SME 141
Assunto: Álgebra Linear
Aula AL-2 – Projeções em $\mathbb{R}^n$
(15 min)

Prof. Miguel Frasson

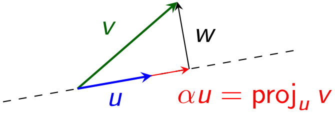
Setembro de 2020

Projeção ortogonal numa reta

1. Uma reta que passa pela origem tem equação paramética xu, onde $x \in \mathbb{R}$ e $u \neq 0$ é um vetor direção.
2. Dado outro vetor v, podemos decompô-lo em duas parcelas:
    - Uma múltipla de u,
      chamada projeção ortogonal de v na direção u
    - Outra ortogonal a u
    - Assim: $v = \alpha u + w, \quad u \cdot w = 0.$
3. Fazendo as contas:

$$u \cdot v = u \cdot (\alpha u + w) = u \cdot (\alpha u) + u \cdot w = \alpha \|u\|^2$$

Portanto $\alpha = \dfrac{u \cdot v}{\|u\|^2} \in \mathbb{R}.$



4. Assim, $\quad \mathrm{proj}_u(v) = \dfrac{u \cdot v}{\|u\|^2} u$

Projeção ortogonal num plano

1. Dado um plano π que passa pela origem, seja $n \neq 0$ um vetor ortogonal a π
2. Uma equação do plano é $u \in \pi \iff u \cdot n = 0$.
3. Se calculamos $\text{proj}_n(v)$
   - este vetor é múltiplo de n e portanto é ortogonal ao plano π.
   - $v = \text{proj}_n(v) + w$, com $w \cdot n = 0$
   - Portanto $w \in \pi$,

$$w = v - \text{proj}_n(v) = v - \frac{u \cdot n}{\|n\|^2} n.$$

4. $\text{proj}_\pi(v) = w$ é a projeção de v em π.

Aplicação: conjuntos ortogonais e projeções

- Mais adiante no curso, vamos escrever vetores como combinação linear de elementos de bases.
- Se a base tem n vetores, normalmente, isso leva a um sistema $n \times n$.
- Quando a base é formada por vetores dois a dois ortogonais, esse sistema simplifica-se com a solução expressa com produto interno.
- Usaremos esse truque na aplicação JPEG que veremos a seguir.

Aplicação: conjuntos ortogonais e projeções

- Sejam os vetores u_1, u_2, ..., u_n não nulos.
- u_i sejam dois a dois ortogonais: $u_i \cdot u_j = 0, \quad i \neq j$.
- Queremos escrever $x \in \mathbb{R}^n$ como combinação linear dos u_i:

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n.$$

- Usando o produto interno com u_1, podemos calcular α_1:

$$\begin{aligned} x \cdot u_1 &= (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n) \cdot u_1 \\ &= \alpha_1 u_1 \cdot u_1 + \alpha_2 u_2 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \cdot u_1 \\ &= \alpha_1 u_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cancelto{0}{u_2 \cdot u_1} + \cdots + \alpha_n \cancelto{0}{u_n \cdot u_1} \\ \therefore \quad \alpha_1 &= \frac{x \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} \end{aligned}$$

Aplicação: conjuntos ortogonais e projeções

- $\alpha_1 = \dfrac{x \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}$
- Analogamente para cada α_i, $i = 2, \ldots, n$:

$$\alpha_i = \frac{x \cdot u_i}{u_i \cdot u_i}$$

- Queremos escrever $x \in \mathbb{R}^n$ como combinação linear dos u_i:

$$x = \frac{x \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{x \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 + \cdots + \frac{x \cdot u_n}{u_n \cdot u_n} u_n.$$

- Se os u_1 são unitários ($\|u_i\| = 1$), a fórmula se simplifica mais:

$$x = (x \cdot u_1) u_1 + (x \cdot u_2) u_2 + \cdots + (x \cdot u_n) u_n.$$

Aplicação: compressão de imagens JPEG

- No próximo conjunto de slides, veremos como essa ideia de escrever vetores em termos de vetores ortogonais é usada na compressão de imagens JPEG.