

6. SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM

6.1 - Introdução

Como já foi visto nos exemplos dos capítulos anteriores, é possível obter-se funções transferência e programas de blocos análogos para os diferentes tipos de elementos e sistemas. Essa analogia irá se refletir também em seu comportamento. Desta forma o estudo da resposta dos sistemas, isto é, a obtenção da solução da equação diferencial que o descreve, é grandemente simplificado, uma vez que o conhecimento das características de uma dada classe de sistemas se aplica a qualquer sistema desta classe, independentemente de sua natureza física.

Dois tipos ou classes de sistemas são de fundamental importância: os sistemas de primeira e segunda ordem. Muitos dispositivos práticos são encontrados nestas duas classes; e mais, sistemas complexos podem ser descritos como combinação destes dois tipos de sistemas.

6.2 - Forma Generalizada de Sistemas de Primeira Ordem

$$a_1 \frac{dx_2}{dt} + a_2 x_2 = b_2 x_1$$

Um sistema de primeira ordem genérico, com entrada q_i e saída q_o é aquele com a seguinte equação diferencial:

$$a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_o q_o = b_o q_i \quad (6.1)$$

Embora (6.1) possua 3 parâmetros a_1 , a_o e b_o , na verdade apenas dois são necessários, uma vez que pode-se dividir a equação por a_1 , a_o ou b_o , fazendo o coeficiente de um dos termos igual a um.

O procedimento usual é dividir por a_o , obtendo:

$$\frac{a_1}{a_o} \frac{dq_o}{dt} + q_o = \frac{b_o}{a_o} q_i \Rightarrow \tau \frac{dq_o}{dt} + q_o = K q_i \quad (6.2)$$

que se torna:

$$(\tau D + 1)q_o = Kq_i \quad (6.3)$$

quando definimos:

$$K \triangleq \frac{b_o}{a_o} \triangleq \text{sensibilidade estática} = \text{ganho} \left\{ \begin{array}{l} \text{unidade} = \frac{[\text{saída}]}{[\text{entrada}]} \end{array} \right.$$
$$\tau \triangleq \frac{a_1}{a_o} \triangleq \text{constante de tempo (unidade de segundos)}$$

A constante de tempo τ sempre tem a dimensão de tempo enquanto que o ganho tem a dimensão da saída/entrada (*discutir exemplos!*).

A F.T. de qualquer sistema de primeira ordem é:

$$\frac{q_o}{q_i}(D) = \frac{K}{\tau D + 1} \rightarrow \text{polinômio característico da EDO} \quad (6.4)$$

e é encontrada em muitos tipos de sistemas tais como mecânicos, elétricos, fluidicos, térmicos, independentemente de sua natureza física. (Ex.: ver exemplos nos capítulos anteriores. Deixar o termo independente igual a 1 e fazer a análise dimensional. Fazer análise dimensional para outros exemplos também).

6.3 - Resposta ou Solução da Equação Diferencial de Sistemas

Idealmente deveriam ser utilizadas como entradas (funções excitadoras) aquelas que o sistema real encontra quando em operação; entretanto, de uma maneira geral estas são imprevisíveis e a utilização de entradas "padrão" como o degrau, a rampa, o seno, etc.; permitem chegar a resultados bastante satisfatórios a respeito do comportamento de sistemas assim como um tratamento matemático mais simplificado.

Sabe-se de E.D.O. que a solução da eq. difer. ou resposta do sistema é composta de duas partes: a solução da equação homogênea (complementar) e a solução particular.

A primeira parte da solução não depende da entrada usada, é uma característica do sistema e revela sua estabilidade absoluta. *(Resposta livre ou transiente)*

A segunda parte, a solução particular depende da entrada e dos parâmetros do sistema. Para sistemas estáveis é apenas esta parte que resta após algum tempo. Por isso é chamada solução de regime. *(Resposta de regime)*

6.4 - Resposta de Um Sistema de Primeira Ordem a Uma Entrada Degrau

Para aplicar uma entrada degrau, será assumido que o sistema inicialmente está em equilíbrio com $q_i = q_o = 0$, quando no instante $t = 0$ a entrada muda instantaneamente para um valor q_{is} . Então para $t > 0$, (6.3) se torna:

$$(\tau D + 1)q_o = Kq_{is} \quad (6.5)$$

A solução complementar ^{*solução homogênea*} é obtida através da equação característica do sistema

$$\begin{aligned} \tau s + 1 &= 0 \\ s &= -\frac{1}{\tau}, \tau > 0 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{so' há a parte} \\ \text{real} \end{array} \quad (6.6)$$

onde:

$$s \triangleq \sigma + i\omega \quad \begin{array}{l} \sigma \rightarrow \text{parte real} \\ \omega \rightarrow \text{parte imaginária} \end{array}$$

Neste caso $s = -1/\tau$ e a solução complementar q_{oc} é dada por:

$$q_{oc} = C_1 e^{st} = C_1 \cdot e^{-t/\tau} \quad (6.7)$$

A solução particular q_{op} depende de q_i e de uma maneira geral, para entradas que correspondam a situações físicas, é possível de ser determinada pelo método dos coeficientes a serem determinados.

Por inspeção percebe-se que:

$$q_{op} = K_{q_{is}} \quad (6.8)$$

A solução completa é então dada por:

$$q_o = q_{oc} + q_{op} \quad (6.9)$$

ou seja:

$$q_o = C_1 e^{-t/\tau} + K_{q_{is}} \quad (6.10)$$

Para se encontrar a constante de integração C_1 , a condição inicial $q_o(0+)$ deve ser conhecida. Dentro da hipótese de sistema inicialmente em equilíbrio no zero pode-se provar que $q_o(0+)$ é zero. Desta forma substituindo este valor em (6.10), tem-se:

$$0 = C_1 + K_{q_{is}} \quad (6.11)$$

$$C_1 = -K_{q_{is}}$$

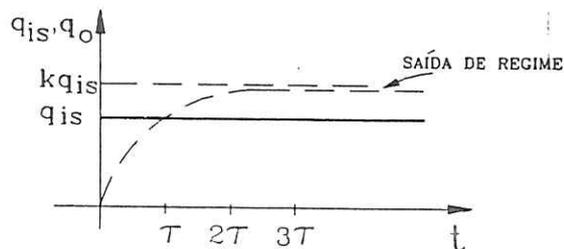
E finalmente

$$q_o = K_{q_{is}} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (6.12)$$

Os gráficos de $q_{is} \times t$ e $q_o \times t$ são dados pela Fig. 6.1.b:

t/τ	$q_o/K_{q_{is}}$
0	0.0
1	0.632
2	0.865
3	0.950
4	0.982
∞	1.000

(a)



(b)

Fig. 6.1

Um gráfico universal dimensional pode ser obtido traçando-se $\frac{q_o}{K_{q_{is}}}$ contra t/τ e pode ser utilizado para qualquer sistema de 1ª ordem.

→ * Tabela * Gráfico dimensional $q_o/K_{q_{is}} \times t/\tau$

Pode-se observar de uma maneira geral que a resposta de um sistema de 1ª ordem a uma entrada degrau apresenta as seguintes características:

a) A curva de resposta inicia-se com uma inclinação diferente de zero.

b) Não há oscilações

$$\left(\frac{dq_o}{dt} \right)_{t=0+1} = \frac{K_{q_{is}}}{\tau}$$

c) A curva aproxima-se assintoticamente do valor final.

→ d) A velocidade de resposta é dada por um único número, a constante de tempo e é inversamente proporcional a ele.

e) A velocidade de resposta não depende do tamanho do distúrbio no sentido de que mudanças percentuais iguais são atingidas em tempos iguais. (Para $t = \tau$, atinge-se 63.2% do valor final da resposta)

f) A relação de q_o e q_i para a condição de regime é $K_{q_{is}}/q_{is} = K$, o ganho. K pode ser então interpretado como sendo a quantidade de saída de regime por unidade de entrada aplicada.

6.5 - Resposta de Um Sistema de Primeira Ordem a Uma Entrada Rampa

Outras informações a respeito do comportamento de sistemas de 1ª ordem são obtidas através do estudo de sua resposta a uma entrada do tipo rampa. Supõe-se que o sistema inicialmente encontra-se em repouso, isto é, $q_o = q_i = 0$, quando em $t = 0$ a entrada começa a variar a uma taxa constante \dot{q}_{is} . Tem-se, portanto,

$$(\tau D + 1)q_o = K_{\dot{q}_{is}} t \quad (6.13)$$

Novamente mostra-se que a condição inicial é igual a zero, para $t = 0+$ dentro da hipótese de equilíbrio no zero.

A solução complementar novamente será a mesma, isto é:

$$q_{oc} = C_1 e^{-t/\tau} \quad (6.14)$$

A solução particular será da forma:

$$q_{op} = At + B \quad (6.15)$$

fornecendo:

$$\tau A + At + B = K_{\dot{q}_{is}} t \quad (6.16)$$

$$A = K_{\dot{q}_{is}} \quad \text{e} \quad B = -K_{\dot{q}_{is}} \tau \quad (6.17)$$

e portanto

$$q_o = C_1 e^{-t/\tau} + K_{\dot{q}_{is}} (t - \tau) \quad (6.18)$$

Utilizando a condição inicial $q_o(0+) = 0$ em (6.18), vem:

$$0 = C_1 + K_{\dot{q}_{is}} (-\tau) \quad (6.19)$$

Finalmente

$$q_o(t) = K_{\dot{q}_{is}} \tau e^{-t/\tau} + K_{\dot{q}_{is}} (t - \tau) \quad (6.20)$$

A parte relativa à solução homogênea, a parte natural, vai a zero a uma razão determinada por τ , sobrando apenas a solução forçada. A Fig. 6.2 mostra a resposta do sistema a uma entrada do tipo rampa:

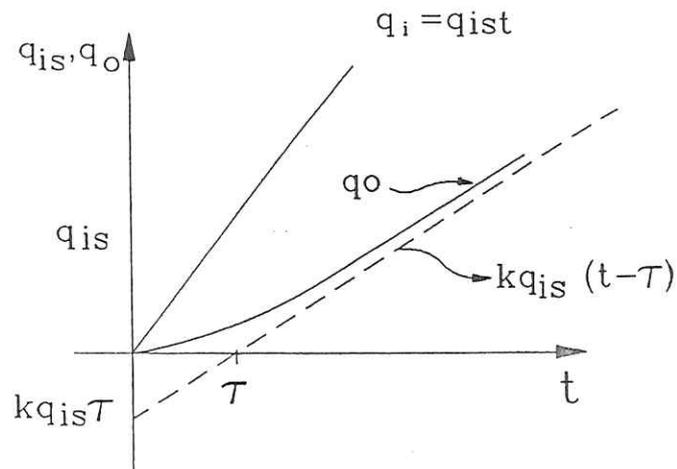


Fig. 6.2

Pode-se ter uma melhor visualização da relação entre q_i e q_o dividindo-se (6.20) por K , ou seja:

$$\frac{q_o}{K} = \dot{q}_{is} \tau e^{-t/\tau} + \dot{q}_{is}(t - \tau) \quad (6.22)$$

Um gráfico mostrando o significado de τ como o atraso no tempo e o erro de regime é visto na Fig. 6.3

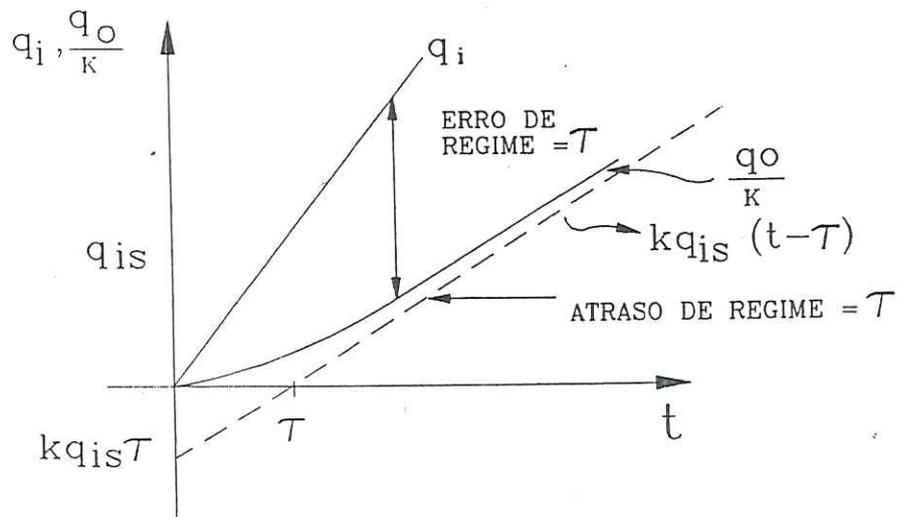


Fig. 6.3

6.6 - Modelagem e Resposta de Sistemas de Primeira Ordem Mistos

1) Sistema Eletromecânico

a) Seja o motor de corrente contínua da figura 6.4, acionando uma carga mecânica.

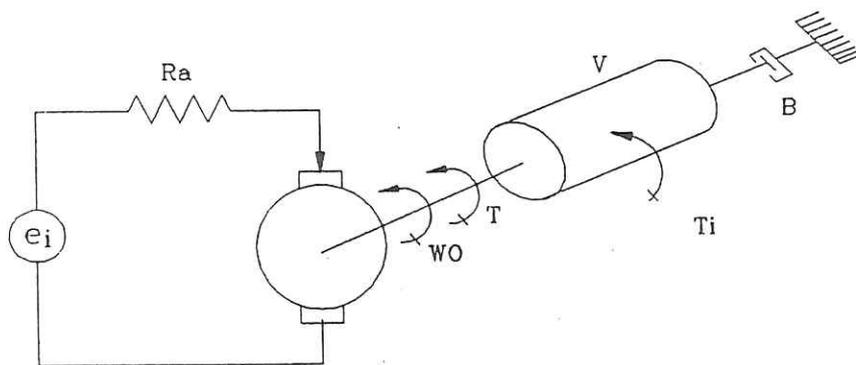


Fig. 6.4

Deseja-se determinar a resposta da velocidade da carga a uma tensão de controle e a um toque de distúrbio na carga.

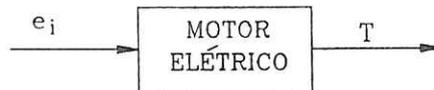
Sejam:

- $e_i \triangleq$ tensão de alimentação do motor (tensão de armadura)
- $\omega_o \triangleq$ velocidade angular da carga
- $T_i \triangleq$ torque de distúrbio aplicado à carga
- $T \triangleq$ torque do motor elétrico aplicado ao eixo

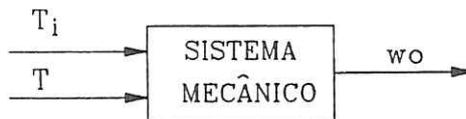
As variáveis e_i , T , T_i e ω_o tiveram seus sinais de direção adotados tais que $e_i > 0 \rightarrow T > 0$, $\omega_o > 0$; e $T_i > 0 \rightarrow \omega_o > 0$

b) Visualização do sistema em forma de diagrama de blocos:

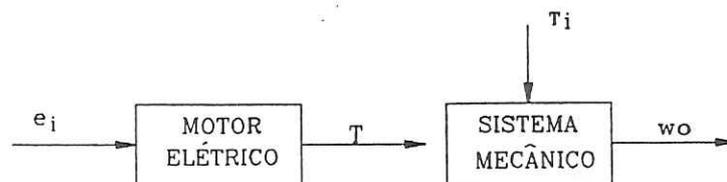
- Motor Elétrico:



- Sistema Mecânico:



- Visualização do Conjunto:



c) Modelagem dos blocos:

- Motor Elétrico:

H1- Supondo um campo magnético permanente (ímã ou estator), a velocidade do motor é função da corrente de armadura.

H2- A indutância do enrolamento do motor é desprezível.

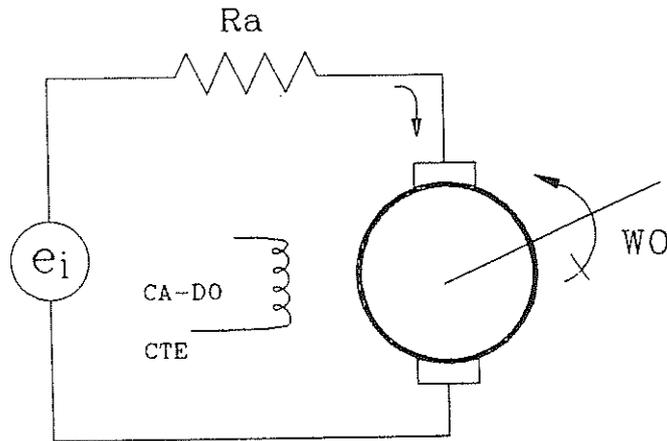


Fig. 6.5

Aplicando a lei de Kirchnoff:

$$e_i - Ra ia - K_E \omega_o = 0 \quad (6.23)$$

onde:

$ia \triangleq$ corrente na armadura

$Ra \triangleq$ resistência elétrica da fonte + armadura, considerada constante **H3**

$K_E \omega_o \triangleq$ voltagem contra-eletromotriz, considerada proporcional à velocidade **H4**

$K_E \triangleq$ constante de força contra-eletromotriz

H5- Considerando o torque do motor proporcional à corrente ia ,

$$T = K_T ia \quad (6.24)$$

onde:

$K_T \triangleq$ constante de torque do motor

Considerando (6.23) e (6.24), vem:

$$e_i - Ra \frac{T}{K_T} - K_E \omega_o = 0 \quad (6.25)$$

$$T = \frac{K_T}{Ra} (e_i - K_E \omega_o) \quad (6.26)$$

Diagrama de blocos da equação (6.26):

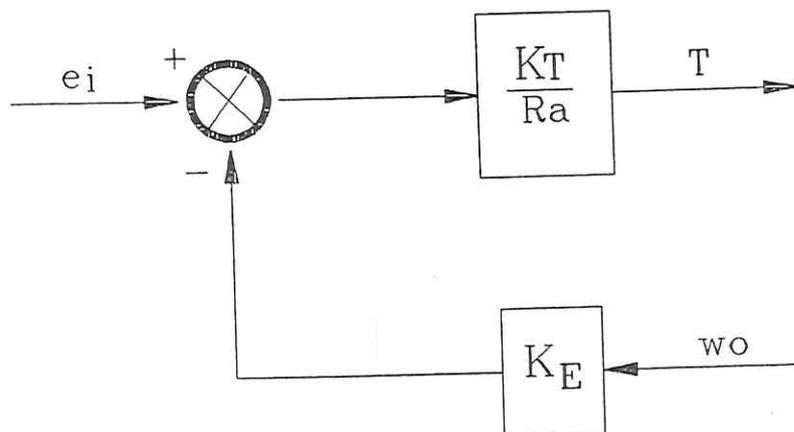


Fig. 6.6

- Motor Mecânico:

H6- Considera-se os elementos puros e ideais - J rígido e apenas atrito viscoso computado em B .

Aplicando a lei de Newton à inércia J

$$T + T_i - B\omega_o = J D\omega_o \quad (6.25)$$

onde:

$B \triangleq$ coeficiente de atrito viscoso da carga + motor

$J \triangleq$ momento de inércia das massas no eixo do motor

Reescrevendo 6.25:

$$T + T_i = (JD + B)\omega_o \quad (6.26)$$

Na forma de diagrama de blocos:

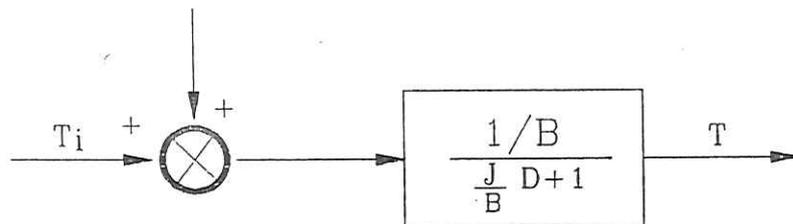


Fig. 6.7

d) Diagrama de blocos do sistema e funções transferência $\frac{\omega_o}{e_i}(D)$ e $\frac{\omega_o}{T_i}(D)$:

c)

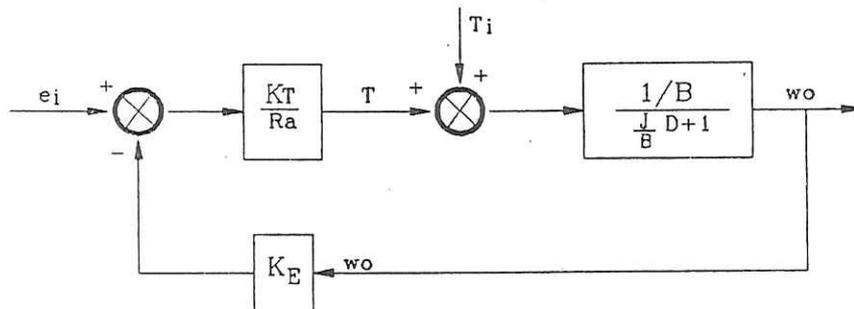
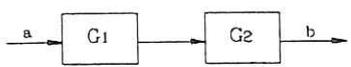
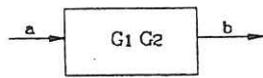
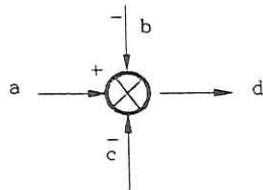
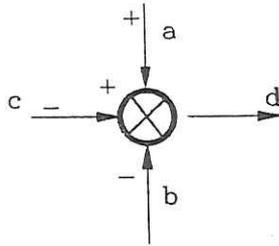
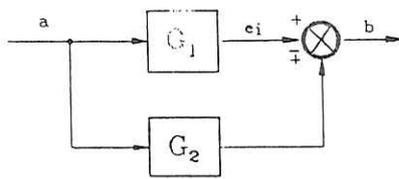
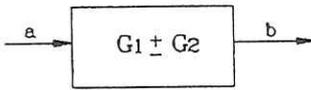
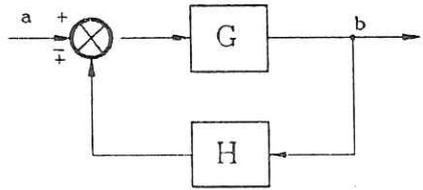
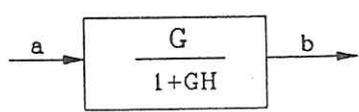


Fig. 6.8

- Observação: Diagramas de bloco de sistemas complicados podem ser simplificados através de transformações de equivalência, facilitando a obtenção de funções transferência.

DIAGRAMA DE BLOCOS	DIAGRAMA EQUIVALENTE	EQUAÇÃO
		$b = G_1 G_2 a$
		$d = a - b - c$
		$b = (G_1 \pm G_2) a$
		$b = \left(\frac{G}{1+GH} \right) a$

Para o problema em questão:

$$G_1 \triangleq \frac{K_T}{Ra} \quad (6.27)$$

$$G_2 \triangleq \frac{1/B}{\frac{1}{B}D + 1} \quad (6.28)$$

$$H \triangleq K_E \quad (6.29)$$

ou seja

$$\omega_o = \left(\frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H} \right) e_i \quad (6.30)$$

$$\omega_o = \left(\frac{G_2}{1 + G_1 G_2 H} \right) T_i \quad (6.31)$$

Substituindo (6.27), (6.28) e (6.29) em (6.30) e (6.31), tem-se as seguintes funções transferência:

$$\frac{\omega_o}{e_i}(D) = \frac{K_{EG}}{\tau D + 1} \quad (6.32)$$

$$\frac{\omega_o}{T_i}(D) = \frac{K_{TG}}{\tau D + 1} \quad (6.33)$$

onde:

$$\tau \triangleq \frac{J}{B + \frac{K_T K_E}{R_a}} \text{ [s]}$$

$$K_{EG} \triangleq \text{ganho do sistema velocidade / voltagem} \triangleq \frac{R_a}{B R_a + K_T K_E} \frac{\text{[rd/s]}}{\text{[volts]}}$$

$$K_{TG} \triangleq \text{ganho do sistema velocidade / torque} \triangleq \frac{K_T}{B R_a + K_T K_E} \frac{\text{[rd/s]}}{\text{[kgf \cdot m]}}$$

E o diagrama de blocos da Fig. 6.8 será:

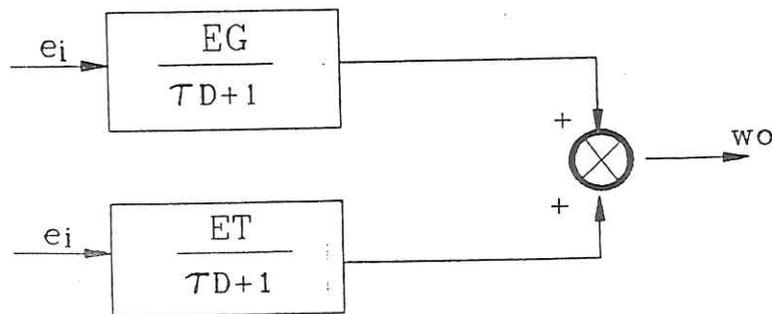


Fig. 6.9

Notas: 1) Os parâmetros do sistema dependem de quantidades mecânicas e elétricas.

2) A relação $\frac{K_T K_E}{Ra}$ tem a mesma unidade que o coeficiente de atrito viscoso B .

Portanto mesmo para $B = 0$ o sistema terá "atrito viscoso".

7. SISTEMAS DE SEGUNDA ORDEM

7.1 - Introdução

De uma maneira genérica sistemas de 2ª ordem são aqueles descritos pela equação diferencial

$$a_2 \frac{d^2 q_o}{dt^2} + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_o q_o = b_2 \frac{d^2 q_i}{dt^2} + b_1 \frac{dq_i}{dt} + b_o q_i \quad (7.1)$$

onde o caso mais importante e comum é aquele onde $b_1 = b_2 = 0$, fornecendo:

$$a_2 \frac{d^2 q_o}{dt^2} + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_o q_o = b_o q_i \quad (7.2)$$

Da mesma forma que para sistemas de 1ª ordem, pode-se definir uma forma padrão quando se divide (7.2) por a_o .

$$\frac{a_2}{a_o} \frac{d^2 q_o}{dt^2} + \frac{a_1}{a_o} \frac{dq_o}{dt} + q_o = \frac{b_o}{a_o} q_i \quad (7.3)$$

e define-se:

$$\omega_n \triangleq \sqrt{\frac{a_o}{a_2}} \triangleq \text{frequência natural não amortecida [rd/s]} \quad (7.4)$$