Estatística de Redes Sociais: Primeiro Modelo

Bruno de Almeida Nussenzveig, Nº USP 4627347

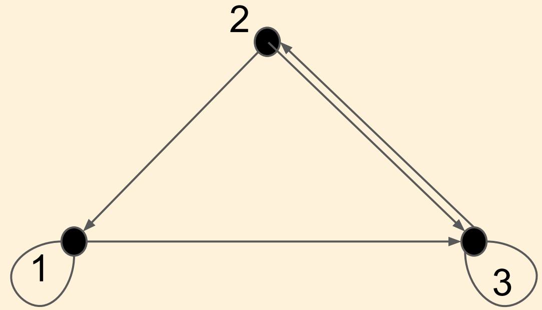
BASES DO MODELO (1)

1. Conjunto finito $A = \{a_1, \ldots, a_N\}$ de atores;
2. Para cada ator a, um subconjunto I(a) de A. Interpretamos o conjunto I(a) como sendo o conjunto dos atores que **influenciam** o ator a;
3. Conjunto $O = \{1, -1\}$ de opiniões;
4. Sequência de funções $\{X_n\}_{n\geq 0}$ de A em O, isto é, uma regra que associa a cada ator a uma opinião $X_n(a)$. Interpretamos $X_n(a)$ como a última opinião proferida pelo ator a **até** o instante n;

Os itens 1. e 2. do modelo podem ser usados para definir um **grafo** que represente a rede. Um grafo G consiste numa dupla (V, E), onde V é um conjunto (de **vértices** ou **nós**) e E é um subconjunto de V×V (cujos elementos (v_1, v_2) são interpretados como **arestas** ligando o vértice v_1 ao vértice v_2).

BASES DO MODELO (2)

Exemplo de um grafo: G = ({1, 2, 3}, E = {(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 3)}). Esse grafo pode ser representado esquematicamente por um conjunto de pontos ligados por setas:



Podemos definir um grafo em cima do nosso conjunto de atores com seus conjuntos de influenciadores da seguinte forma:
colocamos $V = A$, e colocamos $E = \{(a_1, a_2) \in A \times A \,;\, a_1 \in I(a_2)\}$

O MODELO (1)

Para cada ator a e instante n, definimos os números

$U_a^n(+)$ = número de elementos do conjunto $\{b \in I(a) \,;\, X_n(b) = 1\}$

e

U_a = número de elementos do conjunto $I(a)$

Definimos também

$p_a^n(+) = U_a^n(+) \,/\, U_a^n.$

O MODELO (2)

O modelo segue então segue a seguinte receita: para um número inteiro $T \geq 1$ (número de iterações), fazemos:

1) Para cada ator a, escolher $X_0(a)$ entre 1 e -1 com igual probabilidade;
2) Para cada n entre 0 e T-1:
   a) para cada ator a definir $X_{n+1}(a) = X_n(a)$;
   b) escolher um ator b em A com igual probabilidade;
   c) contar $U_b^n(+)$;
   d) calcular $p_b^n(+)$;
   e) redefinir $X_{n+1}(b) = 1$ com probabilidade $p_b^n(+)$ e $X_{n+1}(b) = -1$ com probabilidade $p_b^n(-) = 1 - p_b^n(+)$;

O ALGORITMO (1)

Podemos montar um algoritmo que realiza esse modelo. Nas próximas transparências, apresento um pseudocódigo para esse algoritmo, com construção modular.

Entrada: um inteiro $T \geq 1$, um inteiro $N \geq 1$, um arquivo contendo o grafo de atores;
Saída: um arquivo contendo a lista de opiniões dos atores a cada iteração, um arquivo contendo a proporção de atores com opinião "+" a cada iteração;

Algoritmos:

- principal(inteiro T, inteiro N, arquivo entrada, arquivo saída1, arquivo saída2);
- grafo lêGrafo(inteiro N, arquivo entrada);
- destróiGrafo(grafo G);
- iniciaOpiniões(grafo G, arquivo saída1, arquivo saída2);
- atualizaOpiniões(grafo G, arquivo saída1, arquivo saída2).

O ALGORITMO (2)

```
principal(inteiro T, inteiro N, arquivo entrada, arquivo saída1, arquivo saída2){
 1.   grafo G ← lêGrafo(N, entrada)
 2.   iniciaOpiniões(G, saída1, saída2)
 3.   para n entre 0 e T-1:
        a.   atualizaOpiniões(G, saída1, saída2)
 4.   destróiGrafo(G)
 5.   fim
}
```

```
grafo lêGrafo(inteiro N, arquivo entrada){
 1.   grafo G ← [redacted]
 2.   devolve G
}
```

O ALGORITMO (3)

iniciaOpiniões(grafo G, arquivo saída1, arquivo saída2){

1. $U(+) \leftarrow 0$
2. para cada vértice v em G:
    a. sorteia s uniformemente entre 0 e 1
    b. se (s <= 0.5)
        i. $X_{atual}(v) \leftarrow 1$
        ii. $U(+) \leftarrow U(+) + 1$
        iii. imprime "1 " em saída1
    c. senão
        i. $X_{atual}(v) \leftarrow -1$
        ii. imprime "-1 " em saída
3. imprime "\n" em saída1
4. imprime "U(+) / tamanho(G) \n" em saída2
5. fim

}

destróiGrafo(grafo G){

1. [redacted]
2. fim

}

- atualizaOpiniões(grafo G, arquivo saída1, arquivo saída2).

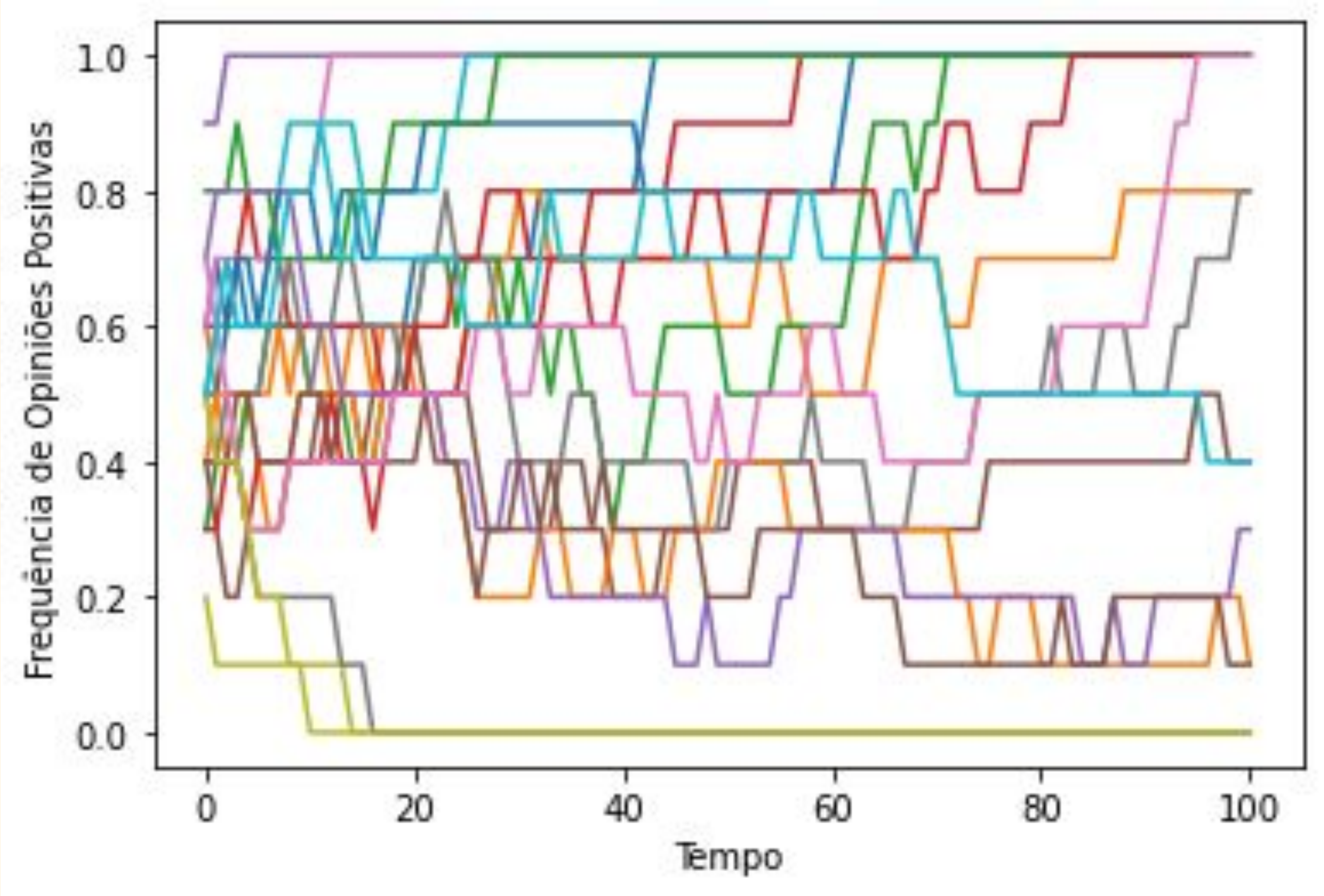
O ALGORITMO (4)

atualizaOpiniões(grafo G, arquivo saída1, arquivo saída2){

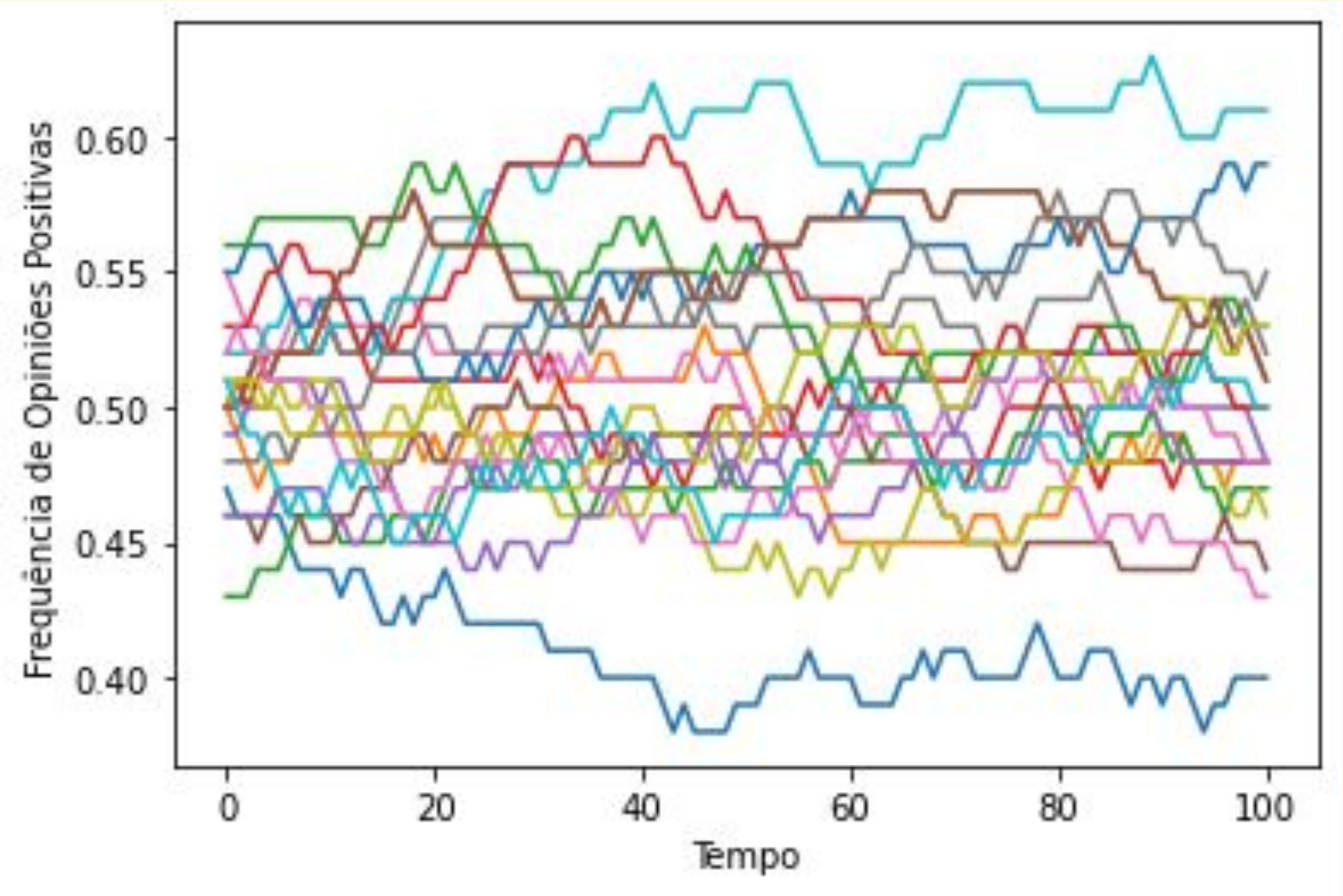
1. sorteia s uniformemente entre 0 e 1
2. Divide [0,1) em N partes iguais de tam. 1/N (N = tam. de G), e escolhe o vértice v tal que s está no subintervalo correspondente a v
3. $U_v \leftarrow 0$ (número de vizinhos de v), $U_v^+ \leftarrow 0$ (número de vizinhos de v com opinião positiva)
4. para cada vértice w em G:
    a. se (w influencia v)
        i. $U_v \leftarrow U_v + 1$
        ii. se (X_{atual}(w) = 1)
            1. $U_v^+ \leftarrow U_v^+ + 1$
5. $p_v^+ \leftarrow U_v^+ / U_v$
6. sorteia r uniformemente entre 0 e 1
    a. se ($r \leq p_v^+$)
        i. $X_{atual}(v) = 1$
    b. senão
        i. $X_{atual}(v) = -1$
7. imprime lista de opiniões atual para saída1
8. imprime proporção de opiniões positivas atual para saíd2
9. fim

}

SIMULAÇÕES (1)



SIMULAÇÕES (2)



CONSENSO

1. Flutuações aleatórias que dependem só do estado anterior;

2. Formação de consenso é mais fácil/mais rápida para redes menores que para redes maiores;

3. Mudanças de opinião nó por nó eliminam pontos periódicos;

4. Quase-consensos são reversíveis;

5. Modelo simétrico → consensos (+) e (-) equiprováveis → necessidade de muitas replicatas;

6. $Z_N^{+,T}$ e $Z_N^{+,T}$, os números de consensos (+) e (-) para N replicatas em T gerações, são variáveis aleatórias i.i.d? Teorema do Limite Central em N para T fixo?

7. Redes analisadas são "típicas"?

PONTOS FIXOS

Pontos fixos = consensos para exemplo 1 e exemplo 2

Mais geralmente… pontos fixos = consensos locais (i.e. em cada componente conexa)

OBRIGADO!!