PME 2556 – Dinâmica dos Fluidos Computacional

Aula 2 – Equação da Energia, Equação Geral de Transporte e Principais Métodos de Solução

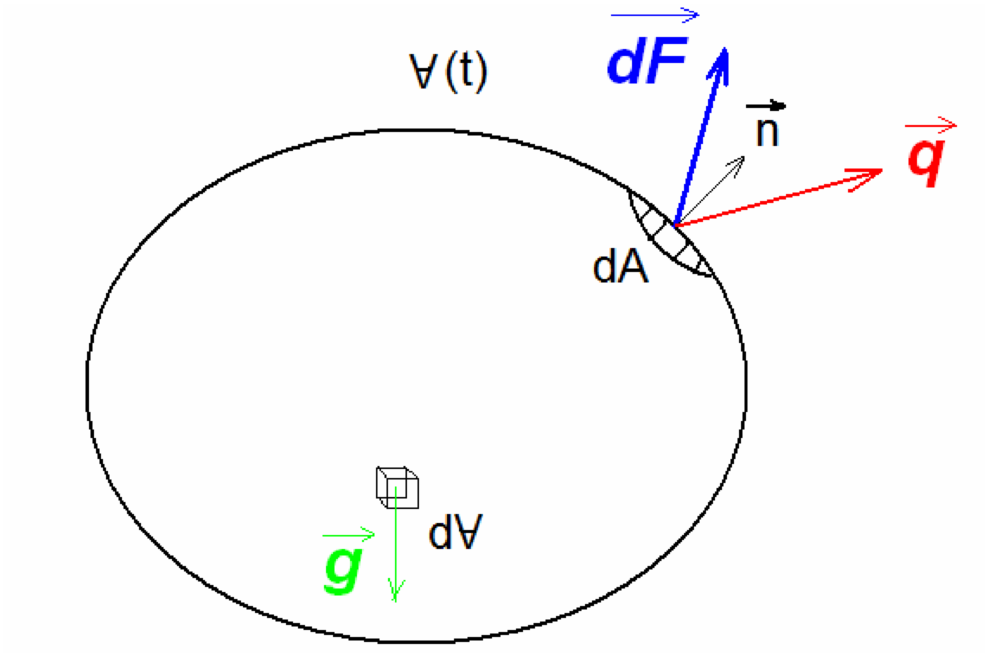
2.1 Equação da Energia Total

Energia Interna: $$d\hat{u} = c_v \, dT$$

Energia Total: $$e = \hat{u} + \frac{u^2}{2} = \hat{u} + \frac{u_i \, u_i}{2}$$

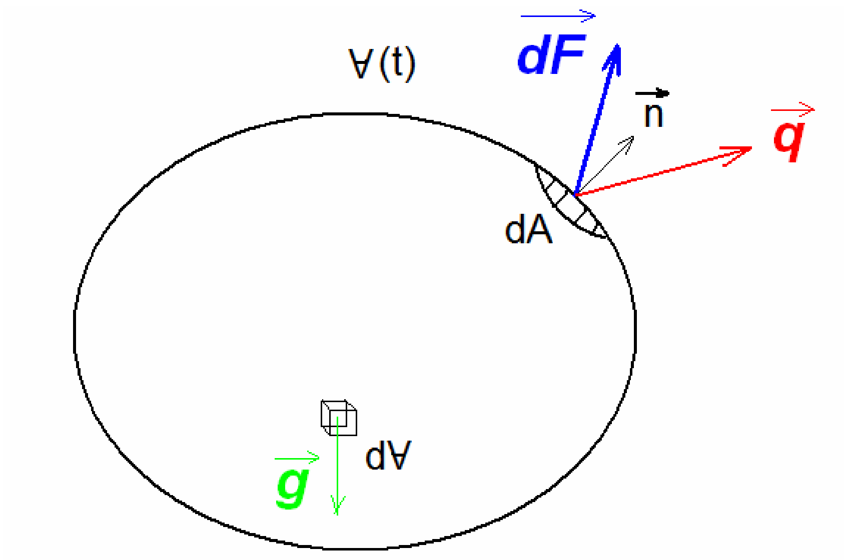
2.1 Equação da Energia Total

$$\int_{\forall(t)} \rho \frac{De}{Dt} d\forall = -\dot{Q} + \dot{W}_{forças\ externas}$$



2.1 Equação da Energia Total

$$\dot{W}_{forças\ externas} = \underbrace{\int_{\forall(t)} \rho \vec{u} \cdot \vec{g}\, d\forall}_{\text{forças de campo}} + \underbrace{\int_{S(t)} \vec{u} \cdot d\vec{F}}_{\text{forças de contato}}$$

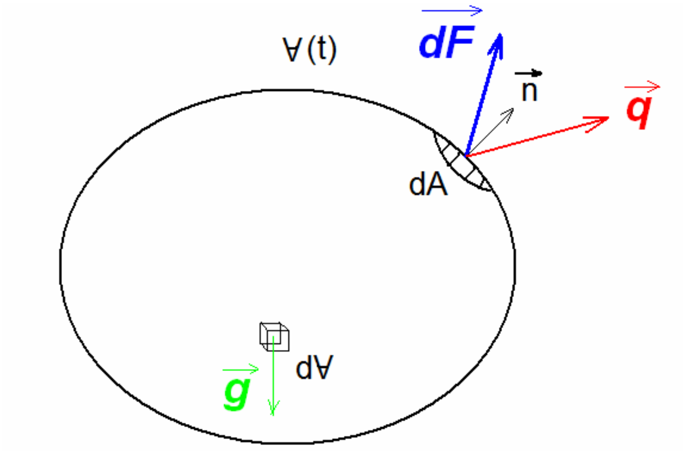


$$\dot{W}_{forças\ externas} = \int_{\forall(t)} \rho u_i\ g_i\, d\forall + \int_{S(t)} u_i \underbrace{n_j\, \sigma_{ji}\, dA}_{dF_i}$$

2.1 Equação da Energia Total

$$\dot{Q} = \int_{S(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} \, dA = \int_{S(t)} q_j n_j \, dA$$

Onde: $\vec{q} = -k \nabla T \quad ou \quad q_j = -k \dfrac{\partial T}{\partial x_j}$



Logo: $$\dot{Q} = -\int_{S(t)} k \frac{\partial T}{\partial x_j} n_j \, dA$$

2.1 Equação da Energia Total

$$\int_{\forall(t)} \rho \frac{De}{Dt} d\forall = -\dot{Q} + \dot{W}_{forças \quad externas}$$

Resulta:

$$\int_{\forall(t)} \rho \frac{De}{Dt} d\forall = \int_{S(t)} u_i \, n_j \, \sigma_{ji} \, dA + \int_{\forall(t)} \rho u_i \, g_i \, d\forall + \int_{S(t)} k \frac{\partial T}{\partial x_j} n_j \, dA$$

Usando o teorema de Gauss:

$$\int_{\forall(t)} \rho \frac{De}{Dt} d\forall = \int_{\forall(t)} \frac{\partial (u_i \, \sigma_{ji})}{\partial x_j} d\forall + \int_{\forall(t)} \rho u_i \, g_i \, d\forall + \int_{\forall(t)} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) d\forall$$

2.1 Equação da Energia Total

Fazendo $\forall \rightarrow d\forall$:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \frac{\partial (u_i \sigma_{ji})}{\partial x_j} + \rho u_i g_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)$$

Ou:

$$\boxed{\frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j e)}{\partial x_j} = \frac{\partial (u_i \sigma_{ji})}{\partial x_j} + \rho u_i g_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)}$$

2.2 Equação da Energia Térmica

Substituindo: $$e = \hat{u} + \frac{u_i\, u_i}{2}$$

Temos: $$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} + \rho \frac{1}{2} \frac{D(u_i\, u_i)}{Dt} = \frac{\partial (u_i\, \sigma_{ji})}{\partial x_j} + \rho\, u_i\, g_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)$$

Que fica: $$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} + \rho\, u_i \frac{Du_i}{Dt} = u_i \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \sigma_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \rho\, u_i\, g_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)$$

Ou: $$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} + u_i \left(\underbrace{\rho \frac{Du_i}{Dt} - \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} - \rho g_i}_{=0\ (Eq.\ da\ \ Quantidade\ de\ Movimento)} \right) = \sigma_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)$$

2.2 Equação da Energia Térmica

Obtemos assim a equação da Energia Térmica:

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \sigma_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Ou:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho \hat{u})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \hat{u})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \sigma_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$$

2.3 Função Dissipação

Para um fluido newtoniano:

$$\sigma_{ji}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -p\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \mu\Phi$$

Com: $\Phi = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)^2$

2.3 Função Dissipação

Isso resulta:

$$\Phi = 2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$$

2.4 Entalpia

Para um fluido newtoniano:

$$\boxed{\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_j}\right) + -p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \mu \Phi}$$

Fazendo $\hat{u} = h - \dfrac{p}{\rho}$ resulta:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho}\left(\underbrace{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j}}_{=0\ (continuidade)}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_j}\right) + \mu \Phi$$

2.4 Entalpia

Lembrando que: $dh = c_p \, dT$

Temos: $$\rho \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{c_p}\frac{Dp}{Dt} + \frac{\mu}{c_p}\Phi$$

Ou: $$\boxed{\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j T)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{c_p}\frac{Dp}{Dt} + \frac{\mu}{c_p}\Phi}$$

2.5 Equação Geral de Transporte

Observando todas as equações (continuidade, quantidade de movimento e energia) verificamos que todas se ajustam à forma:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho u_j\phi\right)}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)+S_\phi}$$

2.5 Equação Geral de Transporte

Equação	ϕ	Γ	S_ϕ
Continuidade	1	0	0
Quantidade de Movimento na Direção *x*	u	μ	$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{3}\mu \nabla.\vec{u}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial w}{\partial x}\right)$
Quantidade de Movimento na Direção *y*	υ	μ	$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2}{3}\mu \nabla.\vec{u}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial w}{\partial y}\right)$
Quantidade de Movimento na Direção *z*	w	μ	$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2}{3}\mu \nabla.\vec{u}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial \upsilon}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial w}{\partial z}\right)$
Energia	T	k/c_p	$\frac{1}{c_p}\frac{Dp}{Dt} + \frac{\mu}{c_p}\Phi$

Adaptado de “Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional”, Clovis R. Maliska, Ed. LTC, 1995.

2.5 Equação Geral de Transporte

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_j\phi)}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)+S_\phi$$

Na forma integral, para um volume de controle, temos:

$$\boxed{\int_{\forall C}\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}d\forall+\int_{SC}\rho\,\phi\,u_j\,n_j\,dA=\int_{SC}\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x_j}n_j\,dA+\int_{\forall C}S_\phi\,d\forall}$$

2.6 Relação entre as Equações de transporte

Escoamento Compressível:

- Continuidade: evolução da massa específica
- Quantidade de Movimento: evolução das velocidades
- Energia: evolução da Temperatura
- Equação de estado (ex.: gás ideal): evolução da pressão.

A importância das variações de massa específica para determinar variações de pressão faz com que em geral os métodos de solução usados para escoamentos compressíveis sejam chamados de métodos “density-based”.

2.6 Relação entre as Equações de transporte

Escoamento Incompressível:

Não há uma relação direta entre variações de massa específica e variações de pressão. É necessário desenvolver algoritmos especiais para obter a solução da pressão. Métodos específicos para escoamentos incompressíveis são chamados “pressure-based” devido a esses algoritmos.

2.7 Simplificações Usadas

- Regime Permante (“steady flow”)X Transiente (“time dependent flow”)
- Bidimensional X tridimensional
- Incompressível X compressível
- Não-viscoso X viscoso

2.8 Regime Permanente X Transiente

- Em geral, muitos escoamentos são naturalmente transientes, pois o escoamento ocorre entre ou ao redor de superfícies móveis (ex.: motor de combustão interna).
- Outros escoamentos, embora tenham condições de contorno permanentes, são naturalmente instáveis (ex.: "vortex shedding" na esteira de corpos submersos.
- Soluções transientes também podem ser usadas para "marchar" no tempo, a partir de uma condição inicial fisicamente plausível, até alcançar a condição de regime permanente.

2.9 Bidimensional X tridimensional

Em muitos casos, o escoamento é geometricamente bidimensional ou axissimétrico, o que permite grandes ganhos em custo computacional. No entanto, pode ser possível que, embora a geometria seja bidimensional, a natureza do escoamento, devido a instabilidades, seja tridimensional.

2.10 Incompressível X compressível

Escoamento incompressível: Ma < 0,3. Maior parte das aplicações de engenharia. Aerodinâmica de automóveis, controle de poluição, hidrodinâmica de navios, aplicações biomédicas.

Escoamento compressível: Engenharia aeronáutica, turbinas a gás, combustão.

2.11 Não-viscoso X viscoso

Em geral, escoamentos ocorrem em faixas moderadas de número de Reynolds em que há a necessidade de solução de camada limite. Exceção: escoamento de alto Re com baixo ângulo de ataque sobre aerofólios delgados, em que a camada limite é muito fina. Aplicações: engenharia aeronáutica, turbomáquinas, turbinas eólicas.

2.12 Métodos de solução para a discretização das equações de transporte

- Diferenças Finitas
- Volumes Finitos
- Elementos Finitos

2.13 Diferenças Finitas

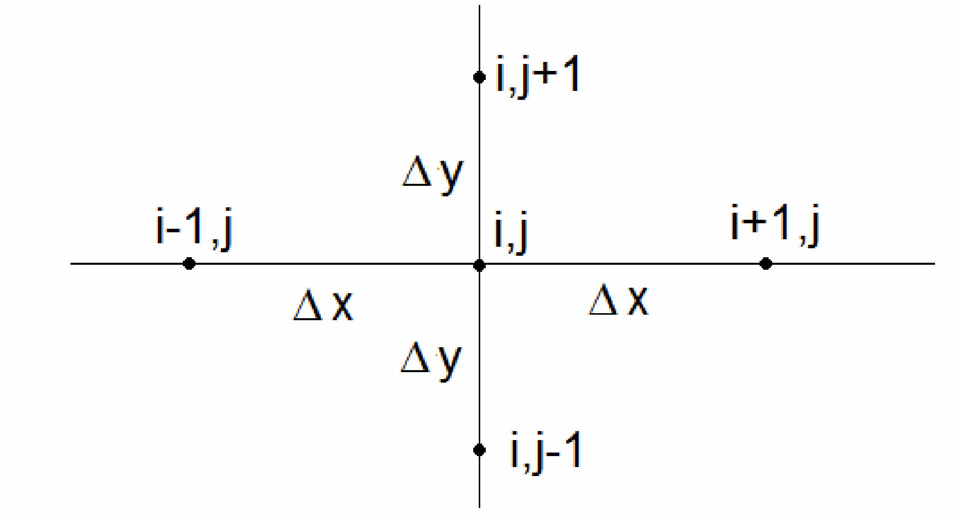
Equações são discretizadas usando expansões em séries de Taylor:

$$f(x) = f(x_o) + f'(x_o)\cdot(x - x_o) + \frac{1}{2} f''(x_o)\cdot(x - x_o)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_o)\cdot(x - x_o)^3 + \ldots$$

$$\boxed{f(x) = f(x_o) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{n}(x_o)\cdot(x - x_o)^n}$$

2.13 Diferenças Finitas

Ex.: Equação da Continuidade



$$u_{i+1,j} = u(i,j) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 + \ldots$$

$$u_{i-1,j} = u(i,j) - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 + \ldots$$

2.13 Diferenças Finitas

Ex.: Equação da Continuidade

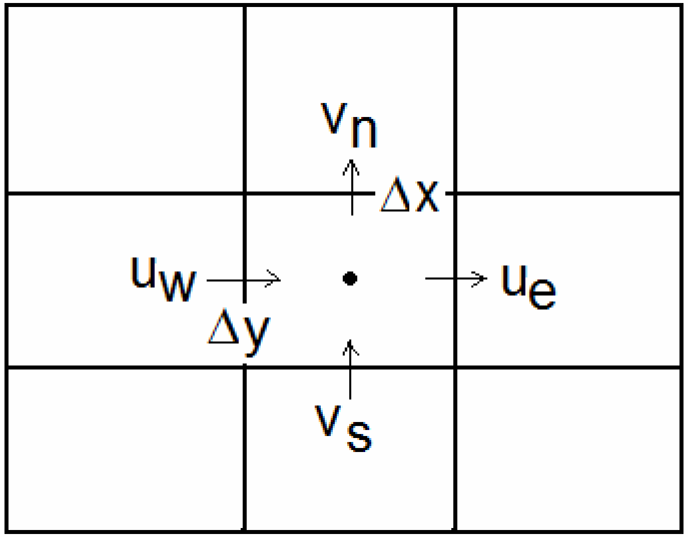
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

Analogamente: $$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{i,j} = \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

Logo: $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} + \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{i,j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y} = 0$$

2.14 Volumes Finitos

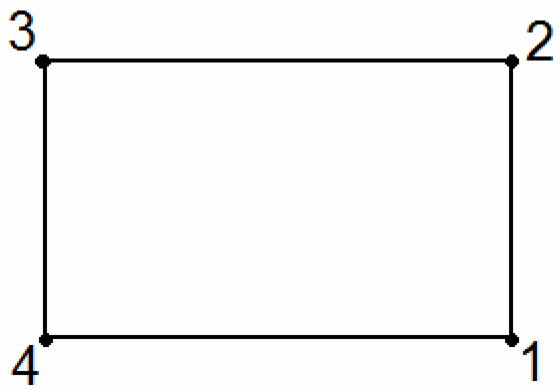
Equações são integradas em volumes ao redor no nó:



$$\int_S u_j n_j \, dA = 0 \;\; \Rightarrow \;\; u_e \, \Delta y - u_w \, \Delta y + v_n \, \Delta x - v_s \, \Delta x = 0$$

2.15 Elementos Finitos

A distribuição de uma grandeza dentro de um elemento é dada pela soma de funções de forma:



$$u(x,y) = \sum_{i=1}^{N} u_i \, N_i(x,y) \qquad \upsilon(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \upsilon_i \, N_i(x,y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = \sum_{i=1}^{N} u_i \frac{\partial N_i}{\partial x} + \sum_{i=1}^{N} \upsilon_i \frac{\partial N_i}{\partial y} = 0$$

Bibliografia

Versteeg, H,K; Malalasekera, W., “An introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method”, 2nd Edition, Pearson Education Limited, 2007.

Maliska, C.R., “Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional, LTC editora, 1995.

Apsley, D., CFD Lecture Notes, University of Manchester, Spring 2007.