Lista 1

Nícolas Morazotti

1 de Setembro de 2020

Questão 1

Encontre a equação diferencial para a carga Q no capacitor da figura 1. Suponha que a corrente é no sentido anti-horário e percorra a malha no sentido $A \to B \to C \to D \to A$. Qual a escala de tempo associada a essa equação?

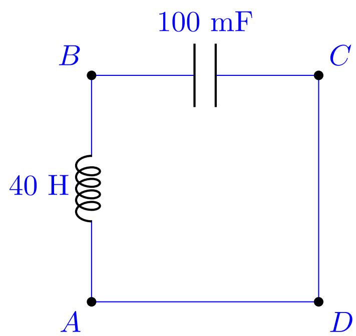


Figura 1: Questões 1-5.

Seguindo o caminho indicado (que segue sentido horário) e considerando a corrente negativa em tal caminho (pois ela é no sentido anti-horário), temos a equação

$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{C}Q = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}Q = 0. \tag{2}$$

Veja que a equação 2 é a equação de um oscilador harmônico simples, mas ao invés da posição, temos a carga. Assim sendo, podemos identificar a grandeza $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. A escala de tempo do oscilador harmônico, seu período, é calculada como $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}$, que é a escala de tempo em questão.

Questão 2

A equação diferencial encontrada na questão 1 é homogênea. Empregue o procedimento discutido em aula para encontrar duas soluções.

O método discutido em aula foi utilizar o *ansatz* $Q = e^{st}$. Assim,

$$\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC} Q = 0 \tag{3}$$

$$s^2 e^{st} + \frac{1}{LC} e^{st} = 0 \tag{4}$$

$$\implies s^2 + \frac{1}{LC} = 0, \tag{5}$$

pois a exponencial nunca é nula, podendo ser cancelada de ambos os lados da equação. A equação 5 nos dá as soluções

$$s_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{-LC}} \tag{6}$$

$$= \pm \frac{i}{\sqrt{LC}}. \tag{7}$$

As duas soluções para a carga são então

$$Q_1(t) = \exp\left(\frac{i}{\sqrt{LC}} t\right) \tag{8}$$

$$Q_2(t) = \exp\left(-\frac{i}{\sqrt{LC}} t\right). \tag{9}$$

Questão 3

Vamos chamar de $Q_1(t)$ uma das soluções encontradas na questão 2 e de $Q_2(t)$ a outra. Qualquer solução da equação diferencial pode ser escrita como uma combinação linear $Q(t) = \alpha Q_1(t) + \beta Q_2(t)$ das duas soluções. Que condições devem α e β satisfazer para que essa combinação seja sempre real?

A condição para que $Q(t)$ seja real é fazer $Q^*(t) = Q(t)$. Escrevendo $Q(t) = \alpha e^{it/\tau_{LC}} + \beta e^{-it/\tau_{LC}}$, em que $\tau_{LC} = \sqrt{LC}$, tal condição implica que

$$Q^*(t) = \alpha^* e^{-it/\tau_{LC}} + \beta^* e^{it/\tau_{LC}} \tag{10}$$

$$= \alpha e^{it/\tau_{LC}} + \beta e^{-it/\tau_{LC}}. \tag{11}$$

Igualando os coeficientes das exponenciais, vemos que, para que $Q(t)$ seja real, basta impormos $\beta = \alpha^*$. Assim, nossa solução geral real é

$$Q(t) = \alpha e^{it/\tau_{LC}} + \alpha^* e^{-it/\tau_{LC}}. \tag{12}$$

Questão 4

Sabe-se que, no circuito da figura 1, a corrente no instante $t = 0$ é nula, mas há uma carga $Q_0 = 1\mu C$ no capacitor. Encontre as constantes α e β que satisfazem a essas condições iniciais e mostre em gráfico a carga no capacitor em função do tempo.

A equação 12 pode ser derivada, de forma que temos a equação para a corrente $I(t)$.

$$I(t) = \frac{i}{\tau_{LC}} (\alpha e^{it/\tau_{LC}} - \alpha^* e^{-it/\tau_{LC}}). \tag{13}$$

Utilizando as condições iniciais $Q(0) = 1, I(0) = 0$, temos

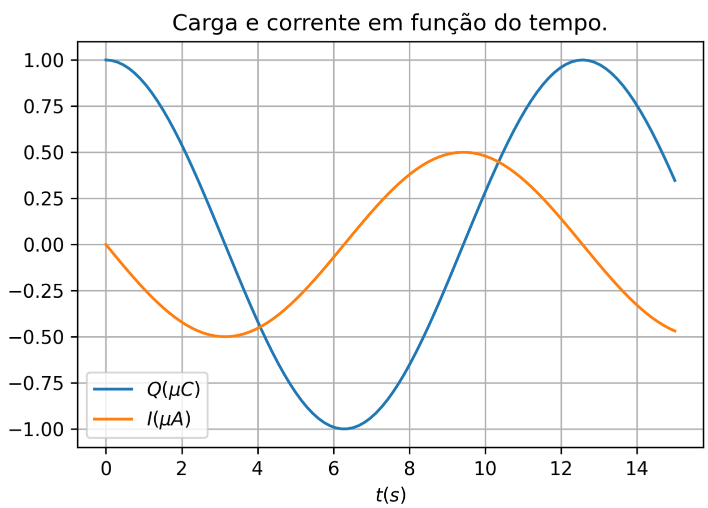
$$1 = \alpha + \alpha^* \tag{14}$$
$$0 = \alpha - \alpha^*. \tag{15}$$

Veja que a segunda equação nos diz que α é puramente real, que na primeira equação se traduz como

$$2\alpha = 1 \tag{16}$$
$$\alpha = \frac{1}{2}. \tag{17}$$

Nossa solução, utilizando a constante encontrada, é

$$Q(t) = \frac{1}{2}(e^{it/\tau_{LC}} + e^{it/\tau_{LC}})\mu\text{C} \tag{18}$$
$$= \cos(t/\tau_{LC})\mu\text{C} \tag{19}$$
$$I(t) = -\frac{1}{\tau_{LC}}\sin(t/\tau_{LC})\mu\text{C}. \tag{20}$$



Veja que o tempo característico τ_{LC}, para os valores escolhidos no exercício, é $\tau_{LC} = 2s$. O período, dado por $T = 2\pi\tau_{LC}$, está de acordo com o que obtivemos.

Questão 5

Suponha agora que as condições iniciais sejam $I(0) = 1\text{A}$ e $Q(0) = 0$. Encontre a corrente no circuito em função do tempo.

Podemos impor a condição inicial $Q(0) = 0$ diretamente antes de partirmos para a condição da corrente.

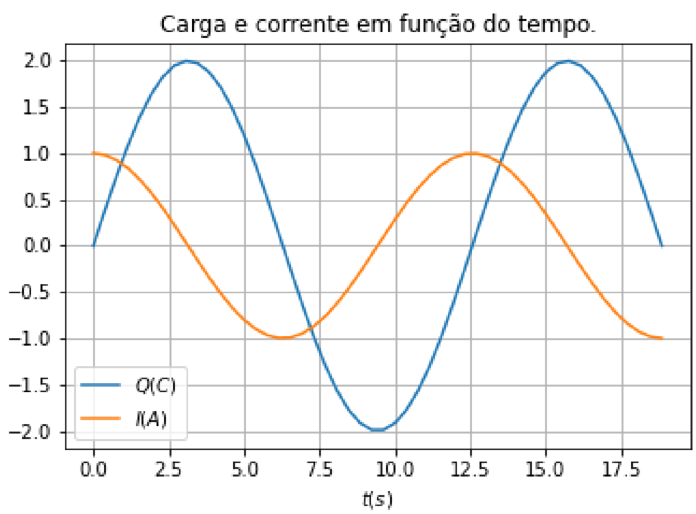
$$Q(0) = 0 = \alpha + \alpha^* \tag{21}$$
$$\alpha^* = -\alpha, \tag{22}$$

que nos diz, claramente, que α é puramente imaginário. A segunda condição inicial, sobre a corrente, nos dá que

$$I(0) = 1A = \frac{i}{\tau_{LC}}(\alpha - \alpha^*) \tag{23}$$
$$-i\tau_{LC} = 2\alpha \tag{24}$$
$$\alpha = -i\tau_{LC}/2\text{A}. \tag{25}$$

Com isso, podemos colocar a condição na solução da carga, ficando com

$$Q(t) = \frac{\tau_{LC}}{2i}(e^{-it/\tau_{LC}} - e^{-it/\tau_{LC}})\text{A} \tag{26}$$
$$= 2\sin(t/\tau_{LC})\text{C} \tag{27}$$
$$I(t) = \cos(t/\tau_{LC})\text{A} \tag{28}$$



Questão 6

Encontre a equação diferencial que determina a corrente no circuito da figura 2. A força eletromotriz da fonte de tensão é $\mathcal{E} = \cos(2\pi t)$, onde t é expresso em segundos e a força eletromotriz, em Volts.

Utilizando o mesmo procedimento da questão 1, considerando a corrente no sentido horário, temos

$$-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \cos(2\pi t) - RI = 0 \tag{29}$$
$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI = \cos(2\pi t). \tag{30}$$

Questão 7

Encontre a equação diferencial homogênea associada à equação diferencial da questão 6 e encontre uma solução para a equação homogênea. *Sugestão. Embora seja de primeira ordem, a equação*

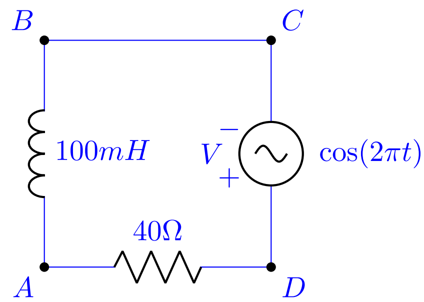


Figura 2: Questões 6 e 7.

diferencial pode ser resolvida pelo procedimento discutido em aula. Resulta uma equação algébrica linear, que tem somente uma solução.

A equação homogênea é escrita descartando o termo do lado direito. Assim,

$$L\frac{\mathrm{d}I_H}{\mathrm{dt}} + RI_H = 0. \tag{31}$$

Com o *ansatz* $I_H = e^{st}$,

$$Lse^{st} + Re^{st} = 0 \tag{32}$$

$$s = -\frac{R}{L} = -\tau_{RL}/2. \tag{33}$$

A solução para s nos dá

$$I_H(t) = Ke^{-2t/\tau_{RL}}. \tag{34}$$

Essa solução desaparece após tempos muito longos. Não foi pedido, mas podemos encontrar também a solução estacionária, dada pela equação não-homogênea

$$L\frac{\mathrm{d}I_{NH}}{\mathrm{dt}} + RI_{NH} = \cos(2\pi t). \tag{35}$$

Para encontrar tal solução, propomos uma função para a corrente similar à função externa:

$$I_{NH}(t) = \alpha\cos(2\pi t) + \beta\sin(2\pi t). \tag{36}$$

Com tal *ansatz*, substituímos na equação não-homogênea, resultando em

$$2\pi L[-\alpha\sin(2\pi t) + \beta\cos(2\pi t)] + R[\alpha\cos(2\pi t) + \beta\sin(2\pi t)] = \cos(2\pi t) \tag{37}$$

$$\cos(2\pi t)[2\pi L\beta + R\alpha] + \sin(2\pi t)[-2\pi L\alpha + R\beta] = 1\cdot\cos(2\pi t) + 0\cdot\sin(2\pi t). \tag{38}$$

Como as funções seno e cosseno são ortogonais, podemos identificar cada um dos coeficientes do lado esquerdo com seu respectivo coeficiente do lado direito. Assim, temos o sistema de equações

$$\begin{cases} 2\pi L\beta + R\alpha = 1 \\ -2\pi L\alpha + R\beta = 0. \end{cases} \tag{39}$$

Isolando β na segunda equação e substituindo na primeira equação multiplicada por R, temos

$$\beta = \frac{2\pi L}{R}\alpha \tag{40}$$

$$4\pi^2 L^2 \alpha + R^2 \alpha = R \tag{41}$$

$$\alpha = \frac{R}{4\pi^2 L^2 + R^2} \tag{42}$$

$$\beta = \frac{2\pi L}{4\pi^2 L^2 + R^2}. \tag{43}$$

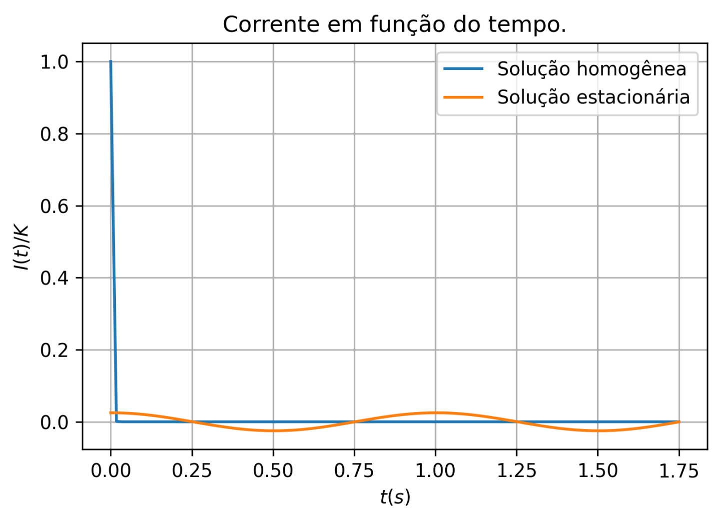
Com as constantes encontradas, a solução não-homogênea é

$$I_{NH}(t) = \frac{1}{4\pi^2 L^2 + R^2}\left[R\cos(2\pi t) + 2\pi L \sin(2\pi t)\right], \tag{44}$$

que leva à solução geral

$$I(t) = Ke^{-2t/\tau_{RL}} + \frac{1}{4\pi^2 L^2 + R^2}\left[R\cos(2\pi t) + 2\pi L \sin(2\pi t)\right]. \tag{45}$$

No caso em particular, $L = 100mH$ e $R = 40\Omega$. Com tais parâmetros, $\tau_{RL} = 0.0025$.



Com o parâmetro τ_{RL} pequeno, vemos que a parte homogênea da solução se torna desprezível muito rapidamente.

Questão 8

No circuito da figura 3, a fonte de tensão produz uma força eletromotriz $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$. Encontre a equação diferencial para a carga. Mostre que os tempos característicos τ_{RL} e τ_{LC} são iguais.

Seguindo o mesmo procedimento já empregado exaustivamente, a equação diferencial do circuito é

$$-L\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} - \frac{Q}{C} + \mathcal{E}_0\cos(\omega t) - R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{46}$$

$$L\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{Q}{C} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \mathcal{E}_0\cos(\omega t). \tag{47}$$

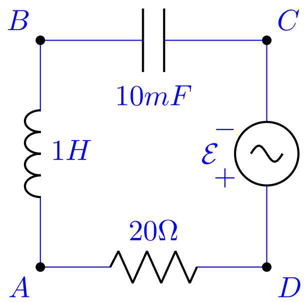


Figura 3: Questões 8-10.

Veja que os tempos característicos que encontramos anteriormente eram dados por

$$\tau_{LC} = \sqrt{LC} \tag{48}$$

$$\tau_{RL} = \frac{2L}{R}. \tag{49}$$

Para os parâmetros dados no exercício,

$$\tau_{LC} = 0.1 \tag{50}$$

$$\tau_{RL} = 0.1. \tag{51}$$

Posteriormente, vamos chamar ambos os tempos característicos de τ para o caso em que são iguais.

Questão 9

Empregue o procedimento discutido em classe para resolver a equação homogênea associada à equação diferencial da questão 8. Como $\tau_{RL} = \tau_{LC}$ a solução da equação do segundo grau para s tem apenas uma solução. O circuito é *criticamente amortecido*.

Se utilizarmos o *ansatz* $Q = e^{st}$ e substituirmos na equação diferencial homogênea

$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = 0, \tag{52}$$

temos

$$Ls^2 + Rs + \frac{1}{C} = 0 \tag{53}$$

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \tag{54}$$

$$s^2 + \frac{2}{\tau_{RL}}s + \frac{1}{\tau_{LC}^2} = 0 \tag{55}$$

$$s^2 + \frac{2}{\tau}s + \frac{1}{\tau^2} = 0 \tag{56}$$

$$\tag{57}$$

Resolvendo tal equação do segundo grau, temos

$$s = -\frac{2}{2\tau} \pm \frac{\sqrt{4/\tau^2 - 4/\tau^2}}{2} \tag{58}$$

$$= -\frac{1}{\tau}. \tag{59}$$

Veja então que no caso criticamente amortecido, o método utilizado nos dá apenas uma solução, mesmo com a equação diferencial sendo de segunda ordem! Até agora, pelo menos, sabemos que uma das soluções é $Q(t) = Ke^{-t/\tau}$.

Questão 10

Mostre que $Q = t\exp(st)$ também é solução da equação diferencial homogênea encontrada na questão 9.

Nesse caso, o s da solução proposta é o mesmo s encontrado no outro exercício. Então, utilizando o *ansatz* dado,

$$
\begin{aligned}
Q &= te^{-t/\tau} && (60)\\
\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} &= e^{-t/\tau} - \frac{t}{\tau}e^{-t/\tau} && (61)\\
\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} &= -\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau} - \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau} + \frac{t}{\tau^2}e^{-t/\tau} && (62)\\
0 &= e^{-t/\tau}\left[L\left(-\frac{2}{\tau} + \frac{t}{\tau^2}\right) + R\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) + \frac{t}{C}\right] && (63)\\
0 &= -\frac{2}{\tau} + \frac{t}{\tau^2} + \frac{2}{\tau}\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) + \frac{t}{\tau^2} && (64)\\
0 &= 0. && (65)
\end{aligned}
$$

Assim, a solução proposta $Q = t\exp(st)$ é uma solução da equação homogênea, e agora como temos duas soluções, podemos compor a solução completa da equação homogênea como

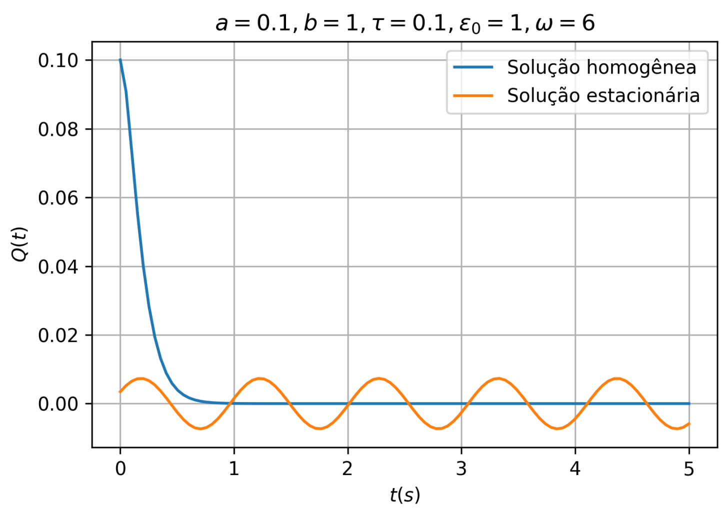
$$Q(t) = e^{-t/\tau}(a + bt). \tag{66}$$

Para a equação não-homogênea (que não foi pedida no exercício), utilizamos um *ansatz* com a estrutura da fonte, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0\cos(\omega t)$. Seguindo o mesmo passo-a-passo mostrado na questão 7, trocando o 2π por ω e identificando os coeficientes corretamente, encontramos

$$Q_{NH}(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{(1/\tau^2 - \omega^2)^2 + (2\omega/\tau)^2} \times \left[\left(\frac{1}{\tau^2} - \omega^2\right)\cos(\omega t) + \frac{2\omega}{\tau}\sin(\omega t),\right] \tag{67}$$

onde a solução geral da equação se torna

$$Q(t) = e^{-t/\tau}(a + bt) + Q_{NH}(t). \tag{68}$$


$a = 0.1, b = 1, \tau = 0.1, \varepsilon_0 = 1, \omega = 6$
Solução homogênea
Solução estacionária
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
$Q(t)$
0
1
2
3
4
5
$t(s)$