

Griffiths, Capítulo I

1. Sugestões de leitura: Cap. 4 do Tipler, itens 4.3 e 4.6. Cohen, Cap.I, itens A1, A2, B1 e B2 e Complementos A_1 , B_1 e D_1 . Eisberg, Fundamentos da Física Moderna, Cap. 6 e 7 itens 1, 2 e 3. Caruso e Oguri, Física Moderna, Cap. 14 (IFSC 539C329f).
2. Um elétron é acelerado do repouso por uma diferença de potencial V (em volts). Mostre que seu comprimento de onda em nanômetros é dado por $\lambda = 1.226/\sqrt{V}$. Considere o regime não relativístico em que $eV \ll mc^2$. Para qual potencial V o comprimento de onda se torna da ordem de um espaçamento cristalino? Acima de qual tensão V seria necessário o tratamento relativístico?
3. Griffiths, prob. 1.18: Considere um conjunto de partículas livres, de massa m cada, cuja energia cinética é dada apenas pela agitação térmica. Abaixo de qual temperatura esse sistema é quântico se:
 - (a) for um conjunto de elétrons cuja separação típica seja da ordem de 0,3 nm? É o caso de elétrons mais periféricos dos átomos de um sólido. Resp.: da ordem de 10^5 graus, ou seja, esse sistema é sempre quântico;
 - (b) for um gás ideal, em que vale $PV = NRT$. Considere por exemplo o gás He a pressão de 1 atm e $T = 300$ K. Aqui você deve considerar que o volume ocupado pelo gás seja dado por $V = Nd^3$.
4. Mostre que para um potencial constante e uniforme, isto é, $V(x, t) = V_0$, a solução $\psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$ da equação de Schrödinger resulta na expressão correta para a conservação da energia neste problema (partícula livre).
5. Considere que as funções de onda $\psi_n(x, t)$, com $n = 1, 2, \dots, N$, satisfazem à Eq. de Schrödinger. Mostre, então, que qualquer combinação linear das mesmas, isto é, $\sum_n c_n \psi_n(x, t)$ com c_n constantes, também satisfaz essa equação. Isso se deve à linearidade dessa equação, uma característica necessária para garantir o princípio de superposição.
6. A normalização da função de onda exige que $\int \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx = C$. Mostre que C independe do tempo, validando assim escolhê-la constante, igual à unidade.
7. Griffiths prob. 1.17. A função de onda de uma partícula, em $t = 0$, é dada por $\psi(x, 0) = A(a^2 - x^2)$ se $-a \leq x \leq a$ e $\psi(x, 0) = 0$ caso contrário, sendo A e a constantes. Qual a unidade de ψ ? Determine a constante de normalização A . Encontre os valores esperados dos operadores x e p . Determine as incertezas Δx e Δp . Verifique a consistência com o princípio de incerteza. Qual a probabilidade de numa medida da posição resultar valores entre $-a/2$ e $a/2$?

8. Suponha que a energia potencial seja da forma $V(x, y, z) = V_1(x) + V_2(y) + V_3(z)$. Mostre, por substituição direta, que a solução da Eq. de Shrödinger tridimensional é da forma separável $\Psi(x, y, z) = \psi_1(x)\psi_2(y)\psi_3(z)$, encontrando as equações que cada ψ_i deva obedecer. Como é expressa a energia do problema tridimensional em termos das energias dos problemas unidimensionais? Aproveite esse resultado e mostre que a solução para uma partícula livre em três dimensões é $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$, com $\hbar^2 k^2/2m = \hbar\omega$.
9. Calcule a corrente de probabilidade correspondente à função de onda (partícula livre) $\psi(x, t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$. Expresse em termos da velocidade $v = p/m = \hbar k/m$ e $|A|^2$. Compare essa expressão com a corrente de cargas q num fio cujos portadores tem velocidade v e densidade volumétrica n . Que grandeza faz o papel do produto nq ?
10. Determine a corrente de probabilidade nos seguintes casos: (a) função de onda puramente real; (b) função de onda puramente imaginária.
11. Sendo P_{ab} a probabilidade de uma partícula ser encontrada no intervalo $a < x < b$, mostre que $dP_{ab}/dt = j(a, t) - j(b, t)$, sendo $j(x, t)$ a corrente de probabilidade.
12. A função de onda (do estado fundamental) de uma partícula (massa m) vinculada a se mover livremente apenas entre $x = -L/2$ e $x = L/2$ é dada por $\phi(x) = A\cos(\pi x/L)$ (veremos isso no capítulo seguinte). Determina a constante de normalização A . Calcule os valores esperados dos operadores x , p , x^2 e p^2 nesse estado. Justifique alguns de seus resultados usando argumentos de simetria. Finalmente, verifique que o produto $\Delta x \Delta p$ satisfaz o princípio de incerteza, isto é, $\Delta x \Delta p > \hbar/2$. Use que $\int x \cos \alpha x \, dx = d/d\alpha \int \sin \alpha x \, dx$.
13. Use as equações de Ehrenfest, para as derivadas temporais de $\langle x \rangle(t)$ e de $\langle p \rangle(t)$, para potenciais da forma $V(x) = Ax^n$, com A e n constantes. Para quais valores de n as médias $\langle x \rangle(t)$ e $\langle p \rangle(t)$ obedecem Mecânica Clássica? Observação: foi escrito $\langle x \rangle(t)$ e não $\langle x(t) \rangle$. Por que? Qual forma tem sentido e por que?
14. Mostre que para quaisquer duas soluções (normalizáveis) da Eq. de Schr. temos

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(x, t)^* \psi_2(x, t) dx = 0 .$$

15. Griffiths, prob. 1.15. Como você viu em classe, para garantir a conservação da probabilidade numa dada região em que uma partícula esteja vinculada a existir foi importante considerar a energia potencial real. Uma forma (fenomenológica) de se considerar a possibilidade de decaimento de uma partícula é considerar $V(x) = V_v(x) - i\Gamma$, sendo $V_v(x)$ a energia vinda de potenciais reais e Γ uma constante. Mostre que a probabilidade de se encontrar a partícula numa região obedece à equação $dP/dt = -2\Gamma P/\hbar$. Resolva para $P(t)$ e relacione o tempo de vida médio τ com Γ .