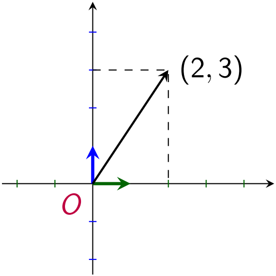
# SME 141
## Assunto: Álgebra Linear
### Aula AL-1 – $\mathbb{R}^n$, o espaço vetorial "protótipo" (30 min)

Prof. Miguel Frasson

Setembro de 2020

# O espaço $\mathbb{R}^n$

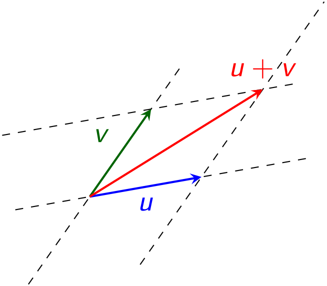
1. $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$
2. Os vetores do plano podem ser representados por $(x, y) \in \mathbb{R}^2$




3. Os vetores do espaço podem ser representados por $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

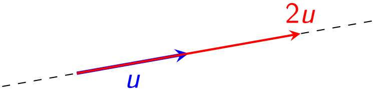
# Operações usuais com vetores

SOMA




$$u = (u_1, u_2), \quad v = (v_1, v_2) \implies u+v = (u_1+v_1, u_2+v_2)$$

PRODUTO POR ESCALAR




$$k \in \mathbb{R}, \quad u = (u_1, u_2) \implies ku = (ku_1, ku_2)$$

# Propriedades dos vetores no plano ou espaço

$u$, $v$ vetores, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (escalares)

A1) $(u + v) + w = u + (v + w)$

A2) $u + v = v + u$

A3) $u + 0 = u, \quad \forall u$ (0 é o vetor nulo)

A4) dado $u$, existe $v$ tal que $u + v = 0$
(notação: $v = -u$)

M1) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$

M2) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

M3) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

M4) $1u = u$

# Combinação linear

1. Dados $p$ vetores $u_1, u_2, \ldots, u_p$ e $p$ números reais $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$, chama-se de combinação linear de $u_1, u_2, \ldots, u_p$ ao vetor

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p.$$

2. Exemplo: $(3, 1, 0, 5) \in \mathbb{R}^4$ é combinação linear de $(6, 3, 1, 7)$, $(3, 2, 1, 2)$ e $(0, 2, 2, 8)$ pois

$$1 \cdot (6, 3, 1, 7) + (-1) \cdot (3, 2, 1, 2) + 0 \cdot (0, 2, 2, 8) = (3, 1, 0, 5).$$

3. Exemplo: Já o vetor $(6, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$ não é combinação linear de $(1, 0, 0)$, $(3, 2, 1)$ e $(5, 2, 1)$, pois o sistema abaixo é impossível

$$x(1, 0, 0) + y(3, 2, 1) + z(5, 2, 1) = (6, 1, 0)$$

# Base canônica

1. Todo vetor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores

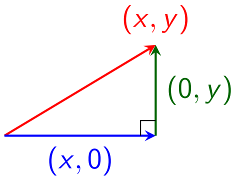
$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

2. Esses vetores formam a base canônica.
3. Geometricamente, esses vetores são ortogonais.

# Norma de vetores no plano e no espaço

1. Definimos a norma de um vetor em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ como seu comprimento. Notação: $\|u\|$

2. Pelo teorema de Pitágoras, $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

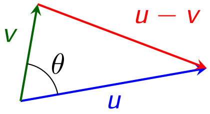


# Produto interno: ângulo

1. Definição em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ motivada pela geometria:

$$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos\theta$$

   onde $\theta$ é o ângulo entre os vetores $u$ e $v$.

2. 


$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\| \, \|v\| \cos\theta \quad \text{(Lei dos Cossenos)}$$

3. $u = (a, b), \quad v = (c, d)$
   $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2(ac + bd)$
4. Portanto $u \cdot v = ac + bd$

# Propriedades do produto interno

1. Ângulo: $\cos\theta = \dfrac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$
2. Produto interno e coordenadas: $u = (a, b, c), v = (x, y, z)$

$$u \cdot v = ax + by + cz$$

3. Norma de um vetor: $u \cdot u = \|u\|^2$
4. Simétrico: $u \cdot v = v \cdot u$
5. Produto interno é linear em cada entrada

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$$
$$u \cdot (\alpha v) = \alpha(u \cdot v)$$

6. Desigualdade de Cauchy-Schwarz: $|u \cdot v| \leqslant \|u\| \, \|v\|$

# Exemplo – desigualdade triangular: $\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$

Mostrar que $\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

(Dica: é mais fácil pensar na desigualdade com quadrados.)

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 &= (u+v)\cdot(u+v) \\
&= (u+v)\cdot u + (u+v)\cdot v && \text{(distributiva)} \\
&= u\cdot u + v\cdot u + u\cdot v + v\cdot v \\
&= \|u\|^2 + 2u\cdot v + \|v\|^2 && (u \leqslant |u|) \\
&\leqslant \|u\|^2 + 2|u\cdot v| + \|v\|^2 && \text{(usando Cauchy-Schwarz)} \\
&\leqslant \|u\|^2 + 2\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 \\
&= (\|u\| + \|v\|)^2 && \text{(c.q.d.)}
\end{aligned}$$

# Exemplo – Vetores ortogonais: $u \cdot v = 0$

1. Exemplo: encontrar todos os vetores ortogonais a $n = (2, -1, 0)$.
2. Seja $v = (x, y, z)$ um vetor ortogonal a $n$.

   $$0 = (x, y, z) \cdot (2, -1, 0) = 2x - y.$$

   Então $v$ está contido no plano de equação $2x - y = 0$.
3. Por outro lado, se $u$ está nesse plano, para satisfazer a equação, devemos ter $u = (x, 2x, z)$.

   $$u \cdot n = (x, 2x, z) \cdot (2, -1, 0) = 2x - 2x = 0$$

   e portanto $u$ é ortogonal a $n$.
4. Resposta: o conjunto dos vetores ortogonais a $n$ é o plano de equação $2x - y = 0$.