SME0822 Análise Multivariada e Aprendizado Não-Supervisionado

Aula 2: **Notação Matricial**

Prof. Cibele Russo

cibele@icmc.usp.br

http://www.icmc.usp.br/~cibele

Baseado em Johnson, R. A., & Wichern, D. W. (2007). Applied Multivariate Statistical Analysis. Prentice Hall.

Notação e definições

Escreveremos $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}_{s\times 1}$ para denotar um vetor de dimensão s, ou seja, um vetor com s linhas e 1 coluna:

$$\underset{\sim}{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_s \end{bmatrix}$$

Obs: Outra notação $\mathbf{v}$.

Multiplicação por escalar

Sejam $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}_{s \times 1}$ e $c \ \in \mathbb{R}$ um escalar. Define-se o produto $c.\underset{\sim}{v} = c \ \underset{\sim}{v}$ como

$$c \ \underset{\sim}{v} = \begin{bmatrix} c \ v_1 \\ c \ v_2 \\ \vdots \\ c \ v_s \end{bmatrix}$$

Soma de dois vetores

Sejam $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}_{s\times 1}$ e $\underset{\sim}{w} = \underset{\sim}{w}_{s\times 1}$. Define-se a soma de dois vetores como

$$\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{w} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_s + w_s \end{bmatrix}$$

Notação e definições

Escreveremos $A = A_{n\times m}$ para denotar uma matriz de dimensão $n \times m$, ou seja, uma matriz com n linhas e m colunas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Obs 2: Quando $A = A_{n\times n}$, dizemos que A é uma matriz quadrada de ordem n.

Multiplicação por escalar

Seja $A = A_{n \times m}$ uma matriz $n \times m$ e $c \in \mathbb{R}$ um escalar. Define-se a multiplicação de uma matriz por um escalar como

$$c\ A = \begin{bmatrix} c\ a_{11} & c\ a_{12} & \dots & c\ a_{1m} \\ c\ a_{21} & c\ a_{22} & \dots & c\ a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c\ a_{n1} & c\ a_{n2} & \dots & c\ a_{nm} \end{bmatrix}$$

Soma de duas matrizes

Sejam $A = A_{n\times m}$ e $B = B_{n\times m}$ duas matrizes de mesma dimensão. A soma $A + B$ é uma matriz $n \times m$ em que

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \ldots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \ldots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \ldots & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix}$$

Produto de duas matrizes

Sejam $A = A_{n \times m}$ e $B = B_{m \times p}$ duas matrizes. O produto AB é uma matriz $n \times p$ em que

$$AB = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} a_{1i} b_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^{m} a_{1i} b_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ni} b_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^{m} a_{ni} b_{ip} \end{bmatrix}$$

Matriz transposta e vetor transposto

A matriz transposta de A é denotada por $A^\top$ e é definida como:

$$A^\top = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

O vetor transposto de $\underset{\sim}{v}$ é denotado por $\underset{\sim}{v}^\top$ e definido como

$$\underset{\sim}{v}^\top = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_s \end{bmatrix}.$$

Produto interno entre dois vetores

Sejam $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}_{s\times 1}$ e $\underset{\sim}{w} = \underset{\sim}{w}_{s\times 1}$. Define-se o produto interno de dois vetores como

$$\underset{\sim}{v}^\top \underset{\sim}{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_s w_s \ \in \mathbb{R}.$$

Notação e definições

Seja $A = A_{n\times m}$ uma matriz real com n linhas e m colunas e $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}_{s\times 1}$ um vetor com s linhas.

1. $A^\top$ é a matriz transposta de A, $\underset{\sim}{v}^\top$ é o vetor transposto de $\underset{\sim}{v}$.
2. $\det(A_{n\times n}) = \det A = |A|$ é o determinante de A.
3. $tr(A_{n\times n}) = trA$ é o traço de A = soma dos elementos da diagonal principal de A.
4. A^{-1} é a matriz inversa de A, se A admitir inversa.
5. $dim(A) = dim\ A$ é a dimensão de A, em geral no formato $(\#linhas \times \#colunas)$.
6. r (A) é o posto de A = ordem da maior submatriz de determinante não nulo de A.
7. $I_n = I$ é a matriz identidade de ordem n.

Notação e definições

Seja $A = A_{n \times m}$ uma matriz real com n linhas e m colunas e $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}_{s \times 1}$ um vetor com s linhas.

1. $A^\top$ é a matriz transposta de A, $\underset{\sim}{v}^\top$ é o vetor transposto de $\underset{\sim}{v}$.
2. $\det(A_{n \times n}) = \det A = |A|$ é o determinante de A.
3. $tr(A_{n \times n}) = trA$ é o traço de $A =$ soma dos elementos da diagonal principal de A.
4. A^{-1} é a matriz inversa de A, se A admitir inversa.
5. $dim(A) = dim\ A$ é a dimensão de A, em geral no formato $(\#linhas \times \#colunas)$.
6. r (A) é o posto de $A =$ ordem da maior submatriz de determinante não nulo de A.
7. $I_n = I$ é a matriz identidade de ordem n.

Notação e definições

Seja $A = A_{n \times m}$ uma matriz real com n linhas e m colunas e $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}_{s \times 1}$ um vetor com s linhas.

1. $A^\top$ é a matriz transposta de A, $\underset{\sim}{v}^\top$ é o vetor transposto de $\underset{\sim}{v}$.
2. $\det(A_{n \times n}) = \det A = |A|$ é o determinante de A.
3. $tr(A_{n \times n}) = trA$ é o traço de A = soma dos elementos da diagonal principal de A.
4. A^{-1} é a matriz inversa de A, se A admitir inversa.
5. $dim(A) = dim\ A$ é a dimensão de A, em geral no formato $(\#linhas \times \#colunas)$.
6. r (A) é o posto de A = ordem da maior submatriz de determinante não nulo de A.
7. $I_n = I$ é a matriz identidade de ordem n.

Notação e definições

Seja $A = A_{n \times m}$ uma matriz real com n linhas e m colunas e $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}_{s \times 1}$ um vetor com s linhas.

1. $A^\top$ é a matriz transposta de A, $\underset{\sim}{v}^\top$ é o vetor transposto de $\underset{\sim}{v}$.
2. $\det(A_{n \times n}) = \det A = |A|$ é o determinante de A.
3. $tr(A_{n \times n}) = trA$ é o traço de $A =$ soma dos elementos da diagonal principal de A.
4. A^{-1} é a matriz inversa de A, se A admitir inversa.
5. $dim(A) = dim\ A$ é a dimensão de A, em geral no formato $(\#linhas \times \#colunas)$.
6. r (A) é o posto de $A =$ ordem da maior submatriz de determinante não nulo de A.
7. $I_n = I$ é a matriz identidade de ordem n.

Notação e definições

Seja $A = A_{n \times m}$ uma matriz real com n linhas e m colunas e $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}_{s \times 1}$ um vetor com s linhas.

1. $A^\top$ é a matriz transposta de A, $\underset{\sim}{v}^\top$ é o vetor transposto de $\underset{\sim}{v}$.
2. $\det(A_{n \times n}) = \det A = |A|$ é o determinante de A.
3. $tr(A_{n \times n}) = trA$ é o traço de A = soma dos elementos da diagonal principal de A.
4. A^{-1} é a matriz inversa de A, se A admitir inversa.
5. $dim(A) = dim\ A$ é a dimensão de A, em geral no formato $(\#linhas \times \#colunas)$.
6. r (A) é o posto de A = ordem da maior submatriz de determinante não nulo de A.
7. $I_n = I$ é a matriz identidade de ordem n.

Notação e definições

Seja $A = A_{n\times m}$ uma matriz real com n linhas e m colunas e $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}_{s\times 1}$ um vetor com s linhas.

1. $A^\top$ é a matriz transposta de A, $\underset{\sim}{v}^\top$ é o vetor transposto de $\underset{\sim}{v}$.
2. $\det(A_{n\times n}) = \det A = |A|$ é o determinante de A.
3. $tr(A_{n\times n}) = trA$ é o traço de A = soma dos elementos da diagonal principal de A.
4. A^{-1} é a matriz inversa de A, se A admitir inversa.
5. $dim(A) = dim\ A$ é a dimensão de A, em geral no formato $(\#linhas \times \#colunas)$.
6. r (A) é o posto de A = ordem da maior submatriz de determinante não nulo de A.
7. $I_n = I$ é a matriz identidade de ordem n.

Notação e definições

Seja $A = A_{n\times m}$ uma matriz real com n linhas e m colunas e $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}_{s\times 1}$ um vetor com s linhas.

1. $A^\top$ é a matriz transposta de A, $\underset{\sim}{v}^\top$ é o vetor transposto de $\underset{\sim}{v}$.
2. $\det(A_{n\times n}) = \det A = |A|$ é o determinante de A.
3. $tr(A_{n\times n}) = trA$ é o traço de $A =$ soma dos elementos da diagonal principal de A.
4. A^{-1} é a matriz inversa de A, se A admitir inversa.
5. $dim(A) = dim\ A$ é a dimensão de A, em geral no formato $(\#linhas \times \#colunas)$.
6. r (A) é o posto de $A =$ ordem da maior submatriz de determinante não nulo de A.
7. $I_n = I$ é a matriz identidade de ordem n.

Notação e definições

$I_n = I$ é a matriz identidade de ordem n.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Definições e resultados matriciais

Dependência linear de vetores

Sejam $\underset{\sim}{v}_1, ..., \underset{\sim}{v}_m$ m vetores, cada um com n linhas, $\underset{\sim}{v}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, ..., m$.

O conjunto $\{\underset{\sim}{v}_1, ..., \underset{\sim}{v}_m\}$ é um conjunto de vetores linearmente independentes (li) se

$$c_1\underset{\sim}{v}_1 + ... + c_m\underset{\sim}{v}_m = \underset{\sim}{0} \quad \Rightarrow \quad c_1 = ... = c_m = 0.$$

Caso contrário dizemos que $\{\underset{\sim}{v}_1, ..., \underset{\sim}{v}_m\}$ é um conjunto de vetores linearmente dependentes (ld).

Propriedades da matriz inversa

1. Se $A_{n\times n}$ admite inversa, então A é dita não singular. Caso contrário, A é singular.
2. Se $A_{n\times n}$ admite inversa, digamos A^{-1}, então a inversa é única.
3. $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.
4. $(A^{-1})^{-1} = A$.
5. $A_{n\times n}$ e $B_{n\times n}$ não singulares $\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
6. $A_{n\times n}$ não singular e $k \neq 0$ um escalar $\Rightarrow (kA)^{-1} = (1/k)A^{-1}$.

Propriedades da matriz inversa

1. Se $A_{n \times n}$ admite inversa, então A é dita não singular. Caso contrário, A é singular.
2. Se $A_{n \times n}$ admite inversa, digamos A^{-1}, então a inversa é única.
3. $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.
4. $(A^{-1})^{-1} = A$.
5. $A_{n \times n}$ e $B_{n \times n}$ não singulares $\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
6. $A_{n \times n}$ não singular e $k \neq 0$ um escalar $\Rightarrow (kA)^{-1} = (1/k)A^{-1}$.

Propriedades da matriz inversa

1. Se $A_{n \times n}$ admite inversa, então A é dita não singular. Caso contrário, A é singular.
2. Se $A_{n \times n}$ admite inversa, digamos A^{-1}, então a inversa é única.
3. $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.
4. $(A^{-1})^{-1} = A$.
5. $A_{n \times n}$ e $B_{n \times n}$ não singulares $\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
6. $A_{n \times n}$ não singular e $k \neq 0$ um escalar $\Rightarrow (kA)^{-1} = (1/k)A^{-1}$.

Propriedades da matriz inversa

1. Se $A_{n \times n}$ admite inversa, então A é dita não singular. Caso contrário, A é singular.
2. Se $A_{n \times n}$ admite inversa, digamos A^{-1}, então a inversa é única.
3. $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.
4. $(A^{-1})^{-1} = A$.
5. $A_{n \times n}$ e $B_{n \times n}$ não singulares $\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
6. $A_{n \times n}$ não singular e $k \neq 0$ um escalar $\Rightarrow (kA)^{-1} = (1/k)A^{-1}$.

Propriedades da matriz inversa

1. Se $A_{n\times n}$ admite inversa, então A é dita não singular. Caso contrário, A é singular.
2. Se $A_{n\times n}$ admite inversa, digamos A^{-1}, então a inversa é única.
3. $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.
4. $(A^{-1})^{-1} = A$.
5. $A_{n\times n}$ e $B_{n\times n}$ não singulares $\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
6. $A_{n\times n}$ não singular e $k \neq 0$ um escalar $\Rightarrow (kA)^{-1} = (1/k)A^{-1}$.

Propriedades da matriz inversa

1. Se $A_{n \times n}$ admite inversa, então A é dita não singular. Caso contrário, A é singular.
2. Se $A_{n \times n}$ admite inversa, digamos A^{-1}, então a inversa é única.
3. $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.
4. $(A^{-1})^{-1} = A$.
5. $A_{n \times n}$ e $B_{n \times n}$ não singulares $\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
6. $A_{n \times n}$ não singular e $k \neq 0$ um escalar $\Rightarrow (kA)^{-1} = (1/k)A^{-1}$.

Propriedades da matriz transposta

1. $A = A^\top \Rightarrow A$ é simétrica.
2. $A^\top A$ e $AA^\top$ são simétricas.
3. A e B matrizes; $\exists\ AB \Rightarrow (AB)^\top = B^\top A^\top$.

Propriedades da matriz transposta

1. $A = A^\top \Rightarrow A$ é simétrica.
2. $A^\top A$ e $AA^\top$ são simétricas.
3. A e B matrizes; $\exists\ AB \Rightarrow (AB)^\top = B^\top A^\top$.

Propriedades da matriz transposta

1. $A = A^\top \Rightarrow A$ é simétrica.
2. $A^\top A$ e $AA^\top$ são simétricas.
3. A e B matrizes; $\exists\ AB \Rightarrow (AB)^\top = B^\top A^\top$.

Propriedades do determinante de uma matriz

1. $A_{n \times n}$ e $B_{n \times n} \Rightarrow \det(AB) = \det(A)\det(B)$.
2. $\det(A_{n \times n}) = 0 \Rightarrow A$ é singular.

Propriedades do determinante de uma matriz

1. $A_{n \times n}$ e $B_{n \times n} \Rightarrow \det(AB) = \det(A)\det(B)$.
2. $\det(A_{n \times n}) = 0 \Rightarrow A$ é singular.

Propriedades do posto de uma matriz

1. $A_{n\times n} \Rightarrow \mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(A^\top)$.
2. $A_{n\times n} \Rightarrow \mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(A^\top A) = \mathrm{r}\,(AA^\top)$.
3. $\det(A_{n\times n}) = 0 \Rightarrow \mathrm{r}\,(A) < n$.
4. $A_{n\times m}$ $(n > m)$, $\mathrm{r}\; = \mathrm{r}\,(A)$ é o número de colunas linearmente independentes de A, $r \leq m$.
   Se $r = m$ então A é de posto completo. Caso contrário A é de posto incompleto.
5. $A_{n\times m}$ $(n < m)$, $\mathrm{r}\; = \mathrm{r}\,(A)$ é o número de linhas linearmente independentes de A, $r \leq n$.
   Se $r = n$ então A é de posto completo. Caso contrário A é de posto incompleto.

Propriedades do posto de uma matriz

1. $A_{n \times n} \Rightarrow \text{r}\,(A) = \text{r}\,(A^\top)$.
2. $A_{n \times n} \Rightarrow \text{r}\,(A) = \text{r}\,(A^\top A) = \text{r}\,(AA^\top)$.
3. $\det(A_{n \times n}) = 0 \Rightarrow \text{r}\,(A) < n$.
4. $A_{n \times m}$ $(n > m)$, r $= \text{r}\,(A)$ é o número de colunas linearmente independentes de A, $r \leq m$.
   Se $r = m$ então A é de posto completo. Caso contrário A é de posto incompleto.
5. $A_{n \times m}$ $(n < m)$, r $= \text{r}\,(A)$ é o número de linhas linearmente independentes de A, $r \leq n$.
   Se $r = n$ então A é de posto completo. Caso contrário A é de posto incompleto.

Propriedades do posto de uma matriz

1. $A_{n\times n} \Rightarrow \mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(A^\top)$.
2. $A_{n\times n} \Rightarrow \mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(A^\top A) = \mathrm{r}\,(AA^\top)$.
3. $\det(A_{n\times n}) = 0 \Rightarrow \mathrm{r}\,(A) < n$.
4. $A_{n\times m}$ $(n > m)$, $\mathrm{r} = \mathrm{r}\,(A)$ é o número de colunas linearmente independentes de A, $r \leq m$.
   Se $r = m$ então A é de posto completo. Caso contrário A é de posto incompleto.
5. $A_{n\times m}$ $(n < m)$, $\mathrm{r} = \mathrm{r}\,(A)$ é o número de linhas linearmente independentes de A, $r \leq n$.
   Se $r = n$ então A é de posto completo. Caso contrário A é de posto incompleto.

Propriedades do posto de uma matriz

1. $A_{n \times n} \Rightarrow \text{r}(A) = \text{r}(A^\top)$.
2. $A_{n \times n} \Rightarrow \text{r}(A) = \text{r}(A^\top A) = \text{r}(AA^\top)$.
3. $\det(A_{n \times n}) = 0 \Rightarrow \text{r}(A) < n$.
4. $A_{n \times m}$ $(n > m)$, $\text{r} = \text{r}(A)$ é o número de colunas linearmente independentes de A, $r \leq m$.
   Se $r = m$ então A é de posto completo. Caso contrário A é de posto incompleto.
5. $A_{n \times m}$ $(n < m)$, $\text{r} = \text{r}(A)$ é o número de linhas linearmente independentes de A, $r \leq n$.
   Se $r = n$ então A é de posto completo. Caso contrário A é de posto incompleto.

Propriedades do posto de uma matriz

1. $A_{n\times n} \Rightarrow \text{r}\,(A) = \text{r}\,(A^\top)$.
2. $A_{n\times n} \Rightarrow \text{r}\,(A) = \text{r}\,(A^\top A) = \text{r}\,(AA^\top)$.
3. $\det(A_{n\times n}) = 0 \Rightarrow \text{r}\,(A) < n$.
4. $A_{n\times m}$ $(n > m)$, $\text{r} \ = \text{r}\,(A)$ é o número de colunas linearmente independentes de A, $r \leq m$.

   Se $r = m$ então A é de posto completo. Caso contrário A é de posto incompleto.
5. $A_{n\times m}$ $(n < m)$, $\text{r} \ = \text{r}\,(A)$ é o número de linhas linearmente independentes de A, $r \leq n$.

   Se $r = n$ então A é de posto completo. Caso contrário A é de posto incompleto.

Propriedades do traço de uma matriz

1. Traço de uma matriz $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, se AB e BA estiverem definidos.

Matrizes ortogonais

- $P_{n\times n}$ é ortogonal $\iff P^{-1} = P^\top$.
- P é ortogonal $\Rightarrow P^\top P = I_n$.
- P é ortogonal $\Rightarrow \det P = \pm 1$.
- $\underset{\sim}{x}_{nx1}$ e $\underset{\sim}{y}_{nx1}$ são ortogonais se $\underset{\sim}{x}^\top \underset{\sim}{y} = 0$.

Matrizes ortogonais

- $P_{n \times n}$ é ortogonal $\iff P^{-1} = P^\top$.
- P é ortogonal $\Rightarrow P^\top P = I_n$.
- P é ortogonal $\Rightarrow \det P = \pm 1$.
- $\underset{\sim}{x}_{nx1}$ e $\underset{\sim}{y}_{nx1}$ são ortogonais se $\underset{\sim}{x}^\top \underset{\sim}{y} = 0$.

Matrizes ortogonais

- $P_{n\times n}$ é ortogonal $\iff P^{-1} = P^\top$.
- P é ortogonal $\Rightarrow P^\top P = I_n$.
- P é ortogonal $\Rightarrow \det P = \pm 1$.
- $\underset{\sim}{x}_{nx1}$ e $\underset{\sim}{y}_{nx1}$ são ortogonais se $\underset{\sim}{x}^\top \underset{\sim}{y} = 0$.

Matrizes ortogonais

- $P_{n \times n}$ é ortogonal $\iff P^{-1} = P^\top$.
- P é ortogonal $\Rightarrow P^\top P = I_n$.
- P é ortogonal $\Rightarrow \det P = \pm 1$.
- $\underset{\sim}{x}_{nx1}$ e $\underset{\sim}{y}_{nx1}$ são ortogonais se $\underset{\sim}{x}^\top \underset{\sim}{y} = 0$.

Raízes características (autovalores)

- As raízes características ou autovalores de uma matriz $A_{n\times n}$ são soluções em λ da equação $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
- A soma das raízes características de A é tr$A$.
- O produto das raízes características de A é $\det A$.
- Se r $(A_{n\times n}) = p$ então (n-p) raízes da equação $\det(A - \lambda I_n) = 0$ são nulas.

Raízes características (autovalores)

- As raízes características ou autovalores de uma matriz $A_{n\times n}$ são soluções em λ da equação $\det(A-\lambda I_n)=0$.
- A soma das raízes características de A é tr$A$.
- O produto das raízes características de A é $\det A$.
- Se r $(A_{n\times n})=p$ então (n-p) raízes da equação $\det(A-\lambda I_n)=0$ são nulas.

Raízes características (autovalores)

- As raízes características ou autovalores de uma matriz $A_{n\times n}$ são soluções em λ da equação $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
- A soma das raízes características de A é tr$A$.
- O produto das raízes características de A é $\det A$.
- Se r $(A_{n\times n}) = p$ então (n-p) raízes da equação $\det(A - \lambda I_n) = 0$ são nulas.

Raízes características (autovalores)

- As raízes características ou autovalores de uma matriz $A_{n\times n}$ são soluções em λ da equação $\det(A-\lambda I_n)=0$.
- A soma das raízes características de A é $\mathrm{tr}A$.
- O produto das raízes características de A é $\det A$.
- Se r $(A_{n\times n})=p$ então (n-p) raízes da equação $\det(A-\lambda I_n)=0$ são nulas.

Classificação de matrizes

1. $A_{n\times n}$ é positiva definida $\iff$
   $A = P^\top P$ para alguma matriz P não singular **ou**
   as raízes características de A são todas positivas **ou**
   $$a_{11} > 0, \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} > 0, ..., \det A > 0.$$
2. Se $A_{n\times n}$ é positiva definida então $\mathrm{r}(A) = n$ e $a_{ii} > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.
3. $P^\top AP$ é positiva definida para toda matriz $P_{n\times n}$ não singular.

Classificação de matrizes

1. $A_{n\times n}$ é positiva definida $\iff$
   $A = P^\top P$ para alguma matriz P não singular **ou**
   as raízes características de A são todas positivas **ou**
   $$a_{11} > 0, \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} > 0, ..., \det A > 0.$$
2. Se $A_{n\times n}$ é positiva definida então $\mathrm{r}(A) = n$ e $a_{ii} > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.
3. $P^\top AP$ é positiva definida para toda matriz $P_{n\times n}$ não singular.

Classificação de matrizes

1. $A_{n \times n}$ é positiva definida $\iff$
   $A = P^\top P$ para alguma matriz P não singular **ou**
   as raízes características de A são todas positivas **ou**
   $$a_{11} > 0, \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} > 0, ..., \det A > 0.$$
2. Se $A_{n \times n}$ é positiva definida então $\mathrm{r}\,(A) = n$ e $a_{ii} > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.
3. $P^\top AP$ é positiva definida para toda matriz $P_{n \times n}$ não singular.

Classificação de matrizes

1. $A_{n\times n}$ é positiva semidefinida $\iff$
   $\exists\ B_{n\times n}$ com r $(B) < n$ tal que $B^\top B = A$ **ou**
   as raízes características de A
   são não negativas com no mínimo uma igual a zero.
2. Se $A_{n\times n}$ é positiva semidefinida então $r(A) < n$ e $a_{ii} \geq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.
3. $P^\top AP$ é positiva semidefinida para toda matriz $P_{n\times p}$.

Classificação de matrizes

1. $A_{n\times n}$ é positiva semidefinida $\iff$
   $\exists\ B_{n\times n}$ com r $(B) < n$ tal que $B^\top B = A$ **ou**
   as raízes características de A
   são não negativas com no mínimo uma igual a zero.
2. Se $A_{n\times n}$ é positiva semidefinida então $r(A) < n$ e $a_{ii} \geq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.
3. $P^\top AP$ é positiva semidefinida para toda matriz $P_{n\times p}$.

Classificação de matrizes

1. $A_{n\times n}$ é positiva semidefinida $\iff$
   $\exists\ B_{n\times n}$ com r $(B) < n$ tal que $B^\top B = A$ **ou**
   as raízes características de A
   são não negativas com no mínimo uma igual a zero.
2. Se $A_{n\times n}$ é positiva semidefinida então $r(A) < n$ e $a_{ii} \geq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.
3. $P^\top AP$ é positiva semidefinida para toda matriz $P_{n\times p}$.

Classificação de matrizes

1. $A_{n \times n}$ é negativa definida se -$A_{n \times n}$ é positiva definida.
2. $A_{n \times n}$ é negativa semidefinida se -$A_{n \times n}$ é positiva semidefinida.
3. $A^\top A$ é positiva definida se A tem posto completo.

Classificação de matrizes

1. $A_{n\times n}$ é negativa definida se -$A_{n\times n}$ é positiva definida.
2. $A_{n\times n}$ é negativa semidefinida se -$A_{n\times n}$ é positiva semidefinida.
3. $A^\top A$ é positiva definida se A tem posto completo.

Classificação de matrizes

1. $A_{n \times n}$ é negativa definida se -$A_{n \times n}$ é positiva definida.
2. $A_{n \times n}$ é negativa semidefinida se -$A_{n \times n}$ é positiva semidefinida.
3. $A^\top A$ é positiva definida se A tem posto completo.

Formas quadráticas

1. A função $f(x_1, ..., x_n)$ de n variáveis reais é uma forma quadrática se

$$f(x_1, ..., x_n) = \underset{\sim}{x}^\top A \underset{\sim}{x},$$

com $\underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ e $A = A_{n\times n}$ uma matriz simétrica (matriz da forma quadrática).

2. A forma quadrática mais simples é $f(x) = a_{11}x^2$.

Formas quadráticas

1. A função $f(x_1, ..., x_n)$ de n variáveis reais é uma forma quadrática se

$$f(x_1, ..., x_n) = \underset{\sim}{x}^\top A \underset{\sim}{x},$$

   com $\underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ e $A = A_{n \times n}$ uma matriz simétrica (matriz da forma quadrática).

2. A forma quadrática mais simples é $f(x) = a_{11}x^2$.

Classificação de formas quadráticas

1. A forma quadrática $(\underset{\sim}{x}^\top A\underset{\sim}{x})$ é positiva definida se

$$(\underset{\sim}{x}^\top A\underset{\sim}{x}) > 0 \text{ para todo } \underset{\sim}{x} \neq 0.$$

2. A forma quadrática $(\underset{\sim}{x}^\top A\underset{\sim}{x})$ é positiva semidefinida se

$$(\underset{\sim}{x}^\top A\underset{\sim}{x}) \geq 0 \text{ para todo } \underset{\sim}{x} \neq 0$$

e $(\underset{\sim}{x}^\top A\underset{\sim}{x}) = 0$ para pelo menos um $\underset{\sim}{x} \neq 0$.

Classificação de formas quadráticas

1. A forma quadrática $(\underset{\sim}{x}^\top A\underset{\sim}{x})$ é positiva definida se

$$(\underset{\sim}{x}^\top A\underset{\sim}{x}) > 0 \text{ para todo } \underset{\sim}{x} \neq 0.$$

2. A forma quadrática $(\underset{\sim}{x}^\top A\underset{\sim}{x})$ é positiva semidefinida se

$$(\underset{\sim}{x}^\top A\underset{\sim}{x}) \geq 0 \text{ para todo } \underset{\sim}{x} \neq 0$$

e $(\underset{\sim}{x}^\top A\underset{\sim}{x}) = 0$ para pelo menos um $\underset{\sim}{x} \neq 0$.

Autovalores e autovetores

Seja $A_{n \times n}$ uma matriz qualquer. Dizemos que $(\lambda, \underset{\sim}{v})$, com $\underset{\sim}{v} \neq 0$, é um par de autovalor e autovetor de A se

$$A\underset{\sim}{v} = \lambda \underset{\sim}{v}.$$

Seja $A_{k \times k}$ é uma matriz positiva definida, então A tem k pares de autovalor e autovetor,

$$(\lambda_1, \underset{\sim}{e}_1), \ldots, (\lambda_k, \underset{\sim}{e}_k).$$

Autovalores e autovetores

Seja $A_{n \times n}$ uma matriz qualquer. Dizemos que $(\lambda, \underset{\sim}{v})$, com $\underset{\sim}{v} \neq 0$, é um par de autovalor e autovetor de A se

$$A\underset{\sim}{v} = \lambda \underset{\sim}{v}.$$

Seja $A_{k \times k}$ é uma matriz positiva definida, então A tem k pares de autovalor e autovetor,

$$(\lambda_1, \underset{\sim}{e}_1), \ldots, (\lambda_k, \underset{\sim}{e}_k).$$

Autovalores e autovetores

Se $A_{k\times k}$ é uma matriz positiva definida com pares de autovalor e autovetor dados por

$$(\lambda_1, \underset{\sim}{e}_1), \ldots, (\lambda_k, \underset{\sim}{e}_k).$$

Então os autovetores sempre podem ser escolhidos de tal forma que

$$1 = \underset{\sim}{e}_1^\top \underset{\sim}{e}_1 = \ldots = \underset{\sim}{e}_k^\top \underset{\sim}{e}_k$$

e $\underset{\sim}{e}_i^\top \underset{\sim}{e}_j = 0$ para todo $i, j = 1, \ldots, k$ e $i \neq j$.

Matrizes idempotentes

1. $B_{n \times n}$ é idempotente se $B = BB$.
2. Se A é idempotente, então r $(A) = \text{tr}(A)$.
3. Se $A - B$ é idempotente, então r $(A - B) =$ r $(A) -$ r (B).

Matrizes idempotentes

1. $B_{n\times n}$ é idempotente se $B = BB$.
2. Se A é idempotente, então r $(A) = \text{tr}(A)$.
3. Se $A - B$ é idempotente, então r $(A - B) =$ r $(A) -$ r (B).

Matrizes idempotentes

1. $B_{n\times n}$ é idempotente se $B = BB$.
2. Se A é idempotente, então r $(A) = \text{tr}(A)$.
3. Se $A - B$ é idempotente, então r $(A - B) =$ r $(A) -$ r (B).

Matrizes idempotentes

Sejam $X_{n\times(p+1)}$ com $n > (p+1)$ e posto $p+1$ (posto completo) e $H = X(X^\top X)^{-1}X^\top$ a matriz hat ou chapéu. Então

1. H é idempotente.
2. $(I - H)$ é idempotente.
3. H e $(I - H)$ são ortogonais, ou seja, $(I - H)H = 0$.
4. $\text{r}\,(H) = \text{r}\,(X) = p + 1$.
5. $\text{r}\,(I - H) = n - (p + 1)$.

Matrizes idempotentes

Sejam $X_{n\times(p+1)}$ com $n > (p+1)$ e posto $p+1$ (posto completo) e $H = X(X^\top X)^{-1}X^\top$ a matriz hat ou chapéu. Então

1. H é idempotente.
2. $(I - H)$ é idempotente.
3. H e $(I - H)$ são ortogonais, ou seja, $(I - H)H = 0$.
4. $\text{r}\,(H) = \text{r}\,(X) = p + 1$.
5. $\text{r}\,(I - H) = n - (p + 1)$.

Matrizes idempotentes

Sejam $X_{n\times(p+1)}$ com $n > (p+1)$ e posto $p+1$ (posto completo) e $H = X(X^\top X)^{-1}X^\top$ a matriz hat ou chapéu. Então

1. H é idempotente.
2. $(I - H)$ é idempotente.
3. H e $(I - H)$ são ortogonais, ou seja, $(I - H)H = 0$.
4. $\text{r}\,(H) = \text{r}\,(X) = p + 1$.
5. $\text{r}\,(I - H) = n - (p + 1)$.

Matrizes idempotentes

Sejam $X_{n\times(p+1)}$ com $n > (p+1)$ e posto $p+1$ (posto completo) e $H = X(X^\top X)^{-1}X^\top$ a matriz hat ou chapéu. Então

1. H é idempotente.
2. $(I - H)$ é idempotente.
3. H e $(I - H)$ são ortogonais, ou seja, $(I - H)H = 0$.
4. $\mathrm{r}\,(H) = \mathrm{r}\,(X) = p + 1$.
5. $\mathrm{r}\,(I - H) = n - (p + 1)$.

Matrizes idempotentes

Sejam $X_{n\times(p+1)}$ com $n > (p+1)$ e posto $p+1$ (posto completo) e $H = X(X^\top X)^{-1}X^\top$ a matriz hat ou chapéu. Então

1. H é idempotente.
2. $(I - H)$ é idempotente.
3. H e $(I - H)$ são ortogonais, ou seja, $(I - H)H = 0$.
4. $\mathrm{r}\,(H) = \mathrm{r}\,(X) = p + 1$.
5. $\mathrm{r}\,(I - H) = n - (p + 1)$.

Decomposição espectral

A decomposição espectral de uma matriz simétrica $A_{k\times k}$ é dada por

$$A = \lambda_1 \underset{\sim}{e}_1 \underset{\sim}{e}_1^\top + \ldots + \lambda_k \underset{\sim}{e}_k \underset{\sim}{e}_k^\top$$

com $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ autovalores de A com $\underset{\sim}{e}_1, \ldots, \underset{\sim}{e}_k$ autovetores correspondentes, tais que

$$1 = \underset{\sim}{e}_1^\top \underset{\sim}{e}_1 = \ldots = \underset{\sim}{e}_k^\top \underset{\sim}{e}_k \text{ e } \underset{\sim}{e}_i^\top \underset{\sim}{e}_j = 0,$$

para todo $i, j = 1, \ldots, k$ e $i \neq j$.

Decomposição espectral

Seja A uma matriz positiva definida com decomposição espectral

$$A = \lambda_1 \underset{\sim}{e}_1 \underset{\sim}{e}_1^\top + \ldots + \lambda_k \underset{\sim}{e}_k \underset{\sim}{e}_k^\top = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underset{\sim}{e}_i \underset{\sim}{e}_i^\top$$

e seja

$$P = \left[\underset{\sim}{e}_1 \ldots \underset{\sim}{e}_k \right].$$

(continua...)

Decomposição espectral

Então podemos escrever

$$A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underset{\sim}{e}_i \underset{\sim}{e}_i^\top = P \Lambda P^\top$$

com

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix}$$

e $\lambda_i > 0$.

Decomposição espectral

Além disso, $A^{-1} = P\Lambda^{-1}P^\top = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i} \underset{\sim}{e}_i \underset{\sim}{e}_i^\top$, já que

$$(P\Lambda P^\top)(P\Lambda^{-1}P^\top) = P\Lambda P^\top P\Lambda^{-1}P^\top = I.$$

Decomposição espectral

Seja $\Lambda^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_k} \end{bmatrix}$.

Def. A raiz quadrada de A é denotada por $A^{1/2}$ e pode ser escrita na forma $A^{1/2} = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\lambda_i} \underset{\sim}{e}_i \underset{\sim}{e}_i^\top$ e tem as seguintes propriedades

1. $(A^{1/2})^\top = A^{1/2}$ (simétrica),
2. $A^{1/2}A^{1/2} = A$,
3. $(A^{1/2})^{-1} = P\Lambda^{-1/2}P^\top$,
4. $A^{1/2}(A^{1/2})^{-1} = I$,
5. $A^{-1/2}A^{-1/2} = A^{-1}$ em que $A^{-1/2} = (A^{1/2})^{-1}$.

Decomposição espectral

Seja $\Lambda^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_k} \end{bmatrix}$.

Def. A raiz quadrada de A é denotada por $A^{1/2}$ e pode ser escrita na forma $A^{1/2} = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\lambda_i} \underset{\sim}{e}_i \underset{\sim}{e}_i^\top$ e tem as seguintes propriedades

1. $(A^{1/2})^\top = A^{1/2}$ (simétrica),
2. $A^{1/2}A^{1/2} = A$,
3. $(A^{1/2})^{-1} = P\Lambda^{-1/2}P^\top$,
4. $A^{1/2}(A^{1/2})^{-1} = I$,
5. $A^{-1/2}A^{-1/2} = A^{-1}$ em que $A^{-1/2} = (A^{1/2})^{-1}$.

Decomposição espectral

Seja $\Lambda^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_k} \end{bmatrix}$.

Def. A raiz quadrada de A é denotada por $A^{1/2}$ e pode ser escrita na forma $A^{1/2} = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\lambda_i} \underset{\sim}{e}_i \underset{\sim}{e}_i^\top$ e tem as seguintes propriedades

1. $(A^{1/2})^\top = A^{1/2}$ (simétrica),
2. $A^{1/2}A^{1/2} = A$,
3. $(A^{1/2})^{-1} = P\Lambda^{-1/2}P^\top$,
4. $A^{1/2}(A^{1/2})^{-1} = I$,
5. $A^{-1/2}A^{-1/2} = A^{-1}$ em que $A^{-1/2} = (A^{1/2})^{-1}$.

Decomposição espectral

Seja $\Lambda^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_k} \end{bmatrix}$.

Def. A raiz quadrada de A é denotada por $A^{1/2}$ e pode ser escrita na forma $A^{1/2} = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\lambda_i} \underset{\sim}{e}_i \underset{\sim}{e}_i^\top$ e tem as seguintes propriedades

1. $(A^{1/2})^\top = A^{1/2}$ (simétrica),
2. $A^{1/2}A^{1/2} = A$,
3. $(A^{1/2})^{-1} = P\Lambda^{-1/2}P^\top$,
4. $A^{1/2}(A^{1/2})^{-1} = I$,
5. $A^{-1/2}A^{-1/2} = A^{-1}$ em que $A^{-1/2} = (A^{1/2})^{-1}$.

Decomposição espectral

Seja $\Lambda^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_k} \end{bmatrix}$.

Def. A raiz quadrada de A é denotada por $A^{1/2}$ e pode ser escrita na forma $A^{1/2} = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\lambda_i} \underset{\sim}{e}_i \underset{\sim}{e}_i^\top$ e tem as seguintes propriedades

1. $(A^{1/2})^\top = A^{1/2}$ (simétrica),
2. $A^{1/2}A^{1/2} = A$,
3. $(A^{1/2})^{-1} = P\Lambda^{-1/2}P^\top$,
4. $A^{1/2}(A^{1/2})^{-1} = I$,
5. $A^{-1/2}A^{-1/2} = A^{-1}$ em que $A^{-1/2} = (A^{1/2})^{-1}$.

Outras decomposições

1. Uma matriz simétrica pode ser fatorada como

$$A = LDL^\top$$

onde L é uma matriz triangular inferior e D é uma matriz diagonal.

2. A é positiva definida se e somente se existir uma matriz W não singular tal que

$$A = WW^\top$$

(Decomposição de Cholesky).

3. Para $A_{p\times p}$ positiva definida, existe uma única matriz triangular superior T tal que

$$A = T^\top T$$

com $t_{ii} > 0$ para todo $i = 1, \dots, p$.

Outras decomposições

1. Uma matriz simétrica pode ser fatorada como

$$A = LDL^\top$$

onde L é uma matriz triangular inferior e D é uma matriz diagonal.

2. A é positiva definida se e somente se existir uma matriz W não singular tal que

$$A = WW^\top$$

(Decomposição de Cholesky).

3. Para $A_{p\times p}$ positiva definida, existe uma única matriz triangular superior T tal que

$$A = T^\top T$$

com $t_{ii} > 0$ para todo $i = 1, \ldots, p$.

Outras decomposições

1. Uma matriz simétrica pode ser fatorada como
$$A = LDL^\top$$
onde L é uma matriz triangular inferior e D é uma matriz diagonal.
2. A é positiva definida se e somente se existir uma matriz W não singular tal que
$$A = WW^\top$$
(Decomposição de Cholesky).
3. Para $A_{p\times p}$ positiva definida, existe uma única matriz triangular superior T tal que
$$A = T^\top T$$
com $t_{ii} > 0$ para todo $i = 1, \ldots, p$.

Produto de Kronecker

Sejam $A_{m\times n} = (a_{ij})$ e $B_{p\times q} = (b_{ij})$.
O produto de Kronecker entre A e B é definido por

$$(A \otimes B)_{mp\times nq} = (a_{ij}B).$$

Produto de Kronecker

Propriedades do produto de Kronecker

1. $0 \otimes A = A \otimes 0 = 0$
2. $(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$
3. $A \otimes (B + C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$
4. $aA \otimes bB = ab(A \otimes B)$, com $a, b \in \mathbb{R}$
5. $(AB) \otimes (CD) = (A \otimes C)(B \otimes D)$
6. $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ se A^{-1} e B^{-1} existirem
7. $(A \otimes B)^{\top} = A^{\top} \otimes B^{\top}$
8. $(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = I$
9. $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$.

Produto de Kronecker

Propriedades do produto de Kronecker

1. $0 \otimes A = A \otimes 0 = 0$
2. $(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$
3. $A \otimes (B + C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$
4. $aA \otimes bB = ab(A \otimes B)$, com $a, b \in \mathbb{R}$
5. $(AB) \otimes (CD) = (A \otimes C)(B \otimes D)$
6. $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ se A^{-1} e B^{-1} existirem
7. $(A \otimes B)^{\top} = A^{\top} \otimes B^{\top}$
8. $(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = I$
9. $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$.

Produto de Kronecker

Propriedades do produto de Kronecker

1. $0 \otimes A = A \otimes 0 = 0$
2. $(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$
3. $A \otimes (B + C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$
4. $aA \otimes bB = ab(A \otimes B)$, com $a, b \in \mathbb{R}$
5. $(AB) \otimes (CD) = (A \otimes C)(B \otimes D)$
6. $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ se A^{-1} e B^{-1} existirem
7. $(A \otimes B)^{\top} = A^{\top} \otimes B^{\top}$
8. $(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = I$
9. $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C.$

Produto de Kronecker

Propriedades do produto de Kronecker

1. $0 \otimes A = A \otimes 0 = 0$
2. $(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$
3. $A \otimes (B + C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$
4. $aA \otimes bB = ab(A \otimes B)$, com $a, b \in \mathbb{R}$
5. $(AB) \otimes (CD) = (A \otimes C)(B \otimes D)$
6. $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ se A^{-1} e B^{-1} existirem
7. $(A \otimes B)^\top = A^\top \otimes B^\top$
8. $(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = I$
9. $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$.

Produto de Kronecker

Propriedades do produto de Kronecker

1. $0 \otimes A = A \otimes 0 = 0$
2. $(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$
3. $A \otimes (B + C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$
4. $aA \otimes bB = ab(A \otimes B)$, com $a, b \in \mathbb{R}$
5. $(AB) \otimes (CD) = (A \otimes C)(B \otimes D)$
6. $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ se A^{-1} e B^{-1} existirem
7. $(A \otimes B)^{\top} = A^{\top} \otimes B^{\top}$
8. $(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = I$
9. $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C.$

Produto de Kronecker

Propriedades do produto de Kronecker

1. $0 \otimes A = A \otimes 0 = 0$
2. $(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$
3. $A \otimes (B + C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$
4. $aA \otimes bB = ab(A \otimes B)$, com $a, b \in \mathbb{R}$
5. $(AB) \otimes (CD) = (A \otimes C)(B \otimes D)$
6. $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ se A^{-1} e B^{-1} existirem
7. $(A \otimes B)^\top = A^\top \otimes B^\top$
8. $(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = I$
9. $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C.$

Produto de Kronecker

Propriedades do produto de Kronecker

1. $0 \otimes A = A \otimes 0 = 0$
2. $(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$
3. $A \otimes (B + C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$
4. $aA \otimes bB = ab(A \otimes B)$, com $a, b \in \mathbb{R}$
5. $(AB) \otimes (CD) = (A \otimes C)(B \otimes D)$
6. $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ se A^{-1} e B^{-1} existirem
7. $(A \otimes B)^\top = A^\top \otimes B^\top$
8. $(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = I$
9. $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C.$

Produto de Kronecker

Propriedades do produto de Kronecker

1. $0 \otimes A = A \otimes 0 = 0$
2. $(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$
3. $A \otimes (B + C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$
4. $aA \otimes bB = ab(A \otimes B)$, com $a, b \in \mathbb{R}$
5. $(AB) \otimes (CD) = (A \otimes C)(B \otimes D)$
6. $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ se A^{-1} e B^{-1} existirem
7. $(A \otimes B)^\top = A^\top \otimes B^\top$
8. $(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = I$
9. $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C.$

Produto de Kronecker

Propriedades do produto de Kronecker

1. $0 \otimes A = A \otimes 0 = 0$
2. $(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$
3. $A \otimes (B + C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$
4. $aA \otimes bB = ab(A \otimes B)$, com $a, b \in \mathbb{R}$
5. $(AB) \otimes (CD) = (A \otimes C)(B \otimes D)$
6. $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ se A^{-1} e B^{-1} existirem
7. $(A \otimes B)^\top = A^\top \otimes B^\top$
8. $(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = I$
9. $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C.$

Operações com matrizes em blocos

Sejam A, B, C, ... matrizes com dimensões adequadas em cada caso.

1. $$\begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^\star & B^\star & C^\star \\ D^\star & E^\star & F^\star \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+A^\star & B+B^\star & C+C^\star \\ D+D^\star & E+E^\star & F+F^\star \end{bmatrix},$$
   desde que as somas sejam possíveis.

2. $$\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PE+QG \\ RE+SG \end{bmatrix},$$
   desde que os produtos sejam possíveis.

3. $H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_{m\times n} \Rightarrow H^\top = \begin{bmatrix} A^\top & C^\top \\ B^\top & D^\top \end{bmatrix}_{n\times m}$

Operações com matrizes em blocos

Sejam A, B, C, ... matrizes com dimensões adequadas em cada caso.

1. $$\begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^\star & B^\star & C^\star \\ D^\star & E^\star & F^\star \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+A^\star & B+B^\star & C+C^\star \\ D+D^\star & E+E^\star & F+F^\star \end{bmatrix},$$
   desde que as somas sejam possíveis.

2. $$\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PE+QG \\ RE+SG \end{bmatrix},$$
   desde que os produtos sejam possíveis.

3. $H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_{m\times n} \Rightarrow H^\top = \begin{bmatrix} A^\top & C^\top \\ B^\top & D^\top \end{bmatrix}_{n\times m}$

Operações com matrizes em blocos

Sejam A, B, C, ... matrizes com dimensões adequadas em cada caso.

1. $$\begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^\star & B^\star & C^\star \\ D^\star & E^\star & F^\star \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+A^\star & B+B^\star & C+C^\star \\ D+D^\star & E+E^\star & F+F^\star \end{bmatrix},$$
   desde que as somas sejam possíveis.

2. $$\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PE+QG \\ RE+SG \end{bmatrix},$$
   desde que os produtos sejam possíveis.

3. $H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_{m\times n} \Rightarrow H^\top = \begin{bmatrix} A^\top & C^\top \\ B^\top & D^\top \end{bmatrix}_{n\times m}$

Inversas de matrizes em blocos

Seja B uma matriz particionada em blocos,

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

em que B_{11} e B_{22} são matrizes quadradas não-singulares.
Então

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} (B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21})^{-1} & -B_{11}^{-1}B_{12}(B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12})^{-1} \\ -B_{22}^{-1}B_{21}(B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21})^{-1} & (B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12})^{-1} \end{bmatrix}$$

e

$$|B| = |B_{22}||B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}| = |B_{11}||B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12}|$$

Inversas de matrizes em blocos

Seja B uma matriz bloco diagonal

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \end{bmatrix}$$

em que B_{11}, B_{22} e B_{33} são matrizes quadradas não-singulares.

Então $$B^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & B_{22}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33}^{-1} \end{bmatrix}$$

e $$|B| = |B_{11}||B_{22}||B_{33}|.$$

O resultado vale para matrizes bloco diagonal de maior dimensão.