldots$$ [227]

Abel acrescenta que, "como é sabido, há muitos mais exemplos como esse". Sua resposta a esses contra-exemplos é começar supondo: "Qual é o domínio seguro do teorema de Cauchy?"

Sua resposta a essa questão é esta: o domínio de validade dos teoremas de análise em geral, e o de teoremas sobre a continuidade da função limite em particular, restringe-se às progressões geométricas. Todas as exceções conhecidas a esse princípio básico de continuidade eram progressões trigonométricas, e assim ele propôs recuar a análise para dentro de limites seguros das progressões geométricas, deixando assim para as caras séries trigonométricas de Fourier uma selva inextricável em que as exceções são a norma e os êxitos são milagres.

Em carta a Hansteen, de 26 de março de 1826, Abel caracterizava a "miserável indução euleriana" como método que leva a generalizações falsas e infundadas, e indaga qual a razão para tais processos que levaram de fato a tão *poucas* calamidades. Sua resposta é:

> A meu ver, a razão é que em análise está-se, em geral, interessado em funções que podem ser representadas por progressões. Tão logo entram outras funções — e isso é raro — então [a indução] não mais atua, e um

---

225 Veja-se antes, pp. 42-7.
226 Abel [1826*b*], p. 316.
227 Abel deixa de mencionar que precisamente esse exemplo tinha já sido mencionado nesse contexto por Fourier.

número infinito de teoremas incorretos surge dessas conclusões falsas, uma levando às outras. Examinei várias dessas e tive bastante sorte em resolver o problema... [228]

No trabalho de Abel, achamos o seu famoso teorema — que, acho eu, decorreu do seu apego ao clássico princípio metafísico de Leibniz — na seguinte forma restrita:

Se a progressão $f\alpha = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \ldots + v_m\alpha^m + \ldots$ for convergente para dado valor δ de α, ela também convergirá para qualquer valor menor que δ, e para valores constantemente decrescentes de β, a função $f(\alpha - \beta)$ se aproximará do limite $f\alpha$ indefinidamente, desde que α seja menor que ou igual a δ. [229]

Historiadores racionalistas modernos da matemática que consideram a história da matemática como a história do progresso homogêneo do conhecimento com base em metodologia imutável, presumem que alguém que descubra um contra-exemplo global e proponha uma nova conjectura que não seja sujeita a refutação pelo contra-exemplo em questão automaticamente descobriu o correspondente lema oculto e o conceito gerado pela prova. Assim é que tais estudantes de história atribuem o descobrimento da convergência uniforme a Abel. Assim, na autorizada *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Pring-

---

228 Carta a Hansteen ([1826*a*]). O restante da carta é também interessante e reflete o método antiexceção de Abel: "Quando se procede por um método geral, não é muito difícil; mas tive que ser muito circunspecto, porque proposições uma vez aceitas sem provas rigorosas (isto é, sem qualquer prova) estão de tal modo enraizadas em mim que a cada momento corro o risco de empregá-las sem maior exame." Assim, Abel conferia essas conjecturas gerais uma após outra e tentava supor o domínio de sua validade.

Essa restrição autoimposta de tipo cartesiano às progressões absolutamente claras explica o interesse especial de Abel quanto ao tratamento rigoroso do desenvolvimento tayloriano: "O teorema de Taylor, base de todo o cálculo infinitesimal, não está mais bem fundamentado. Achei apenas uma demonstração rigorosa e que é de Cauchy em seu *Résumé des leçons sur le calcul infinitesimal,* onde ele demonstrava que teremos

$$\phi(x+a) = \phi(x) + a\phi'(x) + a^2\phi''(x) + \ldots$$

desde que a série seja convergente; mas empregamo-la sem atenção em todos os casos" (Carta a Holmboë [1825]).

229 Abel [1826*a*], I. p. 314. O texto é uma retradução do alemão (Crelle traduziu o original francês em alemão). * *Nota do Editor:* Parece que Abel esqueceu o signo modular em torno de α.

sheim declara que Abel "demonstrou a existência da propriedade hoje chamada convergência uniforme".[230] Hardy participa da opinião de Pringsheim. Em seu ensaio de 1918, diz ele que "a idéia de convergência uniforme está presente implicitamente na prova de Abel do seu famoso teorema".[231] Bourbaki é ainda mais explicitamente falso: de acordo com ele, Cauchy

> não percebeu a princípio a distinção entre convergência simples e convergência uniforme, e se considerava apto a demonstrar que toda série convergente de funções contínuas tem em sua soma uma função contínua. O erro foi quase logo a seguir revelado por Abel, que provou ao mesmo tempo que toda série completa [?] é contínua no interior de seu intervalo de convergência pelo raciocínio que se tornou clássico e que emprega, essencialmente, nesse particular, a noção de convergência uniforme. Restava apenas desembaraçar-se da úlitma de maneira geral, o que foi feito independentemente por Stokes e Seidel em 1847-8 e pelo próprio Cauchy em 1853.[232]

Tantas frases, tantos enganos. Abel não revelou o engano de Cauchy ao identificar as duas espécies de convergências. Sua prova não explora o conceito de convergência uniforme tanto quanto Cauchy. Os resultados de Abel e de Seidel não estão em relação de "especial" e "geral" — mas estão em níveis muito diferentes. Abel nem sequer notou que não é o domínio de funções preferíveis que tinha de ser restrito, mas, isso sim, o modo como convergem! De fato, para Abel existe apenas uma espécie de convergência, a simples; e o segredo da certeza frustrada de sua prova reside em suas prudentes (e felizes) definições-zero:[233] como sabemos agora, no caso de progressões, a convergência simples coincide com a convergência uniforme![234]

---

230 Pringsheim [1916], p. 34.
231 Hardy [1918], p. 148.
232 Bourbaki [1949], p. 65 e [1960], p. 228.
233 Cf. antes, pp. 42-7.
234 Dois matemáticos observaram que a prova de Abel não era inteiramente isenta de falha. Um foi o próprio Abel, que tornou a deparar-se com o problema — sem êxito — em seu trabalho postumamente publicado *Sur les Séries* ([1881], p. 202). O outro foi Sylow, coeditor da segunda edição das *Obras Reunidas* de Abel. Ele acrescentou uma nota crítica ao teorema, na qual observa que temos de exigir convergência uniforme na prova e não convergência simples, como o faz Abel. Mas ele não utilizou o termo "convergência uniforme" que aparentemente ele não conhecia (a segunda edição do

Enquanto critico os historiadores, devo também mencionar que o primeiro contra-exemplo ao teorema de Cauchy tem em geral sido atribuído a Abel. Foi notado apenas por Jourdain que ele ocorre em Fourier. Mas ele, no espírito a-histórico já assinalado, tira desse fato a conseqüência que Fourier, por quem Jourdain nutria grande admiração, chegou perto de descobrir o conceito de convergência uniforme. Tem sido omitida por todos os historiadores, até agora, a questão de que um contra-exemplo pode ter que pugnar por reconhecimento, e, quando reconhecido, pode ainda não levar automaticamente ao lema oculto e, por conseguinte, ao conceito gerado pela prova.

4. *Obstáculos no Caminho do Descobrimento do Método de Análise da Prova*

Mas voltemos agora ao problema principal. Que teria levado notáveis matemáticos, de 1821 a 1847, a não encontrarem a mínima falha na prova de Cauchy e não terem aperfeiçoado tanto a análise da prova como o teorema?

A primeira resposta é que eles não conheciam o método de provas e refutações. Eles não sabiam que após o descobrimento de um contra-exemplo eles tinham que analisar sua prova cuidadosamente e tentar encontrar o lema oculto. Eles tratavam de contra-exemplos globais mediante o método heuristicamente estéril de antiexceção.

Cours d'Analyse de Jordan não havia aparecido ainda) e ele mencionava, ao invés, uma generalização posterior de du Bois-Reymond, que apenas mostra que inclusive ele não via claramente a natureza da falha. Reiff, em seu [1889], rejeitou a crítica de Sylow com o ingênuo argumento de que o teorema de Abel é válido. Reiff diz que, embora Cauchy fosse o fundador da teoria da convergência, Abel era o fundador da teoria das séries contínuas:

Resumindo brevemente as realizações de Cauchy e de Abel, podemos dizer: Cauchy descobriu a teoria da convergência e divergência de séries infinitas em sua *Analyse Algébrique*, e Abel descobriu a teoria da continuidade de séries em seu *Treatise on the Binomial Series* ([1889], pp. 178-9).

Afirmar isso em 1889 era coisa de pomposa ignorância.

Mas é claro que a validade do teorema de Abel é devida à própria definição zero estreita, e não à prova. O trabalho de Abel foi depois publicado em *Ostwald's Klassiker* (N.º 71), Leipzig, 1895. Nas notas as observações de Sylow são reproduzidas sem qualquer comentário.

[235] Jourdain [1912], pp. 527.

De fato, Seidel descobriu de uma só vez o conceito de convergência uniforme gerado pela prova e o método de provas e refutações. Ele estava plenamente cônscio de sua descoberta metodológica,[236] o que declarou em seu trabalho com grande clareza:

> Partindo da certeza agora adquirida de que o teorema não é válido universalmente, e daí que sua prova deve repousar em alguma suposição oculta extra, submete-se então a prova a uma análise mais pormenorizada. Não é muito difícil descobrir a hipótese oculta. Pode-se então inferir, em retrocesso, que essa condição expressa pela hipótese não é satisfeita pelas séries que representam funções descontínuas, visto que só assim pode ser restaurado o acordo entre a prova correta e o que foi estabelecido.[237]

Que teria impedido a geração anterior a Seidel de descobrir isso? A principal razão (que já mencionamos) era a vigência da metodologia euclideana.

A revolução cauchyana de rigor foi motivada por uma tentativa consciente de aplicar a metodologia euclideana aos *Calculus*.[238] Ele e seus discípulos pensavam que, desse modo, lançariam luz para dissipar a "tremenda obscuridade da análise".[239] Cauchy agiu no espírito das regras de Pascal: primeiro, dispôs-se a definir os termos obscuros da análise — como limite, convergência, continuidade, etc. — nos termos perfeitamente familiares da aritmética, e depois continuou provando tudo o que não fora anteriormente provado, ou o que não era perfeitamente óbvio. Ora, na estrutura euclideana não há questão alguma quanto a ter-se que provar o que é falso, de modo que Cauchy teve primeiro que melhorar o existente corpo vivo de conjecturas matemáticas, aliviando-o de inutilidades. A fim de aperfeiçoar a conjectura, ele aplicou o método de procura das exceções e restringindo o domínio de vali-

---

236 Os racionalistas duvidam de que haja absolutamente descobertas metodológicas. Pensam que o método é imutável, eterno. De fato, os descobridores metodológicos são muito mal tratados. Antes que seu método seja aceito ele é tratado como teoria excêntrica; depois, é tratado como lugar-comum trivial.

237 Seidel [1847], p. 383.

238 "Quanto aos métodos, tive que dar-lhes todo o rigor que se exige em geometria, de modo a jamais recorrer a razões tiradas da generalidade da álgebra" (Cauchy [1821], Introdução).

239 Abel [1826a], p. 263.

dade das conjecturas originais apressadas para um campo seguro, isto é, aplicou o método de antiexceção.[240]

Em 1865, um escritor na edição do Larousse (talvez Catalan), um tanto sarcasticamente, caracterizou a procura de contra-exemplos por Cauchy, desse modo:

> Ele introduziu na ciência apenas doutrinas negativas... e de fato quase sempre é o aspecto negativo da verdade o que ele veio a descobrir, o que ele toma o cuidado de tornar evidente: se ele tivesse achado algum ouro na caiação, teria anunciado ao mundo que a cal não é constituída *exclusivamente* de carbonato de cálcio.

Além de uma carta que Abel escreveu a Holmboë há mais prova desse novo espírito de pesquisa da escola cauchyana:

> Comecei a examinar as regras mais importantes que (atualmente) em geral aprovamos nesse sentido, e a mostrar em que casos elas não são adequadas. A coisa vai bastante bem e me entusiasma de modo indizível.[241]

O que era considerado pelos rigoristas serem futilidades, tais como conjecturas sobre somas de séries divergentes, era devidamente jogado ao fogo.[242] "Séries divergentes são", escreveu Abel, "obra do diabo". Só causam "calamidades e paradoxos".[243]

Mas, enquanto constantemente se esforçando por melhorar suas conjecturas mediante antiexceções, a noção de *melhorar* provando nunca lhes ocorreu. As duas atividades de supor e provar são rigidamente distintas na tradição euclideana. A idéia de uma prova que mereça esse nome e ainda não seja conclusiva era estranha aos rigoristas. Contra-exemplos eram considerados como sérias e funestas desonras: eles mostravam que uma conjectura estava errada e que se tinha de começar a provar de novo, desde o princípio.

Isso era compreensível em vista do fato de que, no século XVIII, partes do obsoleto raciocínio indutivo eram

---

240 "Trazer valiosas restrições a asserções demasiado extensas" (Cauchy [1821]).

241 Abel [1825], p. 258.

242 Os contemporâneos certamente consideram esse expurgo como "um tanto precipitado" (Cauchy, [1821], Introdução).

243 Abel [1825], p. 257.

chamadas de provas.[244] Mas não havia modo de melhorar essas "provas" Elas eram imediatamente banidas como "provas não rigorosas — o que significa, absolutamente não eram provas".[245] *O argumento indutivo era falível — portanto, era destinado ao fogo. O argumento dedutivo assumiu o seu lugar — porque era tido como infalível.* "Fiz com que toda a incerteza desaparecesse", proclamou Cauchy.[246] É contra esse pano de fundo que a refutação do teorema "rigorosamente" provado de Cauchy tem de ser apreciada. E essa refutação não era um caso isolado. A prova rigorosa de Cauchy da fórmula de Euler era, como vimos, acompanhada de escritos enunciando as bem conhecidas "exceções".

Havia apenas duas saídas: ou revisar toda a filosofia infalibilista da matemática subjacente ao método euclideano, ou de algum modo silenciar o problema. Vejamos, primeiramente, o que estaria implicado na revisão do enfoque infalibilista. Ter-se-ia certamente que abandonar a idéia de que toda a matemática pode ser reduzida a trivialidades indubitavelmente verdadeiras, que há enunciados sobre os quais nossa intuição infalível talvez não possa ser enganada. Tinha-se que abandonar a noção de que nossa intuição inferencial dedutiva é infalível. Só admitindo essas duas coisas estaria aberto o caminho para o livre desenvolvimento do método de provas e refutações e sua aplicação à apreciação crítica de argumento dedutivo e ao problema de lidar com contra-exemplos.[247]

---

[244] O "formalismo" do século XVIII era indutivismo puro. Cf. à p. 174 a rejeição de Cauchy no prefácio de seu [1821] de induções que são apenas "apropriadas para às vezes apresentar a verdade".

[245] Abel [1826*a*], p. 263. Para Cauchy e Abel, "rigoroso" significa dedutivo, contrastando com indutivo.

[246] Cauchy [1821], Introdução.

[247] *Nota do Editor:* Essa passagem parece-nos equivocada, e não temos dúvida alguma de que Lakatos, que tinha na mais alta conta a lógica formal dedutiva, a teria modificado. A lógica chegou a uma caracterização da validade de uma inferência que (relativo à caracterização dos termos "lógicos" de uma língua) torna válida inferência essencialmente infalível. Assim, tem-se que apenas admitir a primeira das duas premissas mencionadas por Lakatos. Mediante uma análise de prova suficientemente boa, todas as dúvidas podem ser para os axiomas (ou antecedentes do teorema) deixando nenhuma na própria prova. O método de provas e refutações não é de modo algum invalidado (como sugerido no texto) pela recusa de admitir

Na medida em que um contra-exemplo era uma desonra não só para o teorema, mas também para o matemático que o defendesse, na medida em que havia apenas provas ou não-provas, mas nenhuma prova sadia com pontos fracos, a crítica matemática estava obstaculada. Foi o estofo filosófico infalibilista do método enclideano que nutriu os padrões autoritários tradicionais em matemática, que impediu a publicação e discussão de conjecturas, e impossibilitou o surgimento da crítica matemática. A crítica literária existe porque podemos apreciar um poema sem considerá-lo como perfeito; a crítica matemática ou científica não pode existir enquanto só apreciarmos o resultado matemático ou científico se produzir verdade perfeita. Prova só é prova se provar; e ela ou prova ou não. A idéia — expressa tão nitidamente por Seidel — de que uma prova pode ser respeitável sem ser imaculada foi revolucionária em 1847 e, infelizmente, ainda hoje é tida como revolucionária.

Não é coincidência que a descoberta do método de provas e refutações tenha ocorrido por volta de 1840, quando o fracasso da ótica newtoniana (devido à obra de Fresnel na década de 1810 a 1820), e o descobrimento das geometrias não-euclideanas (por Lobatchewisky em 1829 e Bolyai em 1832) abalaram o preconceito infalibilista. [248]

---

a segunda das premissas: de fato, pode ser por esse método que as provas sejam aperfeiçoadas de modo que todas as suposições se tornem explícitas para que a prova seja válida.

248 Na mesma década, a filosofia de Hegel oferece ao mesmo tempo uma ruptura radical com seus predecessores infalibilistas e um fecundo ponto de partida para um enfoque totalmente novo do conhecimento (Hegel e Popper representam as únicas tradições falibilistas na filosofia moderna, mas mesmo eles cometem o engano de reservar um *status* privilegiado de infalibilidade para a matemática). Um trecho de Morgan mostra o novo espírito falibilista da década de 40:

"Por vezes, aparece uma tendência a rejeitar tudo o que oferece alguma dificuldade ou não proporciona todas as suas conclusões sem problema no exame de contradições aparentes. Se com isso se deve entender que nada deva ser permanentemente utilizado, e, implicitamente, indigno de confiança, o que não é verdade para a plena extensão da asserção feita, por mim não ofereceria oposição a tendência tão racional. Mas se implica que nada deva ser dado ao estudante, com ou sem advertência, que não possa ser compreendido em toda a sua generalidade, eu protestaria, com deferência, contra a restrição que tendesse, a meu ver, não apenas a dar falsas impressões do que realmente é conhecido como também estancar o progresso da descoberta.

Antes do descobrimento do método de provas e refutações, o problema suscitado pela sucessão de contra-exemplos a um teorema "rigorosamente provado" só podia ser 'solucionado' pelo método de antiexceção. *A prova prova o teorema, mas deixa em aberto a questão quanto a qual é o domínio de validade do teorema. Podemos determinar esse domínio enunciando e cuidadosamente excluindo as "exceções"* (*esse eufemismo é característico da época*). *Essas exceções são então incluídas na formulação do teorema.*

A dominância do método antiexceção mostra como o método euclideano pode, em certas situações problemáticas cruciais, ter efeitos deletérios sobre o desenvolvimento da matemática. A maioria dessas situações problemáticas ocorre nas teorias matemáticas em evolução, em que

---

Não é verdade, fora da geometria, que as ciências matemáticas sejam, em todas as suas partes, aqueles modelos de acabada perfeição que muitos supõem. Os limites extremos da análise têm sido sempre tão imperfeitamente compreendidos quanto a região além dos limites era absolutamente desconhecida. Mas o modo de ampliar o país descoberto não tem sido o de se manter dentro dele [esta observação é contra o método de antiexceção], mas fazendo-se viagens de descobrimento, e estou inteiramente persuadido de que o estudante deve ser exercitado desse modo; isto é, deve-se-lhe ensinar a examinar o limite assim como cultivar o interior. Não tive hesitação, portanto, na última parte da obra, de empregar métodos que não chamarei de duvidosos, porque são apresentados como inacabados, e porque a dúvida é a do aprendiz que espera, e não de um crítico insatisfeito. A experiência tem mostrado freqüentemente que a conclusão defeituosa torna-se inteligível e rigorosa preservando-se o pensamento, mas quem pode pensar em conclusões que jamais lhes foram apresentadas? O efeito da atenção exclusiva àquelas partes da matemática que não deixam margem a discussão e que não têm pontos duvidosos é uma aversão por modos de proceder que são absolutamente necessários para o desenvolvimento da análise. Se o cultivo das partes superiores da matemática fosse deixado a pessoas preparadas para esse fim, poderia haver alguma razão para manter fora do alcance do estudante comum, não apenas as partes não fundadas mas inclusive as partes puramente especulativas das ciências abstratas; reservando-as para aquelas pessoas cuja função fosse tornar as primeiras claras e as últimas aplicáveis. Tal como é, porém, os poucos que neste país prestam atenção a qualquer dificuldade da matemática por sua conta, chegam a suas realizações por acasos de gosto ou circunstâncias; e o número de tais casos seria aumentado permitindo-se aos estudantes cuja capacidade lhes permitisse enveredar pelos ramos superiores da matemática, terem sua oportunidade de cultivar aquelas partes da análise de que tanto depende seu progresso futuro quanto o seu emprego atual nas ciências da matéria" (de Morgan [1842], p. vii).

os conceitos em evolução são os veículos do progresso, onde os fatos mais impressionantes advêm da exploração das regiões limítrofes dos conceitos, da extensão deles, e da diferenciação de conceitos antigamente indiferenciados. Nessas teorias em progresso, a intuição não é sentida, ela confunde e erra. Não há teoria que não tenha passado por um período de progresso; além do mais, esse período é o mais interessante do ponto de vista histórico, e deve ser o mais importante do ponto de vista didático. Esses períodos não podem ser adequadamente compreendidos sem compreensão do método de provas e refutações, sem adoção de um enfoque falibilista.

Essa a razão pela qual Euclides tem sido o gênio mau sobretudo para a história da matemática e para o ensino da matemática, tanto no nível introdutório como no nível criativo.[249]

[250] *Nota:* Neste apêndice, as fases suplementares 5, 6 e 7 (cf. p. 167) do método de provas e refutações não foram discutidas. Mencionaria aqui que a busca metódica de convergência uniforme em outras provas (fase 5) teria muito rapidamente produzido a refutação e aperfeiçoamento de outro teorema provado por Cauchy: o teorema de que a integral do limite de qualquer série convergente de funções contínuas é o limite da seqüência das integrais dos termos, ou, em resumo, que no caso de séries de funções contínuas o limite e as operações integrais podem ser intercambiados. Isso passou sem contestação por todo o século XVIII, e inclusive Gauss aplicou-o sem mais reflexão (Veja-se Gauss [1813], Knopp [1928] e Bell [1945].

Ora, não ocorreu a Seidel, que descobriu a convergência uniforme em 1847, examinar outras provas para verificar se haviam sido implicitamente assumidas no caso. Stokes, que descobriu a convergência uniforme no mesmo ano — embora sem auxílio do método de provas e refutações — emprega nesse mesmo trabalho o falso teorema sobre integração de séries, referindo-se a Moigno (Stokes [1848]. (Stokes cometeu outro engano: pensava ter provado que a convergência uniforme não apenas era suficiente, mas necessária para a continuidade da função limite.)

Essa demora na descoberta de que a prova de que a integração de séries também depende da presunção de convergência uniforme pode ter sido devida ao fato de que essa conjectura primitiva foi refutada por um contra-exemplo concreto apenas em 1875 (Darboux [1875]), data em que a análise de prova tinha já refeito a convergência uniforme na prova sem que a análise fosse catalizada por um contra-

[249] De acordo com R. B. Braithwaite, "o gênio bom da matemática e da ciência inconsciente de si, Euclides foi o gênio mau da filosofia da ciência — e realmente da metafísica" (Braithwaite [1953], p. 353). Essa declaração, contudo, origina-se de uma concepção logicista estática de matemática.

exemplo. A busca de convergência uniforme, uma vez plenamente a caminho com Weierstrass à frente, logo descobria o conceito em provas referentes a diferenciação termo por termo, limites duplos, etc.

A *sexta fase* é para conferir as conseqüências até agora aceitas da conjectura primitiva refutada. Podemos salvar essas conseqüências ou a refutação do lema leva a sacrifício funesto? Integração termo a termo, por exemplo, era uma pedra angular da prova de Dirichlet da conjectura de Fourier. Du Bois-Reymond descreve a situação em termos dramáticos: a teoria das séries trigonométricas caía por terra; seus dois teoremas-chaves ficaram sem o solo em que tinham base e

> "de um só golpe, a teoria recuava ao estado em que estivera antes de Dirichlet, antes mesmo de Fourier".

(du Bois Reymond [1875], p. 120). Ele faz um curioso estudo para verificar como o "terreno perdido" foi reconquistado.

Nesse processo, um feixe de contra-exemplos foi desenterrado. Mas seu estudo — a sétima fase do método — começou apenas nos últimos anos do século (p.e., a obra de Young sobre a classificação e distribuição de pontos de convergência não-uniforme; Young [1903-4].

APÊNDICE 2

ENFOQUE DEDUTIVISTA "VERSUS" ENFOQUE HEURÍSTICO

1. *O Enfoque Dedutivista*

A metodologia euclideana desenvolveu certo estilo obrigatório de apresentação. Vou designá-lo "estilo dedutivista". Esse estilo começa com uma lista laboriosamente feita de *axiomas*, *lemas* e/ou *definições*. Os axiomas e definições freqüentemente parecem artificiais e mistificadoramente complicados. Nunca se fica sabendo como essas complicações surgiram. A lista de axiomas e definições é seguida de *teoremas* cuidadosamente redigidos. Estes, por sua vez, estão carregados de pesadas condições; parece impossível que alguém jamais os tivesse suposto. O teorema é seguido da *prova*.

O estudante de matemática é obrigado, de acordo com o ritual euclideano, a assistir a esse ato conjuratório sem fazer perguntas sobre o assunto ou sobre como o ato mágico é praticado. Se o estudante por acaso descobre que algumas das indecorosas definições são geradas pela prova, se ele simplesmente imagina como essas definições, lemas e o teorema possam talvez surgir da prova, o feiticeiro o banirá por sua demonstração de imaturidade matemática.[251]

---

251 Alguns manuais declaram não esperar que o leitor tenha qualquer conhecimento anterior, apenas certa maturidade matemática. Isso não raro quer dizer que esperam seja o leitor dotado pela natureza com a "capacidade" de tomar um argumento euclidiano sem qualquer interesse fora do comum no estofo problemático, na heurística por trás do argumento.

No estilo dedutivista, todas as proposições são verdadeiras e válidas todas as inferências. A matemática é apresentada como uma série sempre crescente de verdades imutáveis e eternas. Possivelmente, não têm lugar contra-exemplos, refutações e crítica. Um aspecto autoritário é garantido para o assunto, começando com definições antimonstro disfarçadas e geradas pela prova e com o teorema todo emplumado, suprimindo-se a conjectura primitiva, as refutações e a crítica da prova. O estilo dedutivista oculta a luta, esconde a aventura. Toda a história evapora, as sucessivas formulações provisórias do teorema durante a prova são relegadas ao esquecimento enquanto o resultado final é exaltado como infalibilidade sagrada.[252]

Alguns defensores do estilo dedutivista alegam que a dedução é o padrão heurístico em matemática, que a lógica da descoberta é dedução.[253] Outros compreendem

---

252 Ainda não se compreendeu suficientemente que a atual educação científica e matemática é um foco de autoritarismo e que é a pior inimiga do pensamento independente e crítico. Embora em matemática esse autoritarismo siga o padrão dedutivista há pouco descrito, em ciência ele age através do padrão indutivista.

Prevalece há muito a tradição do estilo indutivista em ciência. Um escrito ideal nesse estilo começa com a pormenorizada descrição do plano da experiência, seguido da descrição da experiência e seu resultado. Uma "generalização" pode concluir o escrito. A situação problemática, a conjectura que o experimento tinha que testar, desaparece. O autor gaba-se de uma mente vazia, virgem. O escrito só será compreendido por quem realmente conheça a situação problemática. O estilo indutivista reflete a pretensão de que o cientista começa sua investigação com a mente vazia ao passo que de fato ele começa com a mente cheia de idéias. Esse jogo só pode ser jogado — nem sempre com êxito — por uma guilda seleta de especialistas. O estilo indutivista, assim como seu gêmeo dedutivista (não contrapartida!), embora alegando objetividade, de fato favorece a uma língua particular da guilda, atomiza a ciência, sufoca a crítica, torna a ciência autoritária. Os contra-exemplos jamais podem ocorrer em tal apresentação: começa-se com observações (não com teoria), e obviamente a menos que se tenha uma teoria prévia, não se podem observar contra-exemplos.

253 Essas pessoas alegam que os matemáticos começam com a mente vazia, estabelecem seus axiomas e definições a seu bel prazer, durante uma atividade criativa livre e lúdica, e apenas em fase posterior eles deduzem os teoremas desses axiomas e definições. Se em alguma interpretação os axiomas são verdadeiros, os teoremas serão todos verdadeiros. A esteira rolante matemática da verdade não pode falhar. Depois do nosso estudo de caso no processo da prova isto pode ser

que isso não é verdade, mas tiram dessa compreensão a conclusão de que o descobrimento matemático é uma questão completamente não-racional. Assim é que dirão que, embora a descoberta matemática não proceda dedutivamente, se quisermos que nossa apresentação das descobertas matemáticas proceda racionalmente, deve-se agir no estilo dedutivista. [254]

Temos assim, atualmente, dois argumentos em favor do estilo dedutivista. Um tem base na idéia de que a heurística é racional e dedutivista. O segundo baseia-se na idéia de que a heurística não é dedutivista, mas também não-racional.

Existe ainda um terceiro argumento. Alguns matemáticos profissionais que não gostam dos lógicos, filósofos e outros excêntricos que interferem em seu trabalho, dizem, em geral, que a introdução do estilo heurístico exi-

---

banido como argumento em defesa do estilo dedutivista em geral — se não aceitarmos a restrição da matemática a sistemas formais.

Ora, embora Popper mostrasse estarem errados aqueles que alegam ser a indução a lógica do descobrimento científico, esses ensaios pretendem mostrar que estão errados aqueles que alegam ser a dedução a lógica da descoberta matemática. Enquanto Popper criticava o estilo indutivista, esses ensaios tentam criticar o estilo dedutivista.

254 Essa doutrina é parte essencial da maioria das várias filosofias formalistas da matemática. Os formalistas, quando falam da descoberta, discriminam o contexto da descoberta e o contexto da justificação. "O contexto da descoberta é deixado à análise psicológica, ao passo que a lógica se ocupa da justificação" (Reichenbach [1947], p. 2). Opinião semelhante pode ser encontrada em R. B. Braithwaite [1953], p. 27, e mesmo em K. R. Popper [1959], pp. 31-32, e em seu [1935]. Popper, quando (de fato, em 1934) dividindo os aspectos da descoberta entre psicologia e lógica de tal modo a não deixar lugar para a heurística como campo independente de investigação, obviamente não tinha então compreendido que sua "lógica da descoberta" era mais que o esquema estritamente lógico do progresso da ciência. Essa a origem do título paradoxal de seu livro, a tese que parece ter duas faces: *(a)* não existe lógica do descobrimento científico — tanto Bacon como Descartes estavam errados; *(b)* a lógica do descobrimento científico e a lógica de conjecturas e refutações. A solução desse paradoxo está à mão: *(a)* não existe lógica infalibilista do descobrimento científico, que leve infalivelmente a resultados; *(b)* existe uma lógica falibilista do descobrimento que é a lógica do progresso científico. Mas Popper, que lançou a base dessa lógica do descobrimento, não estava interessado na metaquestão do que era a natureza de sua investigação e não compreendeu que isso nem era psicologia nem lógica, mas disciplina independente: a lógica do descobrimento, heurística.

giria que se escrevessem de novo os manuais, e os tornaria tão longos que nunca se poderia lê-los até o fim. Os ensaios ficariam também muito mais extensos.[255] A resposta a esse argumento pedestre é: experimentemos.

2. *O Enfoque Heurístico. Conceitos Gerados pela Prova.*

Esta seção encerrará curtas análises heurísticas de alguns importantes conceitos gerados pela prova. Esperamos que essas análises mostrem a vantagem de introduzir elementos heurísticos no estilo matemático.

Como já mencionamos, o estilo dedutivista rompe as definições geradas pela prova dos antepassados, apresenta-as no vazio, de modo artificial e autoritário. Ele oculta os contra-exemplos globais que levaram ao seu descobrimento. Pelo contrário, o estilo heurístico acentua esses fatores. Dá ênfase à situação problemática: acentua a "lógica" que deu nascimento ao novo conceito.

Vejamos, primeiramente, como se pode introduzir no estilo heurístico o conceito de convergência uniforme gerado pela prova, que analisamos no Apêndice 1. Nesse e nos demais exemplos, certamente presumimos familiaridade com os termos técnicos do método de provas e refutações. Mas isso não é mais imperioso que a exigência normal de familiaridade com os termos técnicos do programa euclideano, como axiomas, termos primitivos, etc.

(*a*) *Convergência uniforme*

Tese. Versão específica do princípio leibniziano de continuidade; diz ele que a função limite de qualquer seqüência convergente de funções contínuas é contínuo. (*Conjectura Primitiva*).

Antítese. A definição cauchyana de continuidade eleva a tese a nível mais elevado. Sua *decisão definicional* legaliza os contra-exemplos de Fourier. Essa definição ao mesmo tempo exclui a possível conciliação de que a continuidade seja restaurada por linhas perpendiculares, e assim enseja — junto com algumas séries trigonométricas — o pólo negativo da antítese. O pólo

255 Embora se tenha que admitir que deveriam ser em menor quantidade também, já que o enunciado da situação problemática obviamente exibiria a pouca importância de alguns deles.

positivo se robustece pela prova de Cauchy, que será o antepassado da convergência uniforme. O pólo negativo se fortalece a cada *contra-exemplo global* à conjectura primitiva.

Síntese. O *lema condenado* para o qual os contra-exemplos globais são também locais é circunscrito, a prova melhorada, a conjectura aperfeiçoada. Os constituintes característicos da síntese surgem; o teorema, e com ele o *conceito de convergência* uniforme *gerado pela prova.*[256]

A linguagem hegeliana que emprego aqui seria capaz, segundo penso, de descrever de modo geral os vários de-

---

[256] Por alguma razão, a convergência uniforme é, em alguns manuais, destacada para tratamento excepcional (semi-heurístico). Por exemplo, W. Rudin em seu [1953], primeiro apresenta uma seção: "Discussão do Problema Principal" (p. 115), onde ele propõe a conjectura primitiva e sua refutação e então apresenta a definição de convergência uniforme. Essa apresentação tem duas falhas: (a) Rudin simplesmente não apresenta a conjectura primitiva e sua refutação, mas indaga se a conjectura primitiva é verdadeira ou falsa, e mostra a falsidade mediante exemplos bem conhecidos. Mas ao fazer isso, não vai além do estilo infalibilista; em sua "situação problemática", não há conjectura, mas questão aguda e requintada, seguida de um exemplo (não de contra-exemplo) a que dá uma resposta resoluta. (b) Rudin não mostra que o conceito de convergência uniforme surge da prova, em vez disso, em sua apresentação, a definição precede a prova. Isso não poderia ser de outro modo no estilo dedutivista, porque se tivesse dado a prova original, e só então se seguissem a refutação acompanhada da prova aperfeiçoada e da definição gerada pela prova, teria exibido o movimento de matemática "eternamente estática", a falibilidade da matemática "infalível" que é inconsistente com a tradição euclideana. (Talvez se deva acrescentar que continuo citando o livro de Rudin porque é um dos melhores manuais dentro dessa tradição). No prefácio, por exemplo, diz Rudin: "Parece importante, sobretudo para o iniciante, perceber explicitamente que as hipóteses de um teorema são realmente necessárias para garantir a validade das conclusões. Para esse fim, grande número de contra-exemplos foram incluídos no texto". Infelizmente, trata-se de contra-exemplos burlescos, já que de fato são exemplos para mostrar como matemáticos prudentes devem incluir todas as hipóteses no teorema. Mas ele não diz de onde vêm essas hipóteses, que elas vêm de idéias de prova, e que o teorema não salta da cabeça do matemático, como Palas Atenéia, toda armada, sai da cabeça de Zeus. Seu emprego da palavra contra-exemplo não nos deve desorientar na esperança de um estilo falibilista. *Nota do Editor*: Todas as observações de Lakatos sobre a obra de Rudin baseiam-se na primeira edição desse livro. Nem todas as passagens que Lakatos cita são encontradas na segunda edição, publicada em 1964.

senvolvimentos em matemática. (Ela tem, contudo, seus perigos como seus atrativos). A concepção hegeliana de heurística subjacente à linguagem é aproximadamente essa. A atividade matemática é atividade humana. Certos aspectos dessa atividade — como de qualquer atividade humana — podem ser estudados pela psicologia, outros pela história. A heurística não está interessada primordialmente nesses aspectos. Mas a atividade matemática produz matemática. A matemática, esse produto da atividade humana, "aliena-se" da atividade humana que a esteve produzindo. Ela se converte num organismo vivo, em crescimento, que *adquire certa autonomia da atividade que a produziu*; ela revela suas próprias leis autônomas de crescimento, sua própria dialética. O autêntico matemático criativo é precisamente uma personificação, uma encarnação dessas leis que só se podem compreender na ação humana. Sua encarnação, porém, raramente é perfeita. A atividade dos matemáticos humanos, tal como aparece na história, é apenas uma tosca concretização da dialética maravilhosa de idéias matemáticas. Mas qualquer matemático, se tiver talento, argúcia, gênio, comunica-se, sente o ímpeto e obedece essa dialética de idéias. [257]

Ora, a heurística se interessa pela dialética autônoma da matemática, e não por sua história, embora ela só possa estudar seu assunto através do estudo da história e da reconstrução racional da história. [258]

---

257 Essa idéia hegeliana de autonomia da atividade humana alienada pode proporcionar a chave para alguns problemas referentes ao status e metodologia das ciências sociais, sobretudo a economia. Meu conceito do matemático como personificação imperfeita da matemática é estreitamente análogo ao conceito de Marx do capitalista como personificação do capital. Infelizmente, Marx não restringe sua concepção pela ênfase no aspecto imperfeito dessa personificação, e nada há de inexorável sobre a concretização desse processo. Pelo contrário, a atividade humana pode sempre suprimir ou destorcer a autonomia de processos alienados e pode ensejar outros novos. O descuido quanto a essa interação foi uma das fragilidades centrais da dialética marxista.

258 *Nota dos Organizadores*. Estamos certos de que Lakatos teria modificado essa passagem em alguns aspectos, já que sua base hegeliana se tornava cada vez mais fraca à medida que sua obra progredia. Contudo, ele mantinha uma crença na importância fundamental de reconhecer a autonomia parcial de produtos do esforço intelectual humano. Nesse mundo do conteúdo objetivo de proposições (Popper veio a chamá-lo de "terceiro mundo": veja-se seu [1972]), existem problemas (causados, por exemplo, por inconsistências lógicas entre propo-

(*b*) *Variação limitada*

O modo como o conceito de variação limitada é em geral apresentado em manuais de análise é belo exemplo de estilo dedutivista autoritário. Tomemos de novo o livro de Rudin. No meio do seu capítulo sobre a integral Riemann-Stieltjes, ele subitamente apresenta a definição de funções de variação limitada.

6.20 *Definição.* Seja f definida em $[a, b]$. Colocamos

(37) $$V(f) = \text{lub} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|,$$

em que o lub assume todas as divisões de $[a, b]$. Se $V(f)$ for finita, dizemos que f é de variação limitada em $[a, b]$, e chamamos $V(f)$ de variação total de f em $[a, b]$.[259]

Por que deveríamos estar interessados exatamente nessa série de funções? A resposta dedutivista é: "Espere e veja". Assim, esperemos, acompanhemos a exposição e tentemos ver. A definição é seguida de exemplos destinados a dar ao leitor algumas idéias sobre o domínio do conceito (isto, e coisas como esta, tornam o livro de Rudin excepcionalmente bom dentro da tradição dedutivista). Depois vem uma série de teoremas (6.22, 6.24, 6.25); e então, subitamente, a seguinte proposição:

Corolário 2. Se f é de variação limitada e g é contínua em $[a, b]$, então $f \in \mathfrak{R}^\star(g)$.[260]

($\mathfrak{R}^\star(g)$ é a classe das funções Riemann-Stieltjes integráveis com respeito a g).

Poderíamos estar muito mais interessados nessa proposição se realmente compreendêssemos exatamente por que as funções integráveis Riemann-Stieltjes são tão importantes. Rudin nem mesmo menciona o conceito intui-

---

sições) independentemente de nosso reconhecimento delas; daí podermos descobrir (mais que inventar) problemas intelectuais. Mas Lakatos veio a crer que esses problemas não "demandavam" solução ou ditassem sua própria solução; pelo contrário, a engenhosidade humana (que pode ou não ser invocada) é exigida para sua solução. Essa opinião é pressagiada na crítica a Marx na nota anterior.

259 Rudin [1953], pp. 99-100.

260 *Ibid.*, p. 106.

tivamente mais óbvio de integrabilidade, isto é, a integrabilidade cauchyana, crítica da qual levou à integrabilidade riemanniana. Assim temos agora um teorema no qual ocorrem dois conceitos místicos: variação limitada e integrabilidade riemanniana. Mas dois mistérios não significam compreensão. Ou talvez signifiquem para aqueles que tenham a "capacidade e inclinação para acompanhar um artifício de pensamento abstrato"? [261]

Uma apresentação heurística mostraria que tanto a integrabilidade Riemann-Stieltjes como a variação limitada são conceitos gerados pela prova, tendo origem numa mesma prova: a prova de Dirichlet e a conjectura de Fourier. Essa prova dá o estofo problemático de ambos os conceitos. [262]

Ora, a conjectura primitiva de Fourier [263] não contém qualquer termo místico. Essa conjectura primitiva de variação limitada diz que qualquer função arbitrária é fouriermente expansível [264] — que é uma conjectura simples e sensacional. Ela foi provada por Dirichlet. [265] Dirichlet examinou sua prova cuidadosamente e aprimorou a conjectura de Fourier incorporando-lhe os lemas como condições. Trata-se das célebres condições dirichletianas. O teorema resultante era este: Todas as funções são fouriermente expansíveis (1) o valor das quais num ponto de salto é $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$, (2) que têm apenas um número finito de descontinuidades, e (3) que têm apenas um número finito de máximos e mínimos. [266]

---

261 Rudin [1953], Prefácio.

262 Esta prova e o teorema que a resume estão de fato no mencionado livro de Rudin, mas implícitas no exercício 17 do capítulo 8 (p. 164), completamente desligados dos conceitos acima, que são apresentados de modo autoritário.

263 Fourier [1808], p. 112.

264 "Expansível fouriermente" equivale a "expansível em séries trigonométricas com os coeficientes de Fourier".

265 Veja-se seu [1829] e [1837]. Há muitos aspectos interessantes do estofo dessa prova nos quais não podemos, infelizmente, nos deter; por exemplo, o problema do valor da "prova" original de Fourier, a comparação das duas provas subseqüentes de Dirichlet, e a crítica esmagadora de Dirichlet da primeira prova ([1826]) de Cauchy.

266 Deve-se mencionar aqui que a prova de Dirichlet não foi precedida nem estimulada por contra-exemplos à conjectura original de Fourier. Ninguém ofereceu quaisquer contra-exemplos; de fato, Cauchy "provou" a conjectura original (cf. nota 17); o domínio de validade de sua prova era a seqüência vazia). Os primeiros contra-exemplos só foram sugeridos pelos lemas da prova de Dirichlet; sobretudo

Todas essas condições decorrem da prova. A análise de prova de Dirichlet tinha falha apenas quanto à terceira condição: a prova, de fato, repousa apenas na variação limitada da função. A análise de prova de Dirichlet foi criticada e seu erro corrigido por C. Jordan em 1881, que se tornou assim o descobridor do conceito de variação limitada. Mas ele não inventou o conceito, ele não o "introduziu" [267] — antes, ele o *descobriu* na prova de Dirichlet durante um reexame crítico. [268]

Outra fragilidade da prova de Dirichlet foi o seu emprego da definição cauchyana da integral que é instrumento adequado apenas para funções contínuas. De acordo com a definição cauchyana, funções descontínuas não são absolutamente integráveis, e *ipso facto* não são fouriermente expansíveis. Dirichlet evitou essa dificuldade considerando a integral de uma função descontínua como a soma das integrais naqueles intervalos em que a função era contínua. Isso pode facilmente ser feito se o número de descontinuidades for finito, mas leva a dificuldades como se fosse infinito. Esta a razão pela qual Riemann criticou o conceito de Cauchy de integral e inventou outro.

Assim é que as duas definições misteriosas de variação limitada e de integral riemanniana são *entzaubert*, privadas de sua magia autoritária; sua origem pode ser retraçada a certa situação problemática nítida e está

---

pelo primeiro lema. À parte isso, o primeiro contra-exemplo à conjectura de Fourier foi apresentado apenas em 1876 por Du Bois-Reymond, que descobriu uma função contínua que não era expansível fouriermente. (Du Bois-Reymond [1876]).

267 "Apresentar" um conceito no vazio é operação mágica muito freqüente na história escrita em estilo dedutivista!

268 Veja-se Jordan [1881] e Jordan [1893], p. 241. O próprio Jordan acentua que ele não modifica a prova de Dirichlet, mas apenas seu teorema ("... a demonstração de Dirichlet é assim aplicável sem modificação a toda função em que a oscilação seja limitada..."). Zygmund, porem, está enganado quando declara que o teorema de Jordan "é mais geral apenas em aparência" do que o de Dirichlet (Zygmund [1935], p. 25). Isto é verdade quanto à prova de Jordan, mas não quanto a seu teorema. Mas ao mesmo tempo é enganador dizer que Jordan "estendeu" o teorema de Dirichlet ao domínio mais geral de funções com variação limitada (P.e., Szökefalvi-Nagy [1954], p. 272). Também Carslaw mostra semelhante falta de compreensão da análise da prova em sua *Introdução Histórica* em seu [1930]. Ele não observa que a prova de Dirichlet é a prova-mãe do conceito de variação limitada gerado pela prova.

aberta à crítica das soluções anteriores tentadas desse problema. A primeira definição é gerada pela prova, experimentalmente formulada por Dirichlet e finalmente descoberta por C. Jordan, crítico da análise de prova de Dirichlet. A segunda definição provém da crítica de uma definição anterior da integral que veio a ser inaplicável a problemas mais complicados.

Nesse segundo exemplo de exposição heurística, seguimos o modelo popperiano da lógica de conjecturas e refutações. Esse padrão segue a história mais de perto que o padrão hegeliano, que dispensa "tentativa e erro" como realização humana puramente às cegas do desenvolvimento necessário de idéias objetivas. Mas mesmo numa heurística racional do tipo popperiano, temos que diferençar entre problemas que nos propomos resolver e problemas que de fato resolvemos; temos que diferençar entre erros "casuais" que desaparecem e cuja crítica não desempenha qualquer papel no desenvolvimento, e erros "essenciais" que em certo sentido serão resguardados também após refutação e em cuja crítica se baseia o desenvolvimento. Nessa apresentação heurística os erros casuais podem ser omitidos sem prejuízo, e lidar com eles é tarefa da história apenas.

Apenas esboçamos os primeiros quatro passos do processo de prova que levou ao conceito de variação limitada. Aqui, apenas sugerimos o restante da interessante história. A quinta etapa,[269] a procura de novo conceito gerado pela prova em outras provas, imediatamente levou à descoberta de variação limitada na prova da primitiva conjectura de que "todas as curvas são retificáveis".[270] A sétima etapa leva-nos à integral de Lebesgue e à moderna teoria da medida.

Nota histórica: Alguns pormenores interessantes do ponto de vista heurístico podem ser acrescentados à história narrada no texto. Dirichlet estava persuadido de que os contra-exemplos locais aos seus segundo e terceiro lemas *não eram globais;* estava persuadido, p.ex., de que todas as funções contínuas, não importa o número de suas máximas e mínimas, eram fouriermente expansíveis. Esperava também que esse resultado mais geral pudesse ser provado por simples

---

269 Para a lista de fases padrão do método de provas e refutações, cf. pp. 166-8.

270 Nessa descoberta também, du Bois-Reymond foi primeiro ([1879], [1885]), e de novo o admiravelmente penetrante C. Jordan o verdadeiro descobridor (Jordan [1887], pp. 594-8 e [1893], pp. 100-8).

emenda *local* em sua prova. Essa idéia, de que (1) a prova de Dirichlet era apenas parcial e (2) de que a prova final podia ser conseguida por emendas mínimas, foi amplamente aceita de 1829 a 1876, quando du Bois-Reymond deu o *primeiro* contra-exemplo autêntico à velha conjectura de Fourier e com o que desfez as esperanças de tal emenda. O descobrimento por Jordan da variação limitada parece ter sido estimulado por esse contra-exemplo.

É interessante notar que Gauss, também, estimulou Dirichlet a melhorar sua prova de modo que ela pudesse aplicar-se a funções com qualquer número de máximas e mínimas. É curioso que, embora Dirichlet não resolvesse esse problema, nem em 1829 nem em 1837, ainda em 1853 pensasse que a solução devia ser tão óbvia que em sua carta respondendo a Gauss ele a improvisou (Dirichlet [1853]). O cerne de sua solução é este. A condição de que a série de máximas e mínimas não deva ter qualquer ponto de condensação no intervalo considerado, é, de fato condição suficiente para sua prova. E sua *segunda* condição, sobre o número finito de descontinuidades pode ser emendada, como ele declarou já em seu primeiro trabalho em 1829. Ele asseverava ali que sua prova se aplica de fato apenas se a série de descontinuidades não for densa em parte alguma. Essas correções mostram que Dirichlet estava muito preocupado com o problema da análise de sua prova, e estava convencido de que ela se aplica a mais funções do que àquelas que satisfazem suas cautelosas condições, mais tarde chamadas de "condições dirichletianas". É característico que em seu [1837] ele não enuncie absolutamente o teorema. Ele esteve sempre persuadido de que seu teorema valia para todas as funções contínuas como mostra sua carta a Gauss e como ele próprio declarou ao talvez cético Weierstrass. (Cf. *Ostwald's Klassiker der Exakten Wissenshaften*, 186, 1913, p. 125).

Ora, o teorema tal como enunciado por ele em seu [1829] de fato abrange todos os tipos de funções "que ocorrem na natureza". Além disso, análise mais requintada leva já ao reino da análise muito "pura". Acho que a análise da prova de Dirichlet — antes de tudo por Riemann — foi o ponto de partida da análise abstrata moderna e acho exagerada a opinião recentemente muito aceita de P. Jourdain sobre o papel decisivo de Fourier. Fourier não estava interessado em argumentos matemáticos que fossem além da aplicabilidade imediata. O pensamento de Dirichlet era de fato diferente. Ele sentiu vagamente que a análise de sua prova exigia uma nova estrutura conceitual. A última frase de seu [1829] é uma verdadeira profecia:

> "Mas o que há a ser feito com toda a clareza que se deseje, exige alguns pormenores relacionados com os princípios fundamentais do cálculo infinitesimal, que serão apresentados em outra nota..."

Mas ele jamais publicou a prometida nota. Foi Riemann quem, ao criticar o conceito cauchyano de integral, esclareceu esses "pormenores relacionados com os princípios fundamentais do cálculo infinitesimal", e quem, articulando os vagos sentimentos de Dirichlet, e introduzindo uma técnica revolucionária introduziu análise matemática e, de fato, racionalidade no domínio de funções que não ocorrem na natureza e que tinham sido até então consideradas como monstros, ou, no melhor, exceções sem interesse ou "singularidades". (Essa foi a atitude de Dirichlet, expressa em sua [1829] e em sua carta a Gauss [1853]).

Alguns historiadores infalibilistas da matemática empregam no caso a técnica anti-histórica de condensar um longo desenvolvimento pleno de luta e crítica em uma única ação de vislumbre infalível e atribuem a Dirichlet a maturidade dos analistas posteriores. Os historiadores anti-históricos atribuem nosso conceito geral moderno de função real a Dirichet, e correspondentemente designam esse conceito de conceito dirichletiano de função. E. T. Bell afirma em seu [1945], p. 203, que "A definição de P. G. L. Dirichlet de uma função (com valor numérico) de uma variável (real, com valor numérico) como uma tabela, ou correspondência, ou correlação, entre duas séries de números, sugeriu a teoria de equivalência de séries pontuais". Bell dá como referência: "Dirichlet: *Werke*, I, p. 135". Mas nada há parecido com isso no lugar citado. Bourbaki diz: "É sabido que foi nessa ocasião que Dirichlet, tornando precisas as idéias de Fourier, definiu a noção geral de uma função tal como a compreendemos hoje." (Boubarki [1960], p. 247). "É sabido", diz Bourbaki, mas não dá qualquer referência. Achamos que esse conceito de função real "é devido a Dirichlet" na maioria dos manuais clássicos (p.e., Pierpoint [1905], p. 120). Ora, não há tal definição nas obras de Dirichlet, absolutamente. Mas há ampla evidência de que ele não tinha a mínima idéia desse conceito. Em seu [1837], por exemplo, quando ele discute funções contínuas por partes, diz ele que em pontos de descontinuidade a função tem *dois valores:*

> "A curva, cujas coordenadas de x e y são denotadas por β e $\Phi(\beta)$ respectivamente, consiste de várias partes. Em pontos acima do eixo x correspondente a certos valores especiais de β, porções sucessivas da curva são desligadas; e para cada tal coordenada x correspondem de fato 2 coordenadas y, das quais uma pertence à porção que termina no ponto, e a outra pertence à porção que ali começa. No que se segue será preciso distinguir esses dois valores de $\Phi(\beta)$ e os denotaremos por $\Phi(\beta - 0)$ e $\Phi(\beta + 0)$."

Essas citações mostram fora de qualquer dúvida razoável o quanto Dirichlet estava longe do "conceito dirichletiano de função".

Aqueles que associam Dirichlet com a "definição dirichletiana" em geral pensam na função dirichletiana que ocorre na última página de seu [1829]: função que é zero onde x é racional e 1 onde x é irracional. O problema ainda é que Dirichlet insistia em que todas as funções autênticas são de fato fouriermente expansíveis e enxergava essa "função" explicitamente como uma anomalia. De acordo com Dirichlet sua "função" é um exemplo não de uma função real "comum", mas de função que não merece realmente o nome.

É curioso que aqueles que cuidam de noticiar a definição dirichletiana de função, não obstante ela não existir, não notaram os títulos de seus trabalhos, que mencionam a expansão de quaisquer funções 'completamente arbitrárias' *(ganz willkürliche)* nas séries fourierianas. Mas isso significa que — de acordo com Dirichlet — a função dirichletana estava fora dessa família de "funções completamente arbitrárias", que ele considerava como anomalia, porque uma função "comum" tem que ter uma integral e essa obviamente não tinha nenhuma.

Riemann, de fato, criticou o estreito conceito de função de Dirichlet ao criticar o conceito cauchyano de integral junto com sua emenda *ad hoc* por Dirichlet. Riemann mostrou que se ampliarmos o conceito de integral, uma anomalia como uma função que é descontínua para cada número racional da forma $p/2n$ em que p é número ímpar, primo em relação a n, é integrável, embora seja descontínua em qualquer série densa. Por conseguinte, essa função, tão afim da anomalia de Dirichlet, é comum. (Nada havia de arbitrário na ampliação de Riemann do conceito de integral; esse passo revolucionário foi para indagar que espécies de funções são representadas por séries trigonométricas, em vez de indagar que espécie de funções são fouriermente expansíveis. Seu objetivo era expandir o conceito de integral tanto que todas as funções que sejam somas de séries trigonométricas devam ser integráveis e com isso fouriermente expansíveis. Esse é um dos mais belos exemplos de instrumentalismo conceitual).

Talvez o originador da lenda em torno da "definição de função dirichletiana" deva ser identificado aqui. Foi H. Hankel, que ao analisar o desenvolvimento do conceito de função ([1882], pp. 63-112), explicou como os resultados de Fourier romperam o antigo conceito de função; e então, prosseguia ele:

> "Restava apenas, primeiro, retirar a condição de que a função fosse analítica, com base em que tal condição não tem significação, e, em segundo lugar, uma vez eliminada, dar a explicação seguinte. Uma função é chamada y de x se cada valor da variável x dentro de certo intervalo, corresponde ali a um valor definido de y, e isso independentemente de y depender de x de acordo com a mesma lei por todo o intervalo, e se essa dependência possa ser expressa por meio de operações matemáticas. Essa definição puramente nominal eu atribuo a Dirichlet porque jaz na base de seu trabalho sobre as séries fourierianas, que demonstrava a insustentabilidade do antigo conceito...

conjunto

(c) *A definição caratheodórica de ~~seqüência~~ mensurável*

A mudança do enfoque dedutivista para o enfoque heurístico certamente será difícil, mas alguns professores de matemática moderna já compreendem a necessidade dela. Consideremos um exemplo. Nos manuais modernos sobre teoria da medida ou teoria da probabilidade freqüentemente deparamos, a definição caratheodórica de ~~seqüência~~ mensurável: com conjunto σ-anel

sobre

conjunto Seja μ^* uma medida ~~externa~~ de um ~~ele o~~ hereditário H . Um~~a seqüência~~ E em H é μ^* mensurável se, para cada ~~seqüência~~ *A em* H ,

$$\text{conjunto} \quad \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E')$$ [1] exterior ?

271 Halmos [1950], p. 44.

Tal como está, a definição tende a ser perturbadora. Evidentemente, há sempre a saída fácil: os matemáticos definem seus conceitos como lhes apraz. Mas professores sérios não procuram esse fácil refúgio. Nem podem dizer que essa seja a definição *correta*, *verdadeira*, de mensurabilidade e o tirocínio matemático amadurecido também percebe isso. De fato, comumente eles dão uma vaga sugestão de que devemos considerar as conclusões a serem tiradas mais tarde da definição: "As definições são dogmas; só as conclusões tiradas delas podem proporcionar novo vislumbre".[272] Assim, temos que tomar as definições de boa-fé para ver o que acontece. Embora isso tenha um quê de autoritário, pelo menos é sinal de que o problema foi compreendido. É uma desculpa, embora ainda autoritária. Citemos a desculpa de Halmos para a definição caratheodórica: "É um tanto difícil obter uma compreensão intuitiva do significado de mensurabilidade μ^* a não ser mediante familiaridade com suas implicações, que nos propomos desenvolver a seguir."[273] E então prossegue ele:

insight

> "O seguinte comentário, porém, pode ser valioso. Medida externa não é necessariamente função ~~seqüencial~~ de conjunto aditiva contavelmente, nem mesmo finitamente. Numa tentativa de satisfazer exigência razoável de aditividade, distinguimos aquel~~as~~es ~~seqüências~~ conjuntos que dividem cada outr~~a~~o ~~seqüência~~ conjunto aditivamente — a definição de mensurabilidade μ^* é a formulação rigorosa dessa descrição um tanto indiscriminada. A maior justificação desse conceito aparentemente complicado é, contudo, seu sucesso, talvez surpreendente, mas absolutamente completo como instrumento ao provar o importante e valioso teorema de extensão do § 13."[274]

Ora, a primeira parte, "intuitiva" dessa justificação é um tanto desorientadora, porque, como ficamos sabendo pela segunda parte, trata-se de um conceito gerado pela prova do teorema de Carathéodory sobre a extensão de medidas (que Halmos apresenta apenas no capítulo seguinte). Assim, se é intuitivo ou não, não tem interesse absolutamente algum: sua base reside não em sua intuitividade, mas em sua prova-mãe. Nunca se deve destacar

[272] K. Menger [1928], p. 76, citado com aprovação ~~de~~ por K. R. Popper em seu [1959], p. 55.

[273] Halmos [1950], p. 44.

~~274 Loève [1955], p. 87.~~

274 Ibidem

a definição gerada pela prova de sua prova-mãe e a apresentá-la em seções ou mesmo capítulos antes da prova à qual ela é secundária do ponto de vista heurístico.

M. Loeve, em seu [1955], apresenta a definição muito adequadamente em sua seção sobre a extensão de medidas, como noção necessária no teorema de extensão: "Precisaremos de várias noções que reunimos aqui."[275] Mas que mortal saberá que instrumentos complicadíssimos como esse serão necessários para a operação? Certamente, ele já tem alguma idéia de que achará e como procederá. Mas por que, então, esse porte místico de pôr a definição antes da prova?

Pode-se facilmente acrescentar mais exemplos em que enunciando a conjectura primitiva, mostrando a prova, os contra-exemplos, e seguindo a ordem heurística até o teorema e a definição gerada pela prova, dissiparíamos o misticismo autoritário da matemática abstrata e atuaríamos como freio à degenração. Uns poucos estudos de caso dessa degenração fariam muito bem à matemática. Infelizmente, o estilo dedutivista e a atomização do conhecimento matemático protegem ensaios "degenerados" em considerável medida.

e e

275 ~~Ibidem.~~ Loeve [1955], p. 87

BIBLIOGRAFIA

(Revista e ampliada por Gregory Currie)

Abel, N.H. [1825] "Letter to Holmboë", *in* S. Lie e L. Sylow (orgs.): *Oeuvres Complètes,* vol. 2. Christiania: Grondhal, 1881, pp. 257-8.

Abel, N.H. [1826*b*] "Letter to Hansteen", *ibid.,* p. 263-5.

Abel, N.H. [1826*b*] "Untersuchngen über die Reihe

$$1 + \frac{m}{1} X + \frac{m.(m-1)}{2} X^2 + $$
$$+ \frac{m.(m-1)(m-2)}{2.3} X^3 \ldots",$$

Journal für die Reine Angewande Mathematik, Ií pp. 311-39.

Abel, N. H. [1881] "Sur les Séries", *in* S. Lie e L. Sylow (orgs.): *Oeuvres Complètes,* vol. 2. Christiana: Grondhal, pp. 197-205.

Aécio [c. 150] *Placita, in* H. Diels (org.): *Doxographi Graeci.* Perolini Reimeri, 1879.

Aleksandrov, A. D. [1956] "A General View of Mathematics", *in* A.D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov e M. A. Lacrent'ev (orgs.): *Mathematics: its Content, Methods and Meaning* (Trad. inglesa de S. H. Gould, K. A. Hirsch e T. Bartha Cambridge, Massachusets: M.I.I. Press, 1963).

Ambrose, A. [1959] "Proof and the Theorem Proved", *Mind,* 68, pp. 435-45.

Arber, A. [1954] *The Mind and the Eye.* Cambridge: Cambridge University Press.

✓Arnauld, A. e Nicole, P. [1724] *La Logique, ou L'Art de Penser,* Lille: Publications de la Faculté des Lettres et Sciences Humaines de l'Université de Lille, 1964.

Bacon, F. [1620] *Novum Organum,* trad. inglesa *in* R. L. Ellis e J. Spedding (orgs.): *The Philosophical Works of Francis Bacon,* Londres, Routledge, 1905, pp. 241-387.

Baltzer, R. [1862] *Die Elemente der Mathematik,* vol. 2, Leipzig: Hirzel.

Bartley, W. W. [1962] *Retreat to Commitment,* Nova York: Alfred A. Knopf.

Becker, J. C. [1869*a*] "Uber Polyeder", *Zeitschrift für Mathematik und Physik,* 14, pp. 65-76.

Becker, J. C. [1869*b*] "Nachtrag zu dem Aufsätze über Polyeder", idem, pp. 337-343.

Becker, J. C. [1874] "Neuer Beweis und Erweiterung eines Fundamentalsatzes über Polyederflächen", idem, 19, pp. 459-60.

Bell, E. T. [1945] *The Development of Mathematics.* Seg. ed., Nova York: McGraw-Hill.

Bérard, J. B. [1818-19] "Sur le Nombre des Racines Imaginaires des Équations; en Réponse aux Articles de MM. Tédenat et Servois", *Annales de Mathématiques, Pures et Appliqués,* 9, pp. 345-72.

Bernays, P. [1947] Review of Pólya [1945], *Dialectica* I. pp. 178-88.

Bolzano, B. [1837] *Wissenschaftslehre,* Leipzig: Meiner, 1914-31.

Bourbaki, N. [1949] *Topologie Général.* Paris; Hermann.

Bourbaki, N. [1960] *Éléments d'Histoire des Mathématiques.* Paris: Hermann.

Boyer, C. [1939] *The Concepts of the Calculus.* Nova York: Dover, 1949.

Braithwaite, R. B. [1953] *Scientific Explanation.* Cambridge: Cambridge University Press.

Brouwer, L. E. J. [1952] "Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism", *South African Journal of Science,* 49, pp. 139-46.

Carnap, R. [1937] *The Logical Syntax of Language.* Nova York e Londres: Kegan Paul. (Tradução revista de *Logische Syntax der Sprache,* Viena: Springer, 1934).

Carslaw, H. S. [1930] *Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals,* 3a. ed. Nova York: Dover, 1950.

Cauchy, A. L. [1813*a*] "Recherches sur les Polyèdres", *Journal de l'École Polytéchnique,* 9, pp. 68-86 (Lida em Fevereiro de 1811).

Cauchy, A. L. [1813*b*] "Sur les Polygones et les Polyèdres", idem, idem, pp. 87-98 (Lida em janeiro de 1812).

Cauchy, A. L. [1821] *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*. Paris: de Bure.

Cauchy, A. L. [1826] "Mémoire sur les Développements des Functions en Séries Périodiques", *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 6, pp. 603-12.

Cauchy, A. L. [1853] "Note sur les Séries Convergents dont Divers Terms sont des Fonctions Continues d'une Variable *Rendus Hebdomadaires des Séances da l'Académie des Sciences*, 37, pp. 454-9.

Cayley, A. [1859] "On Poinsot's Four New Regular Solids", *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 4a. Série, 17, pp. 123-8.

Cayley. A. [1861] "On the Partitions of a Closse", *ibid*. 21 pp. 424-8.

Church, A. [1956] *Introduction to Mathematical Logic*, Vol. 1. Princeton: Princeton University Press.

Clairaut, A. C. [1741] *Éléments de Gémetrie*. Paris: Gauthier-Villars.

Copi, I. M. [1949] "Modern Logic and the Synthetic A Priori", *The Journal of Philosophy*, 46, pp. 243-5.

Copi, I. M. [1950] "Gödel and the Synthetic A Priori: a Rejoinder", idem, 47, pp. 633-6.

Crelle, A. L. [1826-7] *Lehrbuch der Elemente der Geometrie*, vols. 1 e 2, Berlin: Reimer.

Curry, H. B. [1951] *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*. Amsterdam: North Holland.

Darboux, G. [1874*a*] "Lettre à Houel, 12 Janvier". (Citado *in* F. Rortand: *Souci d'Exactitude et Scrupules des Mathématiciens*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin. 1960, p. II).

Darboux, G. [1874*b*] "Lettre à Houel, 19 Fécrier" (Citado *in* F. Rostrand, *ibid*., p. 194.

Darboux, G. [1875] "Mémoire sur les Fonctions Discontinues", *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 2a. série, 4, pp. 57-112.

Darboux, G. [1883] "Lettre à Houel, 2 Septembre" (Citada *in* F. Rostand, *ibid*., Paris. Librairie Philosophique J. Vrin, 1960, p. 261).

Denjoy, A. [1919] "L'Orientation Actuelle des Mathématiques", *Revue du Mois*, 20, pp. 18-28.

Descartes, R. [1628] *Rules for the Direction of the Mind*. Trad. inglesa *in* E. S. Haldane e G.R.T. Ross (orgs.), *Descartes' Philosophical Works*, vol. I, Cambridge University Press, 1911.

Descartes, R. [1639] *De Solidorum Elementis* (Publicado pela primeira vez *in* Foucher de Careil: *Oeuvres Inédites de Descartes,* vol. 2, Paris: August Durant, 1860, pp. 214-34. Para um texto consideravelmente melhorado, veja-se C. Adam e P. Tannery (eds.): *Oeuvres de Descartes,* vol. 10, pp. 257-78, Paris: Cerf, 1908).

Dieudonné, J. [1939] "Les Méthodes Axiomatiques Modernes et les Fondements des Mathématiques", *Revue Scientifique, 77,* pp .224-32.

Diógenes Laércio [c.200] *Vitae Philosophorum,* (Com tradução inglesa por R. D. Hicks, Vol. 2, Londres: Heinemann, 1925.

Dirichlet, P. L. [1829] "Sur la Convergence des Séries Trigonométriques que servent à réprésenter une Fonction Arbritreire entre des Limites Donnés", *Journal für die Reine und Angewandete Mathematik,* 4, pp. 157-69.

Dirichlet, P. L. [1837] "Über die Darstellung Ganz Willkürlicher Functionen durch Sinus-und Cosnusreihen", *in* H. W. Dove e L. Moser (orgs.): *Repertorium der Physik,* I, pp. 152-74.'

Dirichlet, P. L. [1853] "Carta a Gauss, 20 de fevereiro de 1853", *in* L. Kronecker (org.): *Werke,* vol. 2, pp. 385-7. Berlim: Reiner, 1897.

du Bois-Reymond, P.D.G. (1875) "Beweis, das die Coeffieienten der Trigonometrischen Reihe $f(x) = \sum_{p=0}^{p=\infty} (a_p \cos px + b_p \sin px)$ die werte

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha), \; a_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \cos p\alpha,$$

$$b_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \sin p\alpha$$

haben, jedesmal wenn diese Integrale Endlich und Bestimmt sind", *Abhandlungen der Königlich-Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Physikalischen Classe,* 12, I, pp. 117-166.

du Bois-Reymond, P.D.G. [1876] "Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsfomeln", idem, p. 2, pp. i-xxiv e 1-102.

du Bois-Reymond, P. D. G. [1879] "Erläuterungen zu den Anfangspründen der Variationrechnung", *Mathematische Annalen,* 15, pp. 282-315, 564-74.

du Bois-Reymond, P. D. G. [1885] "Über den Begriff der Länge einer Curve", *Acta Mathematica,* 6, pp. 167-8.

Dyck, W. [1888] "Beiträge zur Analysis Situs", *Mathematische Annalen,* 32, pp. 457-512.

Einstein, A. [1953] "Letter to P. A. Schilp". Publicada em P. A. Schilpp: "The Abdication of Philosophy", *Kant Studien*, 51, pp. 490-1, 1959-60.

Euler, L. [1756-7] "Specimen de usu Observationun in Mathesi Pura", *Novi Comentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, 6, pp. -85-230. Sumário Editorial, pp. 19-21.

Euler, L. [1758*a*] "Elementa Doctrinae Solidorum", idem, 4, pp. 109-40. Lida em novembro de 1750).

Euler, L. [1758*b*] "Demonstratio Nonnullarum Insignium Proprietatus Quibus Solida Hedris Planis Inclusa sunt Praedita", idem, 4, pp. 140-60. Lida em setembro de 1751).

Eves, H. e Newson, C. V. [1958] *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*. Nova York: Rinehart.

Félix, L. [1957] *L'aspect Moderne des Mathématiques* (Trad. inglesa de J. H. Hlavaty e F. H. Hlavaty: *The Modern Aspect of Mathemtics*, Nova York: Basic Books, 1960).

Forder, H. G. [1927] *The Foundations of Euclidean Geometry*, Nova York: Dover, 1958.

Fourier, J. [1808] "Mémoire sur la propagation de la Chaleur dans les Corps solides (Extrait)", *Nouveau Bulletin des Sciences, par la Société Philomathique de Paris*, I, pp. 112-6.

Fréchet, M. [1928] *Les Éspaces abstraits*. Paris: Gauthier-Villars.

Fréchet, M. [1938] "L'Analyse Générale et la Question des Fondements" em F. Gonseth (org.): *Les Entretiens de Zürich, sur les Fondements et la Méthode des Sciences Mathémátiques*, Zurique: Leemans Frères et Cie., 1941, pp. 53-73.

Frege, G. [1893] *Grundgesetzse der Arithmetik, vol. I, Hildesheims* George Ilms, 1962.

Gamow, G. [1953] *One, Two, Three ... Infinity*. Nova York: The Viking Press.

Gauss, C. F. [1813] "Disquisitiones Generales Circa Serien Infinitam

$$1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}.x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x.x+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}.x^3+\text{ etc.'},$$

in Werke, vol. 3, pp. 123-62. Leipzig: Teubner.

Gergonne, J. D. [1818] "Essai sur la Théorie des Definitions", *Annales de Mathématiques, Pures et Appliquées*, 9, pp. 1-35.

Goldschmidt, R. [1933] "Some Aspects of Evolution", *Science*, 78, pp. 539-47.

Grunert, J. A. [1827] "Einfacher Beweis der von Cauchy und Euler Gefundnen Sätze von Figurennetzen und Polyedern", *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik,* 2, p. 367.

Halmos, P. [1950] *Measure Theory* Nova York e Londres: Van Nostrano Reinhold.

Hankel, H. [1882] "Untersuchungen über die Unendlich oft Oscillierenden und Unstetigen Functionen", *Mathematische Annalen,* 20, pp. 63-112.

Hardy, G. H. [1918] "Sir George Stokes and the Concept of Uniform Convergence", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* 19, pp. 148-56.

Hardy, G. H. [1928] "Mathematical Proof", *Mind,* 38, pp. 1-25.

Haussner, R. (ed.) [1906] *Abhandlungen über die Regelmassigen Sternkörper.* Ostwald's Klassiker der Exacten Rissenshaften, N.º 151, Leipzig: Engelmann.

Heath, T. L. [1925] *The Thirteen Books of Euclid's Elements,* 2a. ed., Cambridge, Cambridge University Press.

Hempel, C. G. [1945] "Studies in the Logic of Confirmation, 1 e 2", *Mind,* 54. pp. 1-264 97-121.

Hermite, C. [1893] "Carta a Stietjes, 20 de maio de 1893", *in* B. Bailaud e H. Bourget (orgs.): *Correspondence d'Hermite et de Stietjes,* 2, pp. 317-19. Paris: Gauthiers-Villars, 1905.

Hessel, J. F. [1832] "Nachtrag zu dem Euler'schen Lehrbatze von Poliydren", *Journal für die Reine und Angewandre Mathematik,* 8, pp. 13-20.

Heyting, A. [1939] "Les Fondements des Mathématiques du Point de Vue Intuitioniste", *in* F. Gonseth: *Philosophie Mathématique,* Paris: Hermann, pp. 73-5.

Heyting, A. [1956] *Intuitionism: An Introduction.* Amsterdam: North Holland.

Hilbert, D. e Cohn-Vossen, S. [1932] *Anschauliche Geometrie.* Berlim: Springer. Trad. inglesa de P. Nemenyi: *Geometry and the Imagination.* Nova York: Chelsea (1956).

Hobbes, T. [1651] *Leviathan, in* W. Molesworth (org.): *The English Works of Thomas Hobbes,* vol. 3. Londres: John Bohn, 1839.

Hobbes, T. [1656] *The Questions Concerning Liberty, Necessity and Chance, in ibid.,* vol. 5, idem, 1841.

Hölder, O. [1924]*Die Mathematische Methode.* Berlim: Springer.

Hoppe, R. [1879] "Ergänzung des Eulerschen Satzes von den Polyedern", *Archiv der Mathematik und Physik,* 63, pp. 100-3.

Husserl, E. [1900] *Logische Untersuchugen,* vol. 1. Tubingen: Nieheyer, 1968.

Jonquières, E. de [1890*a*] "Note sur un Point Fondamental de la Théorie des Polièdres", *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences,* 110, pp. 110-15.

Jonquières, E. de [1890*b*] "Note sur le Théorème d'Euler dans la Théorie des Polièdres", idem, 110, pp. 169-73.

Jordan, C. [1866*a*] "Recherches sur les Polyèdres, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik,* 66, pp. 22-85.

Jordan, C. [1866*b*] "Résumé de Recherches sur la Symétrie des Polyèdres non Eulériens", *ibid.,* pp. 86-91.

Jordan, C. [1881] "Sur la Série de Fourier", *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences,* 92, pp. 228-33.

Jordan, C. [1887] *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique,* vol. 1, 2a. ed. Paris: Gauthier-Villars.

Jourdain, P. E. B. [1912] "Note on Fourier's Influence on the Conceptions of Mathematics", *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematics,* 2, pp. 526-7.

Kant, I. [1781] *Crítica da Razão Pura,* Primeira Edição.

Kepler, I. [1619] *Harmonic Mundi, in* M. Caspar e W. von Dyck (orgs.): *Gesammelte Werke,* vol. 6, Munich: C. H. Beck, 1940.

Knopp, K. [1928] *Theory and Application of Infinite Series* (Trad. de R. C. Young, Londres e Glasgow: Blackie, 1928).

Lakatos, I. [1961] *Essays in the Logic of Mathematical Discovery,* Dissertação de doutorado, inédita, Cambridge.

Lakatos, I. [1962] "Infinite Regress and the Foundations of Mathematics", *Aristotelian Society Supplementary Volumes,* 36, pp. 155-84.

Lakatos, I. [1970] "Falsification and the Methodology of Scientific Research Programmes", *in* I. Lakatos e A. E. Musgrave (orgs.): *Criticism and the Growth of Knowledge,* Cambridge: Cambridge University Press, pp. 91-196.

Landau, E. [1930] *Grundlagen der Analysis,* Leipzig: Akademische Verlags-gesellschaft.

Lebesgue, H. [1923] "Notice sur la Vie et les Travaux de Camille Jordan", *Mémoires de l'Académie de l'Institute de France,* 58, pp. 34-66. Reimpresso *in* H. Lebesgue, *Notices d'Histoire des Mathématiques,* Genebra, pp. 40-65.

Lebesgue, H. [1928] *Leçons sur l'Intégration et la Recherche des Fonctions Primitives.* Paris. Gauthier-Vilars (Segunda edição, ampliada do original de 1905).

Legendre, A. M. [1809] *Éléments de Géométrie.* 8a. ed. Paris: Didot. A primeira edição apareceu em 1794.

Leibniz, G. W. F [1687] "Carta a Bayle", *in* C. I. Gerhardt (org.): *Philosophische Schriften,* vol. 3. Hildesheim: George Olms (1965) p. 52.

Lhulier, S. A. J. [1786] *Exposition Élémentaire des Principes des Calculs Supérieurs*. Berlim: G. J. Decker.

Lhulier, S. A. J. [1812-13*a*] "Mémoire sur la Polyèdrométrie", *Annales de Mathématiques, Pures et Appliquées,* 3, pp. 168-91.

Lhulier, S. A. J. [1812-13*b*] "Mémoire sur les Solides Réguliers", *Annales de Mathématiques,* Pures et Appliquées, 3, pp. 233-7.

Listing, J. B. [1861] "Der Census Räumlicher Complexe", *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenshaften zu Göttingen,* 10, pp. 97-182.

Loeve, M. [1955] *Probability Theory*. Nova York: Van Nostrand.

Matthiessen, L. [1863] "Über die Scheinbaren Einschränkungen des Euler'schen Stazes von den Polyedern", *Zeitschrift für Mathematik und Physik,* 8, pp. 449-50.

Meister, A. L. F. [1771] "Generalia de Genesi Figurarum Planarum et inde Pendentibus Earum Affectionibus", *Novi Commentarii Societatis Reglae Scientiarum Gottingensis,* I, pp. 144-80.

Menger, K. [1928] *Dimensionstheorie*. Berlim: Teubner.

Möbius, A. F. [1865] "Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders", *Berichte Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaten, Mathematisch-Physikalische Classe, 17,* pp. 31-68.

Moigno, F. N. M. [1840-1] *Leçons de Calcul Differentiel et de Calcul Intégral,* 2 vols. Paris: Bachelier.

Moore, E. H. [1902] "On the Foundations of Mathematics", *Science,* 17, pp. 409-16.

Morgan, A. de [1842] *The Differential and Integral Calculus,* Londres: Baldwin e Gadock.

Munroe, M. E. [1953] *Introduction to Measure and Integration,* Cambridge, Massachusets: Addison-Wesleiy.

Neumann, J. Von [1947] "The Mathematician", *in* Heuwood R. R. (org.): *The Works of the Mind*. Chicago: Chicago University Press.

Newton, I. [1717] *Optiks*. 2a. ed., Londres: Dover, 1952.

Olivier, L. [1826] "Bemerkungen über Figuren, die aus Behebigen, von Geraden Linien Umschbssenen Figuren Zusammengesetzt sind", *Journal für die Reine und Angewandt Mathematik,* I, pp. 227-31.

Pascal, B. [1659] *Les Réflexions sur la Géométrie en Géneral (De l'Ésprit Géométrique et de l'Art de Persuader)*, *in* J. Chevalier (org.): *Oeuvres Complètes,* Paris: La Librairie Gallimard, 1954, pp. 575-604.

Peano, G. [1894] *Notations de Logique Mathématique.* Turin: Guadagnini.

Pierpont, J. [1905] *The Theory of Functions of Real Variables,* vol. 1, Nova York: Dover, 1959.

Poincaré, H. [1893] "Sur la Généralisation d'un Théorème D'Euler relatif aux Polyèdres", *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences,* 117, p. 114.

Poincaré, H. [1899] "Complément à l'Analysis Situs", *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo,* 13, pp. 285-343.

Poincaré, H. [1902] *La Science et l'Hypothèse.* Paris: Flammarion. Tradução inglesa autorizada por G. B. Halsted: *The Foundations of Science,* Lancaster, Pensilvânia: The Science Press, 1913, pp. 27-197.

Poincaré, H. [1905] *La Valeur de la Science,* Paris: idem, idem, p. 359-546.

Poincaré, H. [1908] *Science et Méthode.* Paris: Flammarion, idem, idem, pp. 546-854.

Poinsot, L. [1810] "Mémoires sur les Polygones et les Polyèdres", *Journal de l'École Polytéchnique,* 4, pp. 16-48, lida em julho de 1809.

Poinsot, L. [1858] "Note sur la théorie des Polyèdres", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences,* 46, pp. 65-79.

Pólya, G. [1945] *How to Solve It.* Princeton: Princeton University Press.

Pólya, G. [1954] *Mathematics and Plausible Reasoning,* vols. 1 e 2. Londres: Oxford University Press.

Pólya, G. [1962*a*] *Mathematical Discovery,* I, Nova York: Wiley.

Pólya, G. [1962*b*] "The Teaching of Mathematics and the Biogenetic Law", *in* I. J. Good (org.): *The Scientist Speculates.* Londres: Heinemann, pp. 352-6.

Pólya, G. e Szegö, G. [1927] *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis,* Vol. I, Berlim: Springer.

Popper, K. R. [1934] *Logik der Forschung,* Viena: Springer.

Popper, K. R. [1935] "Carta ao Editor", *Erkeenntnis,* 3, pp. 426-9. Republicado em Apêndice a Popper [1959], pp. 211-14.

Popper, K. R. [1945] *The Open Society and its Enemies,* 2 vols, Londres. Routledge e Kegan Paul.

Popper, K. R. [1947] "Logic without Assumptions", *Aristotelian Society Proceedings,* 47, pp. 251-92.

Popper, K. R. [1952] "The Nature of Philosophical Problems and their Roots in Science", *The British Journal for the Philosophy of Science,* 3, pp. 124-56. Reimpresso *in* Popper [1963*a*].

Popper, K. R. [1957] *The Poverty of Historicism.* Londres: Routledge e Kegan Paul.

Popper, K. R. [1959] *The Logic of Scientific Discovery,* Trad. inglesa de [1934]. Londres: Hutchinson.

Popper, K. R. [1963*a*] *Conjectures and Refutations.* Londres: Routledge e Kegan Paul.

Popper, K. R. [1963*b*] "Science: Problems, Aims, Responsabilities", *Federation of American Societies for Experimental Biology:* Federation Proceedings, 22, pp. 961-72.

Popper, K. R. [1972] *Objective Knowledge.* Oxford University Press.

Pringsheim, A. [1916] "Grundlagen der Allgemeinen Functionenlehre", *in* M. Burkhardt, W. Wuntinger e R. Fricke (orgs.): *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften,* vol. 2. Erste Teil, Erste Halbband, pp. 153. Leipzig: Teubner.

Quine, W. V. O. [1951] *Mathematical Logic.* Edição revista. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Ramsey, F. P. [1931] *The Foundations of Mathematics and Other Essays.* Org. por R. B. Braithwaite. Londres: Kegan Paul.

Raschig, L. [1891] "Zum Elerschen Theorem der Polyedrometrie", *Festscchrift des Gymnasium Scheeberg.*

Reichardt, H. [1941] "Losung der Augabe 274", *Jarjresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,* 51, p. 23.

Reichenbach, H. [1947] *Elements of Symbolic Logic.* Nova York: MacMillan.

Reiff, R. [1889] *Geschichte der Unendlichen Reihen.* Tubinuga: H. Laupp'schen.

Reinhardt, C. [1885] "Zu Möbius Polyedertheorie. Vorgelegt von F. Elein", *Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sachsischen Gesellschaft der Wissenschafeten zu Leipzig,* 37, pp. 106-25.

Riemann, B. [1851] *Grundlagen der eine Allgemeine Theorie der Functionen einer Veranderlichten Complexen Grösse* (Dissertação Inaugural) *in* M. Weber e R. Dedekind (orgs.): *Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass.* 2a. ed., Leipzig: Teubner, 1892, pp. 3-48.

Riemann, B. [1868] "Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine Trigonometrische Reihe", *Abhandlungen der*

Königlichen Gesellschaft der Wisstenschaften zu Göttingen, 13, pp. 87-732.

tod. ✓ Robinson, R. [1936] "Analysis in Greek Geometry", *Mind,* 45, pp. 464-73.

Robinson, R. [1953]*Plato's Earlier Dialectic.* Oxford: Oxford University Press.

Rudin. W. [1953] *Principles of Mathematical Analysis,* 1a. ed., Nova Yirk: McGraw-Hill.

Russell, B. [1901] "Recent Work in the Philosophy of Mathematics", *The International Monthly,* 3. Reimpresso como "Mathematics and the Metaphysicians", *in* seu [1918], pp. 59-74.

Russell, B. [1903] *Principles of Mathematics.* Londres: Alen & Unwin.

Russell, B. [1918] *Mysticism and Logic.* Londres: Allen & Unwin*.

Russell, B. [1959] *My Philosophical Development.* Londres: Allen Unwin.

Russell, B. e Whitehead, A. N. [1910-13] *Principia Mathematica,* vol. 1, 191O; vol. 2, 1912; vol. 3, 1913. Cambridge University Press.

Saks, S. [1933] *Théorie de l'Intégrale.* Trad. inglesa de L. C. Young: *Theory of the Integral.* 2a. ed., Nova York: Hafner, 1937.

Schafli, L. [1852] "Theorie der Vielfachen Kontinuität". Publicação póstuma em *Neue Denkschriften der Allgemeinen Schweizerrischen Gesellschaft für die Gesamenten Naturwissenschaften,* 38, pp. 1-237. Zurique, 1901.

Schröder, E. [1862] "Über die Vielecke von Debrochener Seitenzahl oder die Bedeutung der Stern-Polygone in der Geometrie", *Zeitschrift für Mathematik und Physik,* 7, pp. 55-64.

Seidel, P. L. [1847] "Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche Discontinuirliche Funktionen Darstionen Darstellen", *Abhandlungen der Mathematisch-Physikalischen Klasse der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften,* 5, pp. 381-93.

Sextus Empíricus [c. 190] *Against the Logicians.* Texto grego com tradução inglesa por R. G. Bury, Londres: Heinemann, 1933.

Sommerville, D. M. Y. [1929] *An Introduction to the Geometry of N-Dimensions,* Londres: Dover, 1958.

* Publicado no Brasil por Zahar Editores sob o título *Misticismo e Lógica.*

Steiner, J. [1826] "Leichter Beweis eines Stereotrischen Satzer von Euler", *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, I, pp. 364-7.

Steinhaus, H. [1960] *Mathematical Snapshots.* Edição revista e ampliada. Nova York: Oxford University Press.

Steinitz, E. [1914-31] "Polyeder und Raumeiteilnngen", *in* W. F. Meyer e H. Mohrmann (orgs.): *Encyclopädie der Mathematischen Wissenshaften,* vol. 3, AB. 12. Leipzig: Teubner.

Stokes, G. [1848] "On the Critical Values of the Sums of Periodic Series", *Transactions of the Cambridge Philosophical Society,* 8, pp. 533-83.

Szabó. À [1958] "Deiknymi" als Mathematischer Terminus fur 'Beweisen'", *Maia,* N. S. 10, pp. 1-26.

Szabó, À [1960] "Anfänge des Euklidischen Axiomensystems", *Archiv for the History of Exact Sciences,* I, pp. 37-106.

Szökefalvi-Nagy, B. [1954] *Valós Függvénvsorok.* Budapeste. Tankönyvkiadó.

Tarski, A. [1930*a*] "Über einige Fundamentale Begriffe der Metamathematik", *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie,* 23, Cl. III, pp. 22-9. Publicado em inglês em H. J. Woodger (org.) [1956], pp. 30-7.

Tarski, A. [1930*b*] "Fundamentale Begriffe der Methodologie der Deduktiven Wissenschaften, I", *Monatshefte für Mathematik und Physik,* 37, pp. 361-404. Publicado em inglês *in* J. H. Woodger (org.) |1956|, pp. 60-109.

Tarski, A. [1935] "On the Concept of Logical Consequence". Publicado em J. H. Woodger (org.) |1956|, pp. 409-20. Esse ensaio foi lido em Paris em 1935.

Tarski, A. [1941] *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences.* 2a. ed., Nova York: Oxford University Press, 1946 (Trata-se de uma versão parcialmente modificada e ampliada de *On Mathematical Logic and Deductive Method,* publicado em polonês em 1936 e em tradução alemã em 1937).

Turquette, A. [1950] "Gödel and the Synthetic A Priori", *The Journal of Philosophy,* 47, pp. 125-9.

Waerden, B. L. van der [1941] "Topologie une Uniformisierung der Riemannschen Flachen",, *Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sachsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig,* 93, pp. 147-60.

Whewell, W. [1858] *History of Scientific Ideas.* Vol. 1 (Parte I da terceira edição de *The Philosophy of the Inductive Sciences*).

Wilder, R. L. [1944] "The Nature of Mathematical Proof", *The American Mathematical Monthly,* 52, pp. 309-23.

Woodger, J. M. (org.) [1956] *Logic, Semantics, Metamathematics.* Oxford: Clarendon Press.

Young, W. H. [1903-4] "On Non-Uniform Convergence and Term-by-Term Integration of Series", *Proceedings of the London Mathematical Society,* I, 2a. série, pp. 89-102.

Zacharias, M. [1914-21] "Elementargeometrie", em W. F. Meyer e H. Mohrmann (orgs): *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften,* 3, Erste Teil, Zweiter Halbband, pp. 862-1.176. Leipzig: Teubner.

Zygmund, A. [1935] *Trigonometrical Series.* Nova York: Chelsea, 1952.

COMPOSTO E IMPRESSO POR TAVARES & TRISTÃO — GRÁFICA E EDITORA DE LIVROS LTDA., À RUA 20 DE ABRIL, 28, SALA 1.108, RIO DE JANEIRO, R.J., PARA

ZAHAR EDITORES

INTRODUÇÃO À FILOSOFIA MATEMÁTICA

Bertrand Russell (3.ª edição)

Nesta obra, em que todos os problemas técnicos são apresentados de forma a não se constituírem em dificuldades para o leitor, a matemática se eleva ao nível de verdadeiro alfabeto de toda a filosofia. Sob esse aspecto, Russell desenvolve reflexões que restauram a sentença de Leibniz de que os matemáticos têm tanta necessidade de ser filósofos, quanto estes de serem matemáticos. Isto porque, como diz o próprio Russell a matemática, quando bem compreendida, revela não só a verdade, como também nos conduz à suprema beleza. Bertrand Russell não foi um sábio do saber feito, mas do saber que se está fazendo às nossas vistas. Este livro é um convite ao ingresso no universo em construção do saber, nesta fase da vida moderna que, como acentua Paul Montel, está impregnada de matemática.

FILOSOFIA DA MATEMÁTICA

Stephen F. Barker (2.ª edição)

Por que Filosofia da Matemática? A razão deve ser encontrada no fato de que, embora muitas noções consideradas nesse tipo de investigação — *número, classe, ordem, continuidade, infinito,* sobre as quais o Prof. Barker discorre de maneira pertinente — terem sido tradicionalmente examinadas por filósofos sem muito êxito, resultados interessantes podem ser obtidos quando os métodos especulativos são substituídos pelos métodos mais precisos e refinados dos matemáticos e lógicos.

HEURÍSTICA
A. Ciência do Pensamento Criador

V. N. Puchkin (2.ª edição)

Valendo-se, legitimamente, dos campos de atuação próprios da matemática e da cibernética, o autor precisa a necessidade de interligação entre os processos heurísticos — de descobertas e de inventividades criadoras — e esses poderosos auxiliares do homem moderno na formulação de parâmetros para a definitiva configuração da ciência que evolui. Os problemas modernos, apesar dos grandes avanços conseguidos pelos cientistas e pelos homens de pensamento neste século, agigantam-se e passam a constituir um permanente desafio de sobrevivência de toda a humanidade, em termos de crescentes necessidades de produção e distribuição de bens e serviços. A intervenção da ciência heurística é, neste passo, decisiva: ela prenuncia o futuro, pela capacidade de enfrentar a solução ideada e concreta desses mesmos problemas.

ZAHAR EDITORES

A cultura a serviço do progresso social