

MAP 2321 - Técnicas em Teoria de Controle
*Introdução - Exemplos de Sistemas de Controle*¹

Depto. Matemática Aplicada
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
São Paulo - SP

¹Referências: A. Leitão e K. Ogata. Introdução.

Considere uma família de **fenômenos** cujas variáveis $x_1(t), \dots, x_n(t)$ tem sua evolução descrita por uma **equação diferencial** da forma

$$\dot{x} = F(t, x)$$

onde $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ é uma função que descreve a **dinâmica da evolução** e

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n \quad \text{é o vetor de } \mathbf{variáveis de estado}$$

cujas **componentes** são as quantidades que desejamos **acompanhar**. Tais variáveis representam as condições nas quais se encontra o processo que está sendo **modelado**.

Deslocamento de um corpo

Seja $x(t)$ a **velocidade** de um corpo de massa m num instante t .

Pela Lei de Newton **sabemos** que

$$m \dot{x}(t) = F(t)$$

onde $F(t)$ é a **força exercida** sobre o corpo no tempo t .

Variáveis de controle

Se exercemos **influência** sobre o sistema através de **parâmetros livres**

$$u_1(t), \dots, u_m(t) \quad \text{obtemos} \quad \dot{x}(t) = F(t, x, u)$$

onde $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in \mathbb{R}^m$ é chamado vetor de **variáveis de controle** ou ainda **entrada do sistema**.

- Note que a situação em que a dinâmica do sistema é **linear** tanto na variável de estado x quanto na variável de **controle** u nos dá

$$\dot{x}(t) = A(t)x + B(t)u(t)$$

onde $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Saída do sistema

As vezes a **evolução do sistema** pode ser acompanhada somente através de um vetor de **saída** $y(t) = (y_1(t), \dots, y_p(t)) \in \mathbb{R}^p$ que depende da variável de estado x .

- Se a função que **descreve** y em relação a x é **linear** em x temos

$$y(t) = C(t)x(t) \quad \text{onde} \quad C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}.$$

- O caso **particular** $C(t) \equiv I$ corresponde à situação em que é **possível** conhecer a variável de estado x em todos os instantes de tempo t .

Desta forma temos um *sistema de controle* dado por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases} .$$

Note que **estratégias** de controle diferentes podem **alterar** a dinâmica do sistema. A princípio é possível distinguir entre **dois tipos** de escolha para a estratégia:

- i) Uma estratégia u é escolhida **a priori** e levada a cabo sem considerar a saída do sistema (a saída do sistema não influi na escolha da entrada). Este é chamado **controle de malha aberta** (open-loop control) esquematizado na Figura 1(a).
- ii) A escolha do controle u é feita de **acordo com a saída** (ou estado) do sistema. Nesse caso temos um controle de **malha fechada** (closed-loop control) ou controle de **realimentação** de saída ou **regulagem**; veja Figura 3(b).

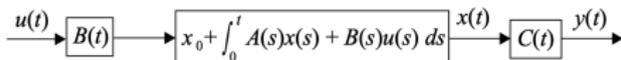


Figura: 1(a) Malha aberta.

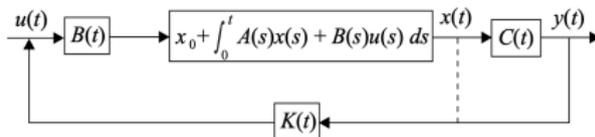


Figura: 2(b) Malha fechada.

Aquecimento de um quarto

Podemos utilizar os dois tipos de estratégia para aquecer um quarto:

- No problema de **controle**, a estratégia de aquecimento é escolhida dependendo da hora do dia e época do ano. A estratégia é **periódica**.
- Na **regulagem**, a estratégia de aquecimento é escolhida de acordo com a temperatura do quarto, com a temperatura exterior e com uma temperatura de referência.

Note que a regulagem pode compensar **interferências**.

Oscilador harmônico

Considere o **sistema mecânico** indicado ao lado. A equação do sistema é $m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u$ onde m é a **massa** do corpo, b o **amortecimento** e k a **constante elástica**. y é a saída e u a entrada (controle).

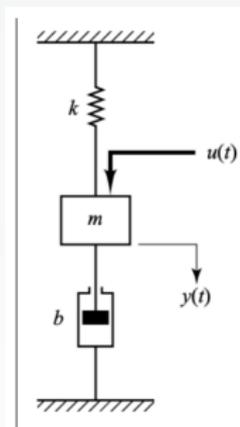


Figura: Massa mola amortecido.

Definindo as variáveis de **estado** $x_1(t) = y(t)$ e $x_2(t) = \dot{y}(t)$ obtemos que

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Enchimento de um reservatório d'água

Seja $I(t)$ o **fluxo** de água que entra no reservatório no tempo t ; $x(t)$ a **quantidade** de água no reservatório; $y(t)$ a **altura** do nível da água no tempo t ; $u(t)$ a **abertura** da torneira para entrada de água. Assim $I(t) = c_1 u(t)$ e $y(t) = c_2 x(t)$ que nos dá:

$$\dot{x}(t) = I(t) = c_1 u(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(0) + c_1 \int_0^t u(s) ds$$

Note que o reservatório estará cheio quando $x(t) = x_{\max}$ ou $y(t) = y_{\max}$.

Heurísticamente definimos a seguinte estratégia:

- 1 Medir a saída $y(t)$;
- 2 Testar se $y(t) = y_{\max}$;
- 3 Abrir ou fechar a torneira (vazão máxima ou mínima);
- 4 Voltar ao item 1.

Note que aqui se usa apenas os valores extremos do controlador.²

²Tais controles pertencem a uma família especial chamada de controles de *Bang-Bang*.

A função que permite **calcular** a saída y a partir da entrada u é denominada **função de transferência**. A seguir damos alguns exemplos:

- No exemplo anterior temos

$$y(t) = c_2 x(t) = c_2 x(0) + c_1 c_2 \int_0^t u(s) ds$$

com $u(s)$ assumindo seu valor máximo ou mínimo.

- No exemplo *deslocamento de um corpo* temos

$$y(t) = x(t) = x(0) + \frac{1}{m} \int_0^t F(s) ds$$

onde F pode ser usado como um controle.

Definição informal

- a) Dizemos que um sistema de controle é **controlável** quando for possível encontrar uma estratégia de controle u que leve o estado *inicial* a um estado *final* desejado.
- b) Por outro lado, dizemos que um sistema de controle é **observável** quando for possível reconstruir o estado inicial $x(0)$ a partir da saída y do sistema.

Discussão

- Os dois exemplos *Enchimento de um reservatório d'água* e *Deslocamento de um corpo* são **controláveis**? São **observáveis**? Note que isso vai depender dos controles **admissíveis**, ie., do conjunto de controles disponível.

Aquecimento de um quarto

Queremos **manter** um quarto aquecido por um **determinado** tempo, de forma que a energia gasta seja a **menor** possível.

- Denotamos por $w(t)$ a **temperatura do quarto** no tempo $t \in [0, T]$; $w_0 = w(0)$ a temperatura **inicial** no quarto; c a temperatura constante **fora** do quarto; $z(t)$ a **diferença** de temperatura entre o quarto e seu exterior; $z_0 = w_0 - c$ é a diferença de temperatura em $t = 0$ e $u(t)$ a **taxa de variação** do calor inserido.
- Aqui supomos a variação de temperatura é **proporcional** tanto à temperatura exterior quanto a energia **utilizada** no mecanismo de controle. Assim:

$$\dot{z} = -az + bu(t) \quad \text{para constantes positivas } a \text{ e } b.$$

Objetivo

Queremos que a temperatura **evolua** da condição inicial z_0 a $z(T) = z_T$ com gasto mínimo de **energia** dado por

$$J(u) = \int_0^T u(s)^2 ds.$$

Desta forma temos a seguinte estratégia de controle

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } J(u) \\ \text{sujeito à} \\ \dot{z} = -az + bu(t); \quad z(0) = z_0 \text{ e } z(T) = z_T. \end{array} \right.$$

que é equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } I(z) = \int_0^T L(s, z(s), \dot{z}(s)) ds \\ \text{sujeito à } z(0) = z_0 \text{ e } z(T) = z_T. \end{array} \right.$$

onde $L(t, z(t), \dot{z}(t)) = b^{-2}(\dot{z}(t) + az(t))^2$.

- Note que há a necessidade de se estabelecer os controles **admissíveis** bem como o **tipo** de equação diferencial que queremos tratar.

Da teoria do *cálculo das variações* sabemos que uma **solução** do problema variacional acima **satisfaz** a equação de *Euler-Lagrange*

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 0.$$

Isto é, satisfaz a equação

$$\ddot{z} - a^2 z = 0$$

cuja solução geral é

$$z(t) = \alpha \sinh(at) + \beta \cosh(at).$$

Supondo $z_0 = 0$ e usando que $z(T) = z_T$ obtemos que $\beta = 0$, $\alpha = \frac{z_T}{\sinh(aT)}$ e

$$z(t) = z_T \frac{\sinh(at)}{\sinh(aT)} \Rightarrow u(t) = z_T a b^{-1} \frac{e^{at}}{\sinh(aT)}, \quad t \in [0, T]$$

já que $u(t) = b^{-1}(\dot{z}(t) + az(t))$.

O **movimento retilíneo** de um carro de massa $m = 1$ é descrito por

$$\ddot{x} = u(t)$$

com $u : [0, T] \mapsto \mathbb{R}$ representando um **controle** que corresponde à **aceleração** e **frenagem** do veículo. Suponha que no instante inicial $t_0 = 0$ o carro está em **repouso**

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

No tempo $T > 0$ o carro deve estar **parado** à frente a uma distância de **uma** unidade

$$x(T) = 1 \quad \text{e} \quad \dot{x}(T) = 0.$$

Supomos ainda que as **ações** do controle estão **limitadas**

$$|u(t)| \leq 1 \quad \forall t \in [0, T].$$

Objetivo

Determinar o **controle** u que desloque o carro acima num tempo **mínimo** T .

Tome $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$. Então a equação de **estado** de $\ddot{x} = u(t)$ é dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t).$$

Recordação ;-)

Seja $f(t) \in \mathbb{R}^n$ uma função suave, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz **constante** e

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2} + \dots + \frac{A^k}{k!} + \dots = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$$

sua **exponencial**. Então a **solução** de $\dot{z}(t) = Az(t) + f(t)$ com $z(0) = z_0$ é dada por

$$z(t) = e^{At} z_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s) ds.$$

Logo

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} + \int_0^t e \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{(t-s)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(s) ds.$$

Veja que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0 \Rightarrow e \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t.$$

Como $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ temos que

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & (t-s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(s) ds = \begin{pmatrix} \int_0^t (t-s) u(s) ds \\ \int_0^t u(s) ds \end{pmatrix}.$$

Então

$$x_1(t) = t \int_0^t u(s) ds - \int_0^t s u(s) ds \quad \text{e} \quad x_2(t) = \int_0^t u(s) ds.$$

Usando que $x_2(T) = \dot{x}(T) = 0$ obtemos que $\int_0^T u(s) ds = 0$ de onde concluímos³

$$x_1(T) = - \int_0^T s u(s) ds \quad \text{e} \quad u(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T/2] \\ -1 & t \in (T/2, T] \end{cases}$$

Finalmente obtemos da expressão de u e $x(T) = 1$ que

$$1 = - \int_0^{T/2} s ds + \int_{T/2}^T s ds = \frac{T^2}{4} \Rightarrow T = 2.$$

³Veremos que os controles aqui devem ser do tipo *Bang-bang*. Empiricamente acelera-se e freia-se o máximo possível.

Observações finais

- i) Mais tarde veremos que o controle e valor de T obtidos são ótimos.
- ii) Controles do tipo Bang-bang assumem os valores extremos permitidos.
- iii) Caso a restrição $|u(t)| \leq 1$ não seja fornecida, temos que o problema não possui um tempo mínimo $T > 0$. Com efeito, $T_n = 2/n$ e

$$u_n(t) = \begin{cases} n^2 & t \in [0, \frac{1}{n}) \\ -n^2 & t \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \end{cases}$$

são estratégias admissíveis (verifique) e $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 0$.