

**MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS II**

2º Semestre - 2020

Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos

lsantos@ime.usp.br

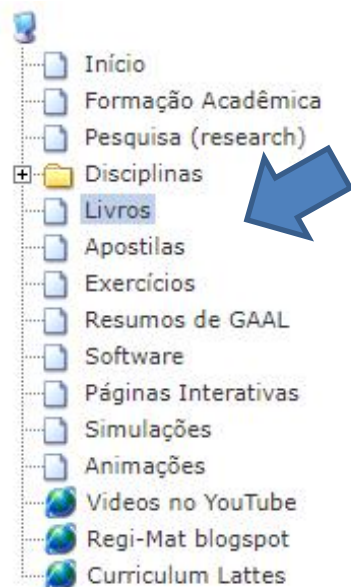
Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução (Versão Preliminar)

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
<http://www.mat.ufmg.br/~regi>

Julho 2011



<https://regijs.github.io/>



©2002-2003 Geir Landrö

teorema sobre a existência de soluções em série de potências para equações lineares de 2a. ordem, a injetividade da transformada de Laplace, o teorema sobre convergência pontual da série de Fourier e outros. O conteúdo corresponde ao programa da disciplina 'Equações Diferenciais C' que é ministrado para os alunos da área de ciências exatas na Universidade Federal de Minas Gerais.

[Errata das páginas 242 e 243 da edição de Março 2009](#)

[Errata da página 244 da edição de Março 2009](#)

[Errata às edições Julho 2009 e Março 2010](#)

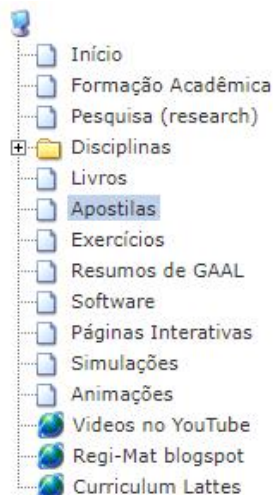
- [Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução \(Julho 2015\)](#)

Este é um texto para uma disciplina introdutória sobre Equações Diferenciais Parciais e Transformada de Fourier para alunos da área de Ciências Exatas. Pode ser considerado um texto alternativo aos livros Boyce-DiPrima para a parte de Equações Diferenciais Parciais e Valéria Iório para a parte de Transformada de Fourier, sendo nos dois casos mais objetivo e mais elementar. Entretanto aqui estão apresentadas provas elementares de resultados como o teorema sobre convergência pontual da série de Fourier, derivação e limites de séries de funções. O conteúdo corresponde ao programa da disciplina 'Equações Diferenciais B' que é ministrado para os alunos da área de ciências exatas na Universidade Federal de Minas Gerais.

[Tabela de Primitivas para Cálculo de Coeficientes de Séries de Fourier](#)

Veja também as [Apostilas em PDF](#).

[Página Inicial](#)



©2002-2003 Geir Landrö

- [Tensor de Orientação \(27/05/2012 atual. em 06/10/2017\)](#)
- [Como é que o Google Googla \(06/2020\)](#)
- [Caracterização e Diagonalização das Matrizes Simétricas 3x3 com um Autovalor Duplo \(06/2020\)](#)

Equações Diferenciais:

- [Modelo para o Surto de Coronavírus \(26/03/2020 com atualizações diárias\)](#)
- [Crescimento Logístico da População do Brasil \(25/03/2011\)](#)
- [Frações Parciais \(19/04/2004\)](#)
- [Existência e Unicidade de Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias \(10/07/2010\)](#)
- [Existência de Soluções de Equações Diferenciais em Série de Potências \(10/07/2010\)](#)
- [Propriedades de Séries de Potências \(02/10/2011\)](#)
- [Teorema da Aproximação de Weierstrass \(10/07/2010\)](#)
- [Séries de Fourier e Equações Diferenciais Parciais \(16/10/2007\)](#)
- [Séries de Fourier \(23/04/2002\)](#)
- [Convergência Pontual da Série de Fourier \(10/07/2010\)](#)
- [Limites e Derivação de Séries de Funções \(10/07/2010\)](#)
- [Séries de Fourier de Senos e de Cossenos de Índices Ímpares \(17/08/2010\)](#)
- [Oscilações Forçadas com Força Externa Periódica \(21/08/2010\)](#)
- [Corda Elástica Presa Somente em uma das Extremidades \(24/09/2010\)](#)
- [Corda Elástica Infinita \(28/09/2010\)](#)
- [Problema de Dirichlet na Faixa Semi-infinita \(28/09/2010\)](#)
- [Problema de Dirichlet no Círculo e em Regiões Circulares \(22/09/2010\)](#)
- [Transformada de Fourier \(15/10/2010\)](#)
- [Retratos de Fase de Sistemas Lineares Homogêneos 2x2 \(27/10/2011\)](#)
- [Movimento de um Corpo sujeito somente a Força Gravitacional \(20/09/2019\)](#)

Algumas seções do livro são apresentadas na forma de apostila

Séries de Fourier e Equações Diferenciais Parciais

Reginaldo J. Santos

Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais

<http://www.mat.ufmg.br/~regi>

22 de novembro de 2007

1 Séries de Fourier

Os conceitos de produto escalar e norma no $\mathbb{R}^n$ podem ser estendidos a certos espaços de funções.

Definição 1. Seja $\mathcal{CP}[a, b]$ o conjunto das funções reais contínuas por partes

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

considerando idênticas duas funções que diferem uma da outra apenas em um número finito de pontos.

- (a) Definimos o **produto escalar** ou **interno** das funções f e g pertencentes a $\mathcal{CP}[a, b]$, como

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

- (b) Para todo vetor $f \in \mathcal{CP}[a, b]$, definimos a **norma** de f denotada por $\|f\|$ como sendo

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Por exemplo, se $f(t) = t, g(t) = e^t \in \mathcal{C}^0[0, 1]$, então

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 te^t dt = te^t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt = 1.$$

Além disso, $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = 1/3$. Assim, $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{3}/3$.

O produto interno satisfaz as seguintes propriedades, que são análogas às do produto escalar em $\mathbb{R}^n$:

- Proposição 1.** (a) Para todos os $f, g \in \mathcal{CP}[a, b]$, $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$.
- (b) Para todos os $f_1, f_2, g \in \mathcal{CP}[a, b]$, $\langle f_1 + f_2, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle$;
- (c) Para todos os $f, g \in \mathcal{CP}[a, b]$ e todo escalar α , $\langle \alpha f, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle$;
- (d) Para todo $f \in \mathcal{CP}[a, b]$, $\|f\| \geq 0$ e $f = 0$ se, e somente se, $\|f\| = 0$.
- (e) Para todo vetor $f \in \mathcal{CP}[a, b]$ e para todo escalar α , $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$;
- (f) Para todos os vetores $f, g \in \mathcal{CP}[a, b]$, $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$ (Desigualdade de Cauchy-Schwarz);
- (g) Para todos os vetores $f, g \in \mathcal{CP}[a, b]$, $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (Desigualdade triangular);

Vamos, agora, estender ao espaço $\mathcal{CP}[a, b]$ o conceito de ortogonalidade.

Definição 2. Seja $\mathcal{CP}[a, b]$. Dizemos que um subconjunto não vazio $\mathcal{X}$ de $\mathcal{CP}[a, b]$ é **ortogonal** se para todo par f e g de elementos distintos de $\mathcal{X}$, $\langle f, g \rangle = 0$. Neste caso dizemos que os elementos de $\mathcal{X}$ são **ortogonais**.

Exemplo 1. Seja L um número real maior que zero. Seja $\mathcal{CP}[-L, L]$ o conjunto das funções contínuas por partes do intervalo $[-L, L]$ em $\mathbb{R}$ com o produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^L f(t)g(t)dt.$$

Vamos mostrar que o conjunto

$$\left\{1, \cos \frac{\pi t}{L}, \sin \frac{\pi t}{L}, \cos \frac{2\pi t}{L}, \sin \frac{2\pi t}{L}, \dots, \cos \frac{n\pi t}{L}, \sin \frac{n\pi t}{L}, \dots\right\}$$

é ortogonal. †

Como as funções do conjunto, exceto a primeira, são funções cujas primitivas são periódicas de período igual a $2L/n$, então a integral de $-L$ a L destas funções é igual a zero e portanto elas são ortogonais à função constante 1.

$$\begin{aligned}\left\langle \cos \frac{n\pi t}{L}, \sin \frac{m\pi t}{L} \right\rangle &= \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi t}{L} \sin \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ns \sin ms ds \\ &= \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(m+n)s + \sin(m-n)s] ds = 0\end{aligned}$$

Para $m \neq n$ temos que

$$\begin{aligned}\left\langle \cos \frac{n\pi t}{L}, \cos \frac{m\pi t}{L} \right\rangle &= \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi t}{L} \cos \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ns \cos ms ds \\ &= \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)s + \cos(m-n)s] ds \\ &= \frac{L}{2\pi(m+n)} \sin(m+n)s \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{L}{2\pi(m-n)} \sin(m-n)s \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \\ \left\langle \sin \frac{n\pi t}{L}, \sin \frac{m\pi t}{L} \right\rangle &= \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi t}{L} \sin \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin ns \sin ms ds \\ &= \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [-\cos(m+n)s + \cos(m-n)s] ds = 0\end{aligned}$$

Lembrando que $\cos(x)=\cos(-x)$ -> função par, e $-\sin(x) = \sin(-x)$ -> função ímpar

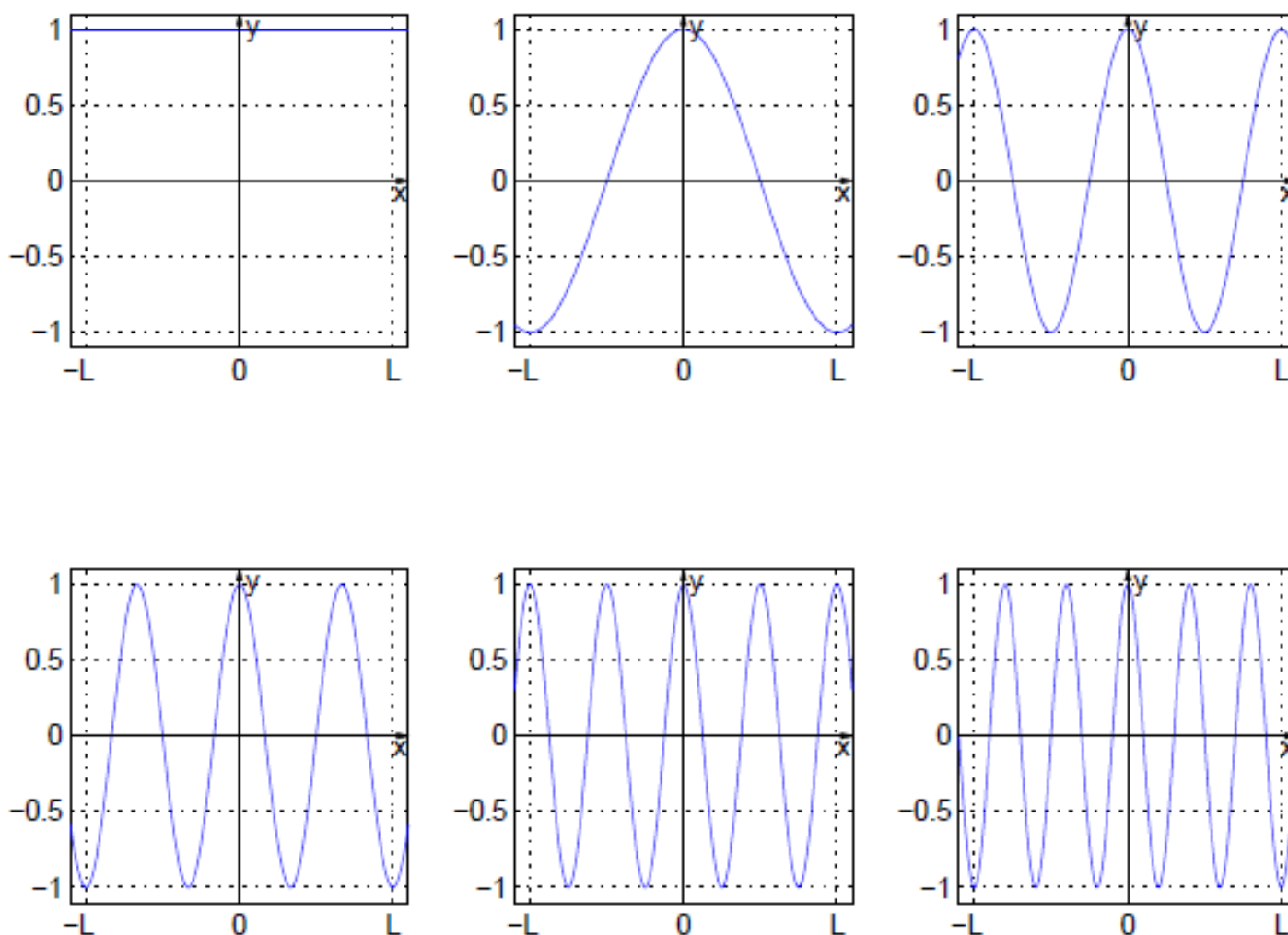


Figura 1: Gráficos de $1, \cos \frac{\pi t}{L}, \cos \frac{2\pi t}{L}, \cos \frac{3\pi t}{L}, \cos \frac{4\pi t}{L}, \cos \frac{5\pi t}{L}$

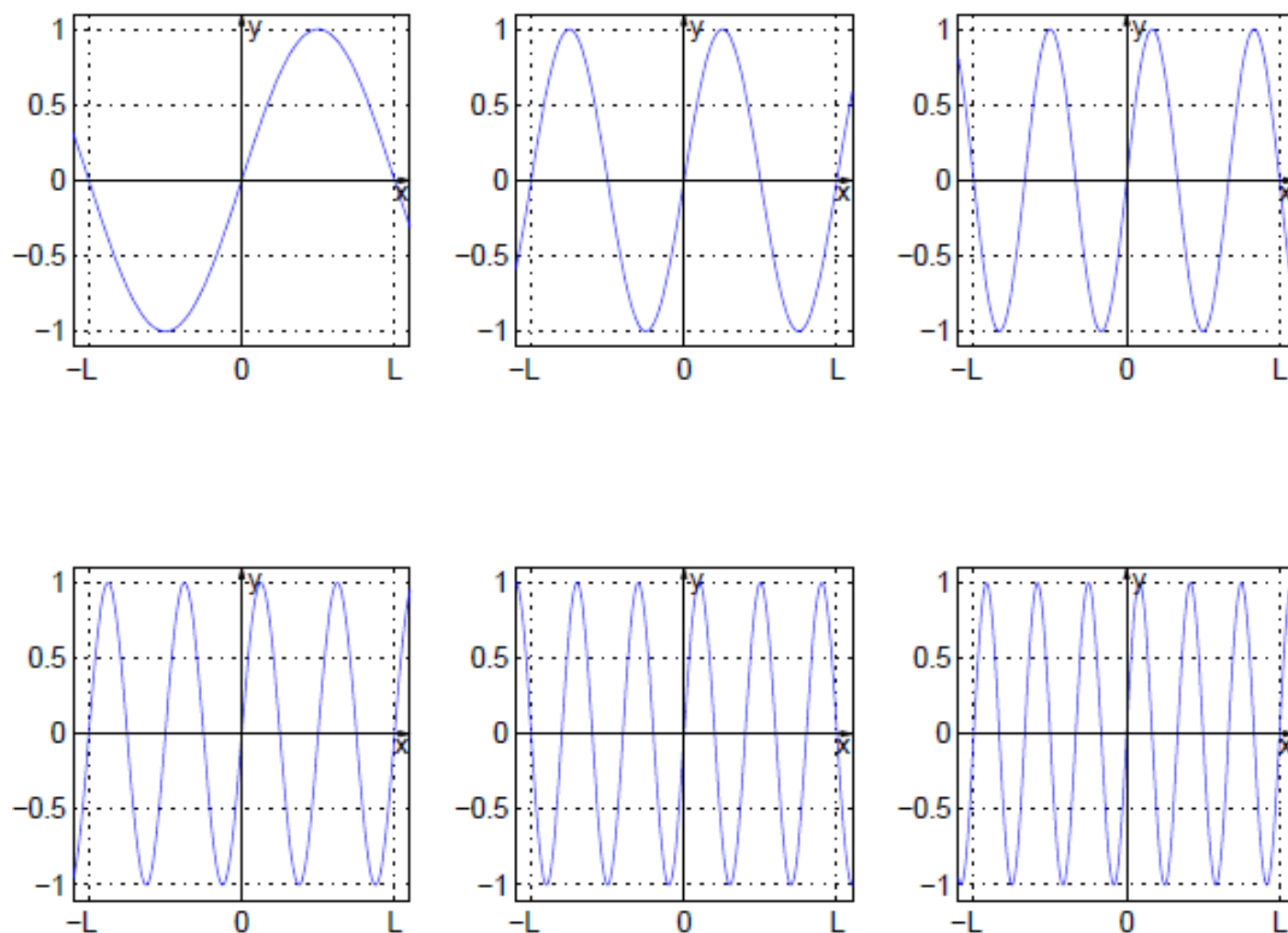


Figura 2: Gráficos de $\sin \frac{\pi t}{L}$, $\sin \frac{2\pi t}{L}$, $\sin \frac{3\pi t}{L}$, $\sin \frac{4\pi t}{L}$, $\sin \frac{5\pi t}{L}$, $\sin \frac{6\pi t}{L}$

Podemos estender a $\mathcal{CP}[a, b]$ o conceito de convergência de seqüência de números reais.

Definição 3. (a) Uma seqüência de funções $\{f_m\} = \{f_0, f_1, f_2, \dots, f_m, \dots\}$ de $\mathcal{CP}[a, b]$ converge para uma função f de $\mathcal{CP}[a, b]$ se

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f\| = 0.$$

Neste caso escrevemos $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = f$.

(b) Uma série de funções $\sum_{m=0}^{\infty} f_m$ de $\mathcal{CP}[a, b]$ converge para uma função f de $\mathcal{CP}[a, b]$ se o limite da seqüência das somas parciais converge para f , ou seja,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m f_n = f.$$

Proposição 2. *Se uma seqüência de funções $\{f_m\}$ de $\mathcal{CP}[a, b]$ converge para uma função f de $\mathcal{CP}[a, b]$, então esta função é única a menos dos seus valores em um número finito de pontos.*

Proposição 3. (a) Se uma seqüência de funções $\{f_m\}$ de $\mathcal{CP}[a, b]$ converge para uma função f de $\mathbb{V}$, então para todo vetor g de $\mathbb{V}$ a seqüência de números reais $\{\langle f_m, g \rangle\}$ converge para $\langle f, g \rangle$. Ou seja, se $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = f$, então

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle f_m, g \rangle = \left\langle \lim_{m \rightarrow \infty} f_m, g \right\rangle.$$

(b) Se uma série de funções $\sum_{m=0}^{\infty} f_m$ de $\mathcal{CP}[a, b]$ converge para uma função f de $\mathcal{CP}[a, b]$, então, para toda função g de $\mathcal{CP}[a, b]$,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \langle f_m, g \rangle = \left\langle \sum_{m=0}^{\infty} f_m, g \right\rangle.$$

Proposição 4. *Seja $\mathcal{CP}[a, b]$, o espaço das funções contínuas por partes no intervalo $[a, b]$. Seja $\{g_0, g_1, g_2, \dots, g_n, \dots\}$ um subconjunto de $\mathbb{V}$ de vetores ortogonais não nulos. Se*

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} c_m g_m,$$

então

$$c_m = \frac{\langle f, g_m \rangle}{\|g_m\|^2}, \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \dots$$

Exemplo 2. Seja L um número real maior que zero. Seja $\mathcal{CP}[-L, L]$ o conjunto das funções contínuas por partes do intervalo $[-L, L]$ em $\mathbb{R}$ com o produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^L f(t)g(t)dt.$$

Já mostramos no **Exemplo 1** que o conjunto

$$\left\{1, \cos \frac{\pi t}{L}, \sin \frac{\pi t}{L}, \cos \frac{2\pi t}{L}, \sin \frac{2\pi t}{L}, \dots, \cos \frac{n\pi t}{L}, \sin \frac{n\pi t}{L}, \dots\right\}$$

é ortogonal.

Vamos aplicar a **Proposição 4** a este conjunto. Para isto vamos calcular as normas dos seus elementos.

$$\langle 1, 1 \rangle = \int_{-L}^L dt = 2L$$

$$\left\langle \cos \frac{n\pi t}{L}, \cos \frac{n\pi t}{L} \right\rangle = \int_{-L}^L \cos^2 \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 ns ds = \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [1 + \cos 2ns] ds = L$$

$$\left\langle \sin \frac{n\pi t}{L}, \sin \frac{n\pi t}{L} \right\rangle = \int_{-L}^L \sin^2 \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 ns ds = \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [1 - \cos 2ns] ds = L$$

Assim, para toda função $f \in \mathcal{CP}[-L, L]$ que possa ser escrita como a série

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi t}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{m\pi t}{L}, \quad (1)$$

teremos que os coeficientes da série serão dados por

$$a_m = \frac{\langle f, \cos \frac{m\pi t}{L} \rangle}{\|\cos \frac{m\pi t}{L}\|^2} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt, \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

$$b_m = \frac{\langle f, \sin \frac{m\pi t}{L} \rangle}{\|\sin \frac{m\pi t}{L}\|^2} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{m\pi t}{L} dt, \quad \text{para } m = 1, 2, \dots \quad (3)$$

A série (1) com os coeficientes dados acima é chamada **Séries de Fourier**.

Na **Proposição 4** fizemos a suposição de que a série $\sum_{m=0}^{\infty} c_m g_m$ convergia para a função f . Vamos considerar o problema inverso. Dada uma função $f \in \mathcal{CP}[-L, L]$ podemos calcular os coeficientes a_m e b_m usando (2) e (3) e nos perguntar se a série obtida converge ou não. O teorema seguinte, cuja demonstração pode ser encontrada por exemplo em [3], afirma que para toda função f contínua por partes em $[-L, L]$, a série de Fourier de f converge.

Teorema 5. *Seja L um número real maior que zero. Para toda função f pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $\mathcal{CP}[-L, L]$, a série de Fourier de f*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi t}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{m\pi t}{L},$$

em que

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \dots \\ b_m &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{m\pi t}{L} dt, \quad \text{para } m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

converge para f na norma $\|f\| = \left(\int_{-L}^L (f(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$. Ou seja, podemos escrever

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi t}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{m\pi t}{L}$$

Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução (Versão Preliminar)

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
<http://www.mat.ufmg.br/~regi>

Julho 2011



2	Séries de Fourier	162
2.1	Teorema de Fourier	163
2.1.1	Séries de Fourier de Funções Pares e Ímpares	178
2.1.2	Demonstração do Teorema sobre a Convergência da Série de Fourier	194
2.1.3	Limites e Derivação de Séries de Funções	197
2.1.4	Tabela de Coeficientes de Séries de Fourier	202
	Exercícios	203
2.2	Séries de Fourier de Senos e de Cossenos de Índices Ímpares	215
	Exercícios	229
2.3	Oscilações Forçadas com Força Externa Periódica	234
2.3.1	Oscilações Forçadas sem Amortecimento	234
2.3.2	Oscilações Forçadas com Amortecimento	241
	Exercícios	248
2.4	Respostas dos Exercícios	251

Séries de Fourier

Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é **seccionalmente contínua** ou **contínua por partes** se $f(t)$ é contínua em $[a, b]$ exceto possivelmente em um número finito de pontos, nos quais os limites laterais existem. De forma análoga uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **seccionalmente contínua** ou **contínua por partes** se $f(t)$ é contínua por partes em todo intervalo $[a, b]$. Consideramos duas funções contínuas por partes iguais se elas diferem possivelmente apenas nos pontos de descontinuidade.

Para toda função $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua por partes a **série de Fourier** da função f é definida por

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L}, \quad (2.1)$$

em que os coeficientes são dados por

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

2.1 Teorema de Fourier

Teorema 2.1 (Fourier). *Seja L um número real maior que zero. Para toda função $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, a série de Fourier de f*

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L},$$

em que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

converge para f nos pontos de $(-L, L)$ em que f é contínua. Ou seja, podemos representar f por sua série de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L}, \quad \text{para } t \in (-L, L) \text{ em que } f \text{ é contínua.}$$

Exemplo 2.1. Seja L um número real maior que zero. Considere a função $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = f_{c,d}^{(0)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } cL < t \leq dL, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad \text{para } c \text{ e } d \text{ fixos satisfazendo } -1 \leq c < d \leq 1.$$

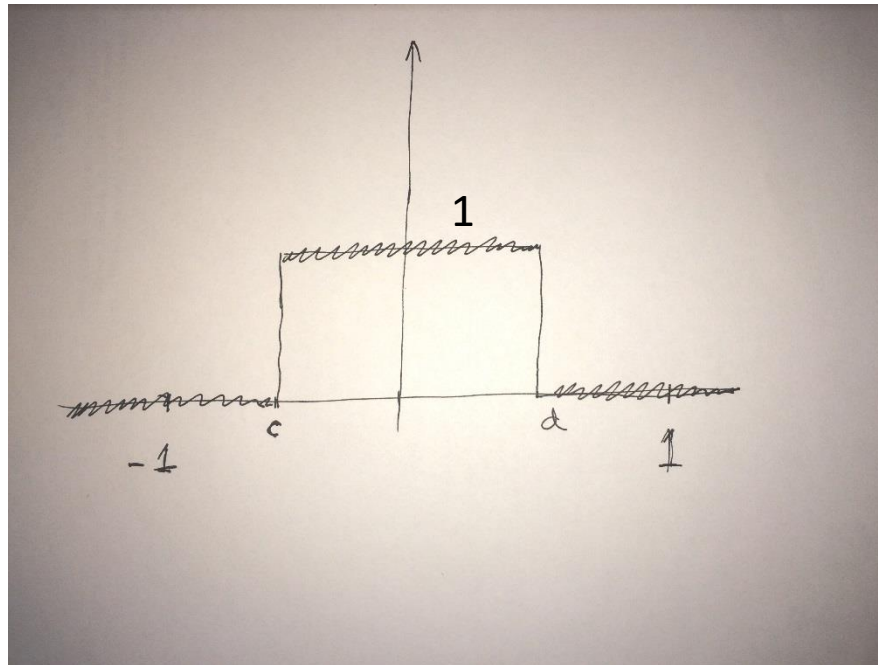


Figura para $L = 1$

$$\begin{array}{lll}
 s = \frac{n\pi t}{L} & t = L & s = n\pi \\
 & t = -L & s = -n\pi \\
 ds = \frac{n\pi}{L} dt & dt = \frac{L}{n\pi} ds &
 \end{array}$$

Vamos calcular a série de Fourier de $f_{c,d}^{(0)}$. Fazendo a mudança de variáveis $s = \frac{n\pi t}{L}$ obtemos

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{cL}^{dL} f(t) dt = \frac{1}{L} \int_{cL}^{dL} dt = d - c,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{cL}^{dL} f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{1}{L} \int_{cL}^{dL} \cos \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen} s \Big|_{n\pi c}^{n\pi d}, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{cL}^{dL} f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{1}{L} \int_{cL}^{dL} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt = -\frac{1}{n\pi} \cos s \Big|_{n\pi c}^{n\pi d}, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 S_f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} \\
 &= \frac{d-c}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\pi d - \operatorname{sen} n\pi c}{n} \cos \frac{n\pi t}{L} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi c - \cos n\pi d}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}.
 \end{aligned}$$

Exemplo 2.3. Vamos calcular a série de Fourier da função $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi \leq t < -\pi/4 \\ 1, & \text{se } -\pi/4 \leq t < \pi/2 \\ 0, & \text{se } \pi/2 \leq t < \pi \end{cases}$$

Usando a notação do Exemplo 2.1, podemos escrever

$$f(t) = f_{-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}^{(0)}(t), \quad \text{com } L = \pi.$$

Portanto usando os coeficientes que obtivemos para $f_{c,d}^{(0)}$ no Exemplo 2.1, com

$c = -\frac{1}{4}$ e $d = \frac{1}{2}$ temos que

$$S_f(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{n\pi}{4} \right) \cos nt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - \cos \frac{n\pi}{4} \right) \sin nt.$$

Pelo Teorema 2.1 (de Fourier) temos que f pode ser representada por sua série de Fourier

$$f(t) = S_f(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{n\pi}{4} \right) \cos nt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - \cos \frac{n\pi}{4} \right) \sin nt,$$

para $t \neq -\frac{\pi}{4}$ e $t \neq \frac{\pi}{2}$.

$$L = \pi, \quad c = -1/4, \quad d = 1/2$$

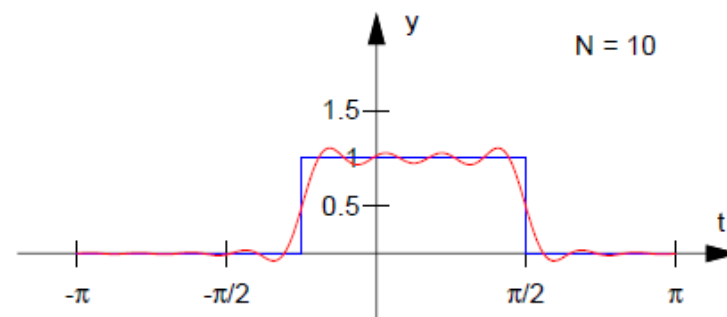
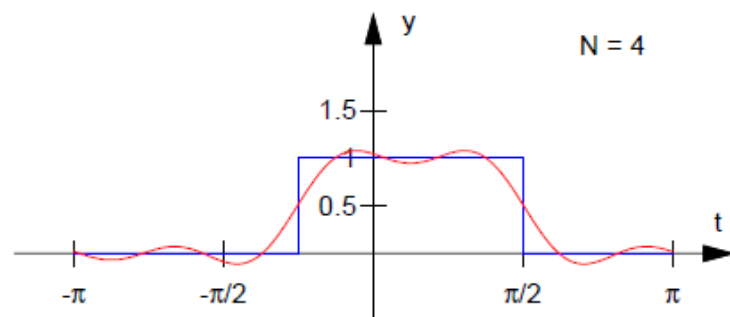
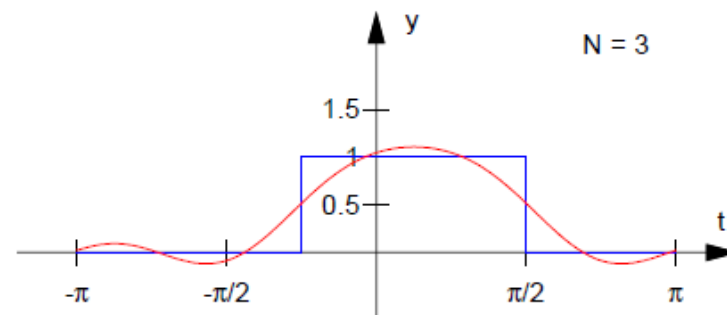
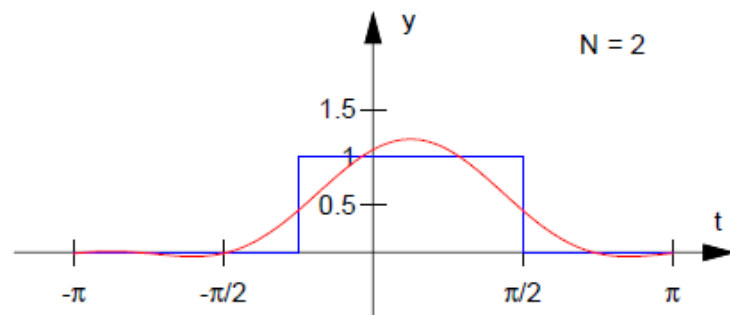
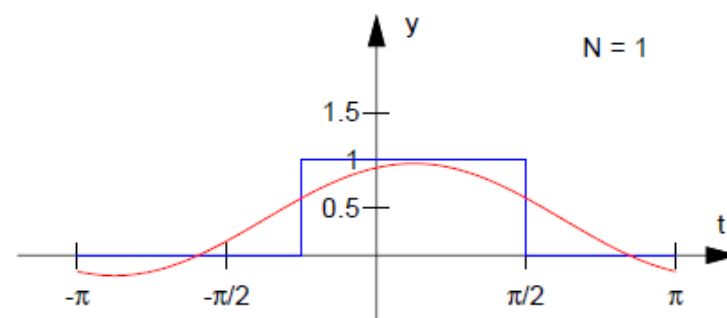
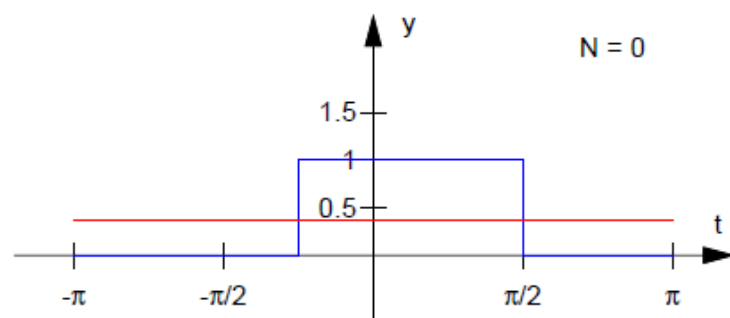


Figura 2.1 – Somas parciais da série de Fourier da função do Exemplo 2.1, para $N = 0, 1, 2, 3, 4, 10$

As funções $\cos \frac{n\pi t}{L}$ e $\sin \frac{n\pi t}{L}$ são periódicas com período (fundamental=menor período) igual a $\frac{2L}{n}$, para $n = 1, 2, 3, \dots$. Assim $2L$ é período comum a todas elas. Logo a série de Fourier de uma função $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica de período $T = 2L$. O termo constante

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt$$

representa a média da função f no intervalo $[-L, L]$ e está escrito desta forma ($\frac{a_0}{2}$ e não simplesmente a_0) somente para que a fórmula que vale para os coeficientes dos cossenos da série de Fourier fique valendo também para o termo constante ($n = 0$).

Como a série de Fourier é periódica de período $2L$ ela pode ser entendida como a série de Fourier da extensão periódica de f , $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que é definida por

$$\tilde{f}(t) = f(t), \quad \text{se } t \in [-L, L] \quad \text{e é tal que} \quad \tilde{f}(t + 2L) = \tilde{f}(t).$$

Ou seja, a série de Fourier de f é a mesma série de Fourier de $\tilde{f}$ que é a função que é periódica de período $2L$ e que coincide com f no intervalo $[-L, L]$. Assim temos a versão do Teorema de Fourier para funções periódicas.

Teorema 2.2 (Fourier para Funções Periódicas). *Para toda função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, a série de Fourier de f*

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sen \frac{n\pi t}{L},$$

em que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sen \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

converge para f nos pontos em que f é contínua. Ou seja, podemos representar f por sua série de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sen \frac{n\pi t}{L}, \quad \text{para } t \in \mathbb{R} \text{ em que } f \text{ é contínua.}$$

Exemplo 2.4. Vamos calcular a série de Fourier da função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi \leq t < -\pi/4 \\ 1, & \text{se } -\pi/4 \leq t < \pi/2 \\ 0, & \text{se } \pi/2 \leq t < \pi \end{cases} \quad \text{e tal que } g(t+2\pi) = g(t)$$

Esta função é a extensão periódica da função $f = f_{-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}^{(0)}$ com período igual a 2π . Logo a sua série de Fourier é a mesma da função do Exemplo anterior

$$S_g(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{n\pi}{4} \right) \cos nt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - \cos \frac{n\pi}{4} \right) \sin nt.$$

Pelo Teorema 2.1 (de Fourier) temos que g pode ser representada por sua série de Fourier

$$g(t) = S_g(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{n\pi}{4} \right) \cos nt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - \cos \frac{n\pi}{4} \right) \sin nt,$$

para $t \neq -\frac{\pi}{4} + 2n\pi$ e $t \neq \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

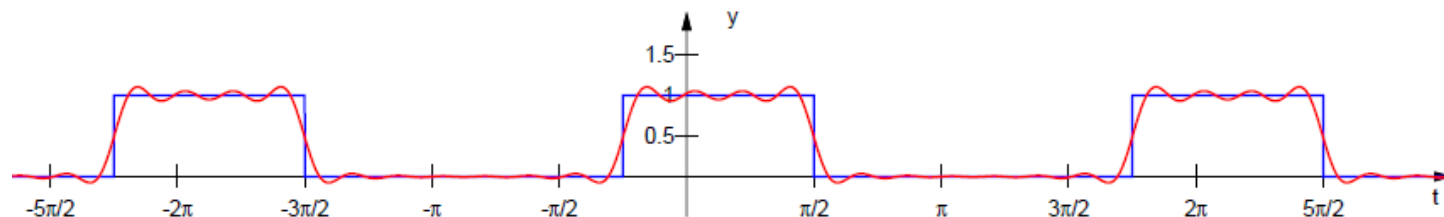


Figura 2.2 – Soma parcial da série de Fourier da função do Exemplo 2.4, com $N = 10$

Instrumentos necessários para obter séries de Fourier

Tabelas de integrais

$\int \sin x \, dx = -\cos x$	$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$	$\int \sin^3 x \, dx = -\frac{1}{3}\cos x (\sin^2 x + 2)$
$\int \cos x \, dx = \sin x$	$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$	$\int \cos^3 x \, dx = \frac{1}{3}\sin x (\cos^2 x + 2)$
$\int \tan x \, dx = -\ln \cos x $	$\int \tan^2 x \, dx = \tan x - x$	$\int \tan^3 x \, dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + \log \cos x$
$\int \csc x \, dx = \ln\left \tan \frac{x}{2}\right $	$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x$	$\int \cot^3 x \, dx = -\frac{1}{2}\cot^2 x - \log \sin x$
$\int \sec x \, dx = \ln \sec x + \tan x $	$\int \sec^2 x \, dx = \tan x$	$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$
$\int \cot x \, dx = \ln \sin x $	$\int \cot^2 x \, dx = -\cot x - x$	$\int \cot^3 x \, dx = -\frac{\cot^2 x}{2} - \log \sin x$
$\int \sin^4 x \, dx = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32}$	$\int \sin^n x \, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$	
$\int \cos^4 x \, dx = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32}$	$\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$	
$\int \tan^4 x \, dx = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x$	$\int \tan^n x \, dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x \, dx \quad n \neq 1$	
$\int \cot^4 x \, dx = -\frac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x$	$\int \cot^n x \, dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x \, dx \quad n \neq 1$	
$\int \sec^4 x \, dx = \frac{1}{3}\frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{2}{3}\tan x$	$\int \sec^n x \, dx = \frac{1}{(n-1)}\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$	
$\int \csc^4 x \, dx = -\frac{1}{3}\frac{\cos x}{\sin^3 x} - \frac{2}{3}\cot x$	$\int \csc^n x \, dx = -\frac{1}{(n-1)}\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$	
$\int \sin \frac{x}{a} \, dx = -a \cos \frac{x}{a}$	$\int \cos \frac{x}{a} \, dx = a \sin \frac{x}{a}$	
$\int \sin(a+bx) \, dx = -\frac{1}{b}\cos(a+bx)$	$\int \cos(a+bx) \, dx = \frac{1}{b}\sin(a+bx)$	

<http://integral-table.com/>

Relações trigonométricas

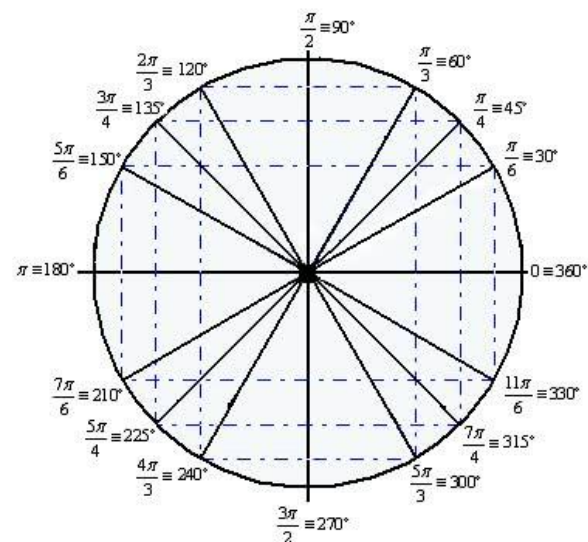


Table of Integrals*

Basic Forms	Integrals with Logarithms	Integrals with Trigonometric Functions	Integrals of Hyperbolic Functions
$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ (1)	$\int x \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{15a^2} (-2b^2 + abx + 3a^2 x^2) \sqrt{ax+b}$ (26)	$\int \ln ax dx = x \ln ax - x$ (42)	$\int e^x \cosh x dx = \frac{1}{2} e^x (\sinh x + \cosh x)$ (106)
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x $ (2)	$\int \frac{\ln ax}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln ax)^2$ (43)	$\int \sec x \tan x dx = \sec x$ (85)	$\int e^{ax} \cosh ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} (a \sinh ax + b \cosh ax)$ (107)
$\int u dv = uv - \int v du$ (3)	$\int \ln(ax+b) dx = \left(\frac{b^2}{4a^2} \ln a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)} \right)$ (27)	$\int \sec^2 x \tan x dx = \frac{1}{2} \sec^2 x$ (86)	$\int x e^x \sinh x dx = \frac{1}{2} e^x (x \cosh x - x \sinh x)$ (108)
$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b $ (4)	$\int \ln(ax+b) dx = \left(x + \frac{b}{a} \right) \ln(ax+b) - x, a \neq 0$ (44)	$\int \sec^3 x \tan x dx = \frac{1}{n} \sec^n x, n \neq 0$ (87)	$\int x e^x \cosh x dx = \frac{1}{2} e^x (x \cosh x - \sinh x)$ (109)
Integrals of Rational Functions	$\int \ln(x^2 + a^2) dx = x \ln(x^2 + a^2) + 2a \tan^{-1} \frac{x}{a} - 2x$ (45)	$\int \sin^n ax dx = -\frac{1}{n} \cos ax \cdot {}_2F_1 \left[\frac{1}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \cos^2 ax \right]$ (63)	$\int \cosh ax dx = \frac{1}{a} \sinh ax$ (110)
$\int \frac{1}{(x+a)^n} dx = -\frac{1}{(n-1)(x+a)^{n-1}}, n \neq 1$ (5)	$\int \ln(x^2 - a^2) dx = x \ln(x^2 - a^2) + a \ln \frac{x+a}{x-a} - 2x$ (46)	$\int \sin^3 ax dx = -\frac{3 \cos ax}{4a} + \frac{\cos 3ax}{12a}$ (66)	$\int \cosh^2 ax dx = \frac{1}{2} \cosh x \sinh x + \frac{1}{2} \ln \cosh x - \sinh x + C$ (88)
$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$ (6)	$\int \ln(ax^2 + bx + c) dx = \frac{1}{2} \sqrt{4ac - b^2} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} - 2x + \left(\frac{b}{2a} + x \right) \ln(ax^2 + bx + c)$ (47)	$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax$ (67)	$\int \csc^2 ax dx = -\frac{1}{a} \cot ax$ (89)
$\int x(x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}((n+1)x-a)}{(n+1)(n+2)}$ (7)	$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2} a^2 \ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2} $ (29)	$\int \cos^3 ax dx = \frac{3 \sin ax}{4a} + \frac{\sin 3ax}{12a}$ (68)	$\int \csc^3 ax dx = -\frac{1}{n} \csc^2 x \coth x - \frac{1}{n} \csc^2 x, n \neq 0$ (91)
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x$ (8)	$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (30)	$\int \csc^3 ax dx = -\frac{1}{a} \csc ax \cot ax - \frac{1}{a} \csc^3 ax$ (92)	$\int e^{ax} \cosh bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} (a \cosh bx - b \sinh bx), a \neq b$ (111)
$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$ (9)	$\int x \ln(ax+b) dx = \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{b^2}{a^2} \right) \ln(ax+b)$ (48)	$\int \sec^3 ax dx = \ln \tan x $ (92)	$\int \sinh ax dx = \frac{1}{a} \cosh ax$ (112)
$\int \frac{x}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln a^2 + x^2 $ (10)	$\int x \ln(x^2 - b^2 x^2) dx = -\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \ln(a^2 - b^2 x^2)$ (49)	$\int \sec x \csc x dx = \ln \tan x $ (92)	
$\int \frac{x^2}{a^2 + x^2} dx = x - a \tan^{-1} \frac{x}{a}$ (11)	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln x + \sqrt{x^2 + a^2} $ (32)	$\int \csc^3 ax dx = -\frac{1}{a} \csc ax \cot ax - \frac{1}{a} \csc^3 ax$ (93)	
$\int \frac{x^3}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} a^2 \ln a^2 + x^2 $ (12)	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a}$ (33)	$\int \csc^3 ax dx = -\frac{1}{a} \csc ax \cot ax - \frac{1}{a} \csc^3 ax$ (94)	
$\int \frac{1}{x^2 + a^2 + c^2} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac + b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac+b^2}}$ (13)	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \sqrt{x^2 + a^2}$ (34)	$\int \csc^3 ax dx = -\frac{1}{a} \csc ax \cot ax - \frac{1}{a} \csc^3 ax$ (95)	
$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a+x}{b+x}, a \neq b$ (14)	$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2}$ (35)	$\int \csc^3 ax dx = -\frac{1}{a} \csc ax \cot ax - \frac{1}{a} \csc^3 ax$ (96)	
$\int \frac{x}{(x+a)^2} dx = \frac{a}{a+x} + \ln a+x $ (15)	$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2} a^2 \ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2} $ (36)	$\int \csc^3 ax dx = -\frac{1}{a} \csc ax \cot ax - \frac{1}{a} \csc^3 ax$ (97)	
$\int \frac{x}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{2a} \ln ax^2 + bx + c - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$ (16)	$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{b+2ax}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{4ac-b^2}{32a^2} \ln 2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)} $ (37)	$\int \csc^3 ax dx = -\frac{1}{a} \csc ax \cot ax - \frac{1}{a} \csc^3 ax$ (98)	
Integrals with Roots	$\int x \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{48a^{3/2}} (2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} \times (-3b^2 + 2abx + 8a(c+ax^2)) + 3(b^3 - 4abc) \ln b+2ax+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)})$ (38)	$\int \csc^3 ax dx = -\frac{1}{a} \csc ax \cot ax - \frac{1}{a} \csc^3 ax$ (99)	
$\int \sqrt{x-a} dx = \frac{2}{3} (x-a)^{3/2}$ (17)	$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{1}{\sqrt{4ac-b^2}} \ln 2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)} $ (39)	$\int \csc^3 ax dx = -\frac{1}{a} \csc ax \cot ax - \frac{1}{a} \csc^3 ax$ (100)	
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = 2 \sqrt{a^2 - x^2}$ (18)	$\int x \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{48a^{3/2}} (2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} \times (-3b^2 + 2abx + 8a(c+ax^2)) + 3(b^3 - 4abc) \ln b+2ax+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)})$ (38)	$\int \csc^3 ax dx = -\frac{1}{a} \csc ax \cot ax - \frac{1}{a} \csc^3 ax$ (101)	
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = 2 \sqrt{a^2 + x^2}$ (19)	$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{b}{2a^{3/2}} \ln 2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)} $ (40)	$\int \csc^3 ax dx = -\frac{1}{a} \csc ax \cot ax - \frac{1}{a} \csc^3 ax$ (102)	
$\int x \sqrt{x-a} dx = \frac{2}{3} a(x-a)^{3/2} + \frac{2}{5} (x-a)^{5/2}$ (20)	$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{1}{\sqrt{4ac-b^2}} \ln 2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)} $ (39)	$\int \csc^3 ax dx = -\frac{1}{a} \csc ax \cot ax - \frac{1}{a} \csc^3 ax$ (103)	
$\int \sqrt{ax+b} dx = \left(\frac{b}{3a} + \frac{2x}{3} \right) \sqrt{ax+b}$ (21)	$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{b}{2a^{3/2}} \ln 2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)} $ (40)	$\int \csc^3 ax dx = -\frac{1}{a} \csc ax \cot ax - \frac{1}{a} \csc^3 ax$ (104)	
$\int (ax+b)^{3/2} dx = \frac{2}{5a} (ax+b)^{5/2}$ (22)	$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{b}{2a^{3/2}} \ln 2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)} $ (40)	$\int \csc^3 ax dx = -\frac{1}{a} \csc ax \cot ax - \frac{1}{a} \csc^3 ax$ (105)	
$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2}$ (23)	$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = -\frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}}$ (41)	$\int \csc^3 ax dx = -\frac{1}{a} \csc ax \cot ax - \frac{1}{a} \csc^3 ax$ (106)	
$\int \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx = \sqrt{a(x-a)} - a \ln \sqrt{x} + \sqrt{x-a} $ (25)		$\int \csc^3 ax dx = -\frac{1}{a} \csc ax \cot ax - \frac{1}{a} \csc^3 ax$ (107)	

*© 2014. From <http://integral-table.com>, last revised June 14, 2014. This material is provided as is without warranty or representation about the accuracy, correctness or suitability of the material for any purpose, and is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 United States License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

TRIGONOMETRIC IDENTITIES

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

$$\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$$

$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$$

$$\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

$$\sin(A)\sin(B) = \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{2}$$

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{\cos(A+B) + \cos(A-B)}{2}$$

$$\sin(A)\cos(B) = \frac{\sin(A+B) + \sin(A-B)}{2}$$

$$\cos(A)\sin(B) = \frac{\sin(A+B) - \sin(A-B)}{2}$$

$$\sin(A) + \sin(B) = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos(A) + \cos(B) = -2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\sin(A) - \sin(B) = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos(A) - \cos(B) = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\sin^2(A) - \sin^2(B) = \sin(A+B)\sin(A-B)$$

$$\cos^2(A) - \cos^2(B) = -\sin(A+B)\sin(A-B)$$

$$\cos^2(A) - \sin^2(B) = \cos(A+B)\cos(A-B)$$

Um primeiro exercício: Encontre a série de Fourier para a função do exercício:

1.4. Determine a série de Fourier da função $f_{c,d}^{(2)} : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

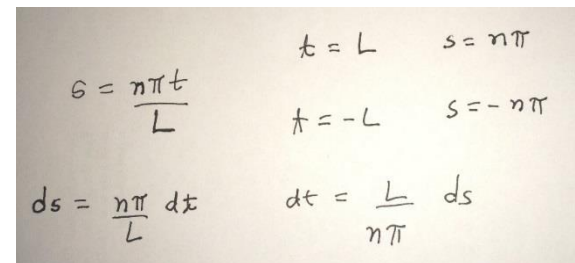
$$f_{c,d}^{(2)}(t) = \begin{cases} t^2, & \text{se } cL < t \leq dL, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad \text{para } c \text{ e } d \text{ fixos satisfazendo } -1 \leq c < d \leq 1.$$

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L},$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

+

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$



$$\begin{aligned} s &= \frac{n\pi t}{L} & t=L & \quad s=n\pi \\ & & t=-L & \quad s=-n\pi \\ ds &= \frac{n\pi}{L} dt & dt &= \frac{L}{n\pi} ds \end{aligned}$$

+ Tabelas de integrais

+ Relações trigonométricas

Escolha um valor arbitrário para c e d e implemente um código python que calcula a série e compara com a função plotando o gráfico de ambas

MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2020

Roteiro do curso

- Introdução
- Séries de Fourier
- Método de Diferenças Finitas
- Equação do calor transiente (parabólica)
- Equação de Poisson (elíptica)
- Equação da onda (hiperbólica)