MAT0315 - Introdução à Análise

Segundo Semestre de 2020
Período Diurno

Martha S. Monteiro

IME-USP

Aula 2 (03/09/2020)

Representação decimal dos números racionais

Terminamos a aula passada com o seguinte exercício:

Determine a representação decimal dos números

(a) $\dfrac{1}{3}$ (b) $\dfrac{4}{7}$ (c) $\dfrac{3}{11}$ (d) $\dfrac{2455}{9000}$

Você deve ter encontrado:

(a) $\dfrac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ (b) $\dfrac{4}{7} = 0{,}571428\ldots$

(c) $\dfrac{3}{11} = 0{,}272727\ldots$ (d) $\dfrac{2455}{9000} = 0{,}272777\ldots$

Note que as reticências não são precisas!

Representação decimal dos números racionais

Notação. Para tornar precisa a representação decimal no caso de dízimas colocamos uma barra sobre a parte periódica. Por exemplo,

$$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3} \qquad \frac{4}{7} = 0{,}\overline{571428}$$

$$\frac{3}{11} = 0{,}\overline{27} \qquad \frac{2455}{9000} = 0{,}2727\overline{7}$$

Representação decimal dos números racionais

Proposição 1

Um número racional $\frac{p}{q}$, escrito na forma irredutível, tem representação decimal finita se e somente se o inteiro q não tiver fatores primos diferentes de 2 e 5.

Demonstração: Suponha que a fração $\frac{p}{q}$ está escrita na forma irredutível.

($\Rightarrow$) Aqui precisamos demonstrar que se a representação decimal é finita então q não tem fatores primos diferentes de 2 e 5. Essa demonstração é simples e é deixada como exercício.

Representação decimal dos números racionais

Continuação da demonstração:

$(\Leftarrow)$ Agora precisamos provar que se q não tem fatores diferentes de 2 e 5 então a representação decimal de $\frac{p}{q}$ é finita.

A demonstração é uma generalização do que podemos ver no exemplo:

$$\frac{221}{1600} = \frac{221}{2^6 \cdot 5^2} = \frac{221 \cdot 5^4}{2^6 \cdot 5^6} = \frac{138125}{10^6} = 0{,}138125$$

Representação decimal dos números racionais

($\Leftarrow$), continuação:

Suponha $q = 2^m \cdot 5^n$ para $m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.
Há dois casos a considerar.

$m \geq n$: multiplicamos o numerador e o denominador da fração $\frac{p}{q}$ por 5^{m-n}.

$$\frac{p}{q} = \frac{p \cdot 5^{m-n}}{(2^m \cdot 5^n) \cdot 5^{m-n}} = \frac{p \cdot 5^{m-n}}{10^m}$$

Como $5^{m-n} \in \mathbb{N}$ (pois $m \geq n$), então $p \cdot 5^{m-n} = c \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{10^m}$$

e sua representação decimal tem, no máximo m casas decimais.

Representação decimal dos números racionais

($\Leftarrow$), continuação:

$m < n$: multiplicamos o numerador e o denominador da fração $\frac{p}{q}$ por 2^{n-m}.

O restante da demonstração é análogo e fica como exercício.

Representação decimal dos números racionais

Proposição 2

Todo racional $\frac{p}{q}$ tem representação decimal finita ou infinita periódica. Reciprocamente, toda representação decimal que é ou finita ou infinita periódica é um racional.

Representação decimal dos números racionais

($\Rightarrow$)

Prova da afirmação "todo racional $\frac{p}{q}$ tem representação decimal finita ou infinita periódica":

- Já vimos que se uma fração está escrita na forma irredutível e se seu denominador não tem fatores primos diferentes de 2 e 5, então a representação decimal da fração é finita.
- Quando o denominador tem outros fatores primos, a representação é infinita e periódica. Por quê?
  - Novamente, a demonstração geral imita o que já foi observado em exemplos numéricos.

Representação decimal dos números racionais

($\Rightarrow$), continuação

Prova da afirmação “todo racional $\frac{p}{q}$ tem representação decimal finita ou infinita periódica”:

- Suponha que o denominador tem outros fatores primos, além de 2 e 5.
  - No algoritmo da divisão, ao calcularmos $p \div q$, os possíveis restos que aparecem são $\{1, 2, 3, \ldots, q-2, q-1\}$
  - O resto nunca é 0! Por quê?
  - Como a conta “não acaba”, em algum momento, necessariamente algum resto irá se repetir. Nesse momento, um ciclo é iniciado e o resultado da divisão é uma dízima periódica.

Representação decimal dos números racionais

($\Leftarrow$)

Prova da afirmação “toda representação decimal que é ou finita ou infinita periódica é um racional”:

- Já vimos que as representações decimais finitas podem ser escritas na forma de fração $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.
- Vamos então nos concentrar nas dízimas periódicas. Precisamos provar que elas podem ser escritas na forma $\frac{p}{q}$ com p e q inteiros não nulos.
- Antes de atacar o caso geral, vamos pensar num exemplo.

Representação decimal dos números racionais

Vejamos um exemplo: $x = 3{,}172\overline{34} = 3{,}172343434\ldots$

$$
\begin{array}{rlrl}
10x &= 31{,}72343434\ldots, & 100x &= 317{,}2343434\ldots, \\
1.000x &= 3.172{,}343434\ldots, & 10.000x &= 31.723{,}43434\ldots, \\
100.000x &= 317.234{,}343434\ldots, & & \text{etc}
\end{array}
$$

Representação decimal dos números racionais

Vejamos um exemplo: $x = 3{,}172\overline{34} = 3{,}172343434\ldots$

$$\begin{aligned} 10x &= 31{,}72343434\ldots, & 100x &= 317{,}2343434\ldots, \\ 1.000x &= 3.172{,}\mathbf{343434}\ldots, & 10.000x &= 31.723{,}43434\ldots, \\ 100.000x &= 317.234{,}\mathbf{343434}\ldots, & & \text{etc} \end{aligned}$$

Note que em $100.000x$ e em $1.000x$ as casas depois da vírgula são idênticas. Subtraindo um do outro, o resultado é inteiro:

$$\begin{aligned} 100.000x - 1.000x &= (317.234 + 0{,}\overline{34}) - (3.172 + 0{,}\overline{34}) \\ &= 317.234 - 3.172 = 314.062 \end{aligned}$$

Logo,

$$99.000x = 314.062 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{314.062}{99.000}$$

Isso garante que x é racional!

Representação decimal dos números racionais

($\Leftarrow$), continuação

Prova da afirmação "toda representação decimal que é ou finita ou infinita periódica é um racional":

Queremos uma demonstração para o caso geral, em que

$$x = n{,}d_1 d_2 \cdots d_r \overline{e_1 e_2 \cdots e_s}$$

Podemos generalizar o que fizemos no exemplo anterior? Como?...

Representação decimal dos números racionais

Com a discussão acima, fica claro que vale a igualdade

$$0{,}999\ldots = 1$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} 0{,}0999\ldots &= 0{,}1 \\ 0{,}00999\ldots &= 0{,}01 \\ 0{,}000999\ldots &= 0{,}001 \end{aligned}$$

E assim por diante.

Representação decimal dos números racionais

Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} 0{,}4 &= 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}3999\ldots \\ 0{,}57 &= 0{,}56 + 0{,}01 = 0{,}56999\ldots \end{aligned}$$

Conclusão: <u>Todos</u> os racionais têm representação decimal infinita e periódica.

<u>Leitura recomendada</u>: Ávila, seção 2.1.
Niven, seções 2.4 a 2.6.

Números reais

Vamos demonstrar, usando o teorema fundamental da aritmética, que não existe racional r tal que $r^2 = 5$.

Números reais

Vamos, temporariamente, admitir já conhecido o conjunto $\mathbb{R}$ e observar como podemos obter aproximações racionais cada vez melhores para o número real $\sqrt{5}$:

Todos concordam que $\sqrt{5}$ é maior do que 2, certo?

Mas essa informação é pobre, já que 10 também é maior do que 2, mas está muito longe de $\sqrt{5}$.

Uma informação melhor é "$\sqrt{5}$ está entre 2 e 3", ou seja,

$$2 < \sqrt{5} < 3$$

Como encontrar racionais com 1 casa decimal que aproximam $\sqrt{5}$?

Números reais

- Dividimos o intervalo $[2,3]$ em 10 partes iguais e calculamos os quadrados de cada um dos números $2\,;2{,}1\,;2{,}2\,;\ldots,2{,}8\,;2{,}9$
- $2^2 = 4\,;(2{,}1)^2 = 4{,}41\,;(2{,}2)^2 = 4{,}84\,;(2{,}3)^2 = 5{,}29$
- Podemos concluir que $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$
- Dizemos que $2{,}2$ é uma aproximação de $\sqrt{5}$ por falta e $2{,}3$ é uma aproximação por excesso.
- Como $2{,}3 - 2{,}2 = 0{,}1$, o erro de qualquer uma dessas aproximações é menor do que $0{,}1$, isto é $|2{,}2 - \sqrt{5}| < 10^{-1}$ e $|2{,}3 - \sqrt{5}| < 10^{-1}$.

Números reais

E a segunda casa decimal?

- Dividimos o intervalo de extremidades $2{,}2$ e $2{,}3$ em 10 partes iguais e calculamos os quadrados de cada um dos números $2{,}2\,;2{,}21\,;2{,}22\,;\ldots$ até encontrarmos em qual intervalo o número 5 é ultrapassado.
- Como $(2{,}21)^2 = 4{,}8841; (2{,}22)^2 = 4{,}9284;$ $(2{,}23)^4 = 4{,}9729; (2{,}24)^2 = 5{,}0176$, podemos concluir que $2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$
- Tanto $2{,}23$ quanto $2{,}24$ são aproximações racionais de $\sqrt{5}$, com erro menor do que 10^{-2}, isto é, $|2{,}23 - \sqrt{5}| < 10^{-2}$ e $|2{,}24 - \sqrt{5}| < 10^{-2}$.

O conjunto dos números reais

O conjunto dos números reais é caracterizado por ser o único corpo ordenado completo (a menos de isomorfismo).

Nosso grande objetivo nas próximas aulas é dar sentido a essa frase.

Axiomas de corpo

Um *corpo* é um conjunto K munido de duas operações, *adição* e *multiplicação*, satifazendo os seguintes axiomas:

(A1) A adição é associativa: $(x+y)+z = x+(y+z), \forall x,y,z \in K$.

(A2) A adição é comutativa: $x+y = y+x, \forall x,y \in K$.

(A3) Existe um elemento $0 \in K$ tal que $0+x = x, \forall x \in K$.

(A4) Para cada $x \in K$ existe em K um elemento oposto, indicado por $-x$, tal que $x+(-x) = 0$.

(M1) A multiplicação é associativa: $(xy)z = x(yz), \forall x,y,z \in K$.

(M2) A multiplicação é comutativa: $xy = yx, \forall x,y \in K$.

(M3) Existe um elemento $1 \in K$ tal que $1 \neq 0$ e que $1x = x, \forall x \in K$.

(M4) Para cada $x \in K$ tal que $x \neq 0$ existe em K um elemento inverso, indicado por x^{-1}, tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

(D) Propriedade distributiva: $x(y+z) = xy+xz, \forall x,y,z \in K$.

Algumas consequências dos axiomas de corpo

(P1) Se $a + b = a + c$ então $b = c$

(P2) Se $a + b = a$ então $b = 0$

(P3) Se $a + b = 0$ então $b = -a$

(P4) Se $c \neq 0$ e $ac = bc$ então $a = b$

(P5) Em um corpo, o produto de qualquer número por 0 é igual a 0

(P6) Em um corpo, se o produto de dois elementos é 0 então um dos fatores é 0

(P7) Para quaisquer elementos a e b de um corpo, valem:

(i) $(-a)b = -(ab) = a(-b)$

(ii) $(-a)(-b) = ab$

Algumas consequências dos axiomas de corpo

- Como consequência de (P5), não existe um número 0^{-1} que satisfaz $0 \cdot 0^{-1} = 1$. Consequentemente, não existe $\dfrac{a}{0}$, ou seja, não é possível definir divisão por 0.

- A propriedade (P6) é usada frequentemente na resolução de equações.

  Por exemplo, se quisermos resolver a equação $(x^2 - 7x + 10)\cos x = 0$ podemos, por (P6), concluir que ou $x^2 - 7x + 10 = 0$ ou $\cos x = 0$.

  A primeira equação é equivalente a $(x-5)(x-2) = 0$, cujas soluções são $x = 5$ ou $x = 2$ e a segunda equação tem soluções da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, com $\in \mathbb{Z}$.

  Portanto, as soluções da equação $(x^2 - 7x + 10)\cos x = 0$ são $x = 5$ ou $x = 2$ ou $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.