EACH

Escola de Artes, Ciências e Humanidades
da Universidade de São Paulo

# Cálculo II:
# Curvas de nível

ACH 4553 Cálculo II - Marketing
Prof. Andrea Lucchesi

# Agenda

1. Representação geométrica de funções de 2 variáveis
2. Alguns gráficos de funções de 2 variáveis
3. Curvas de nível

<u>Referência</u>:

**Cap 9**: págs 232 a 243 (seções 9.1 a 9.3)

**Cap 9**: págs 243 a 245 (seção 9.4)

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

# Agenda

1. Representação geométrica de funções de 2 variáveis
2. Alguns gráficos de funções de 2 variáveis
3. Curvas de nível

Referência:

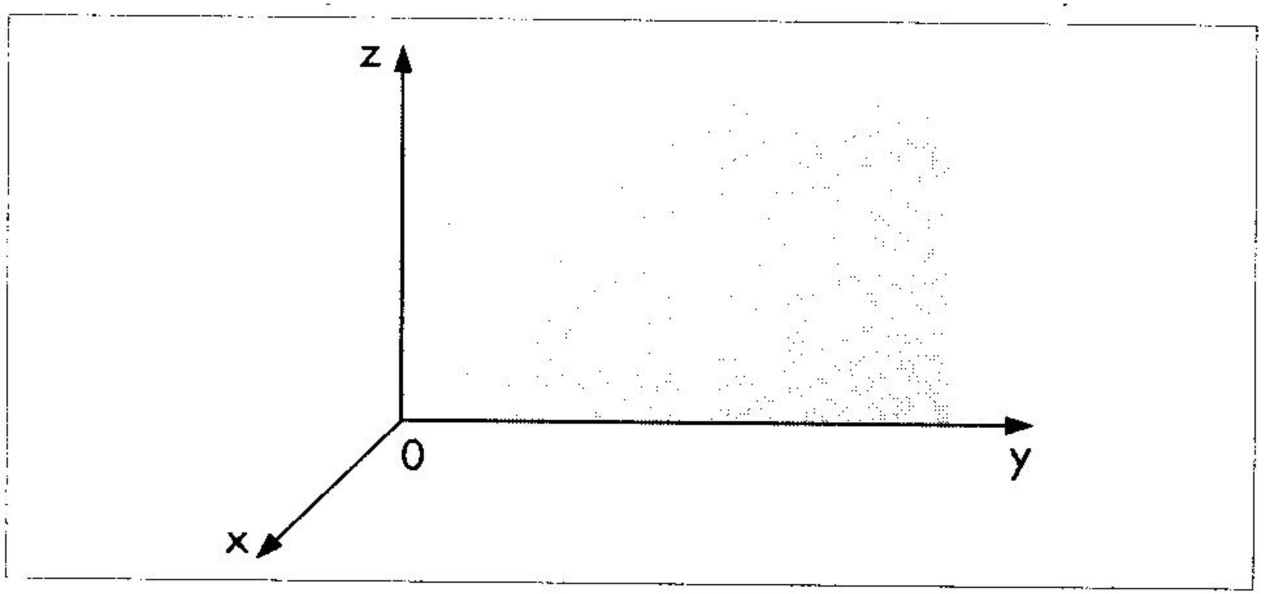
**Cap 9**: págs 232 a 243 (seções 9.1 a 9.3)

**Cap 9**: págs 243 a 245 (seção 9.4)

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

## 1. Representação geométrica de função de 2 variáveis

- As funções de 2 variáveis são representadas no espaço tridimensional.
- Ou seja, é possível representar graficamente as funções de 2 variáveis por superfícies descritas em um sistema tridimensional de coordenadas.
- Acrescenta-se o eixo z ao já conhecido plano xy.
- O eixo z é perpendicular ao eixo xy.

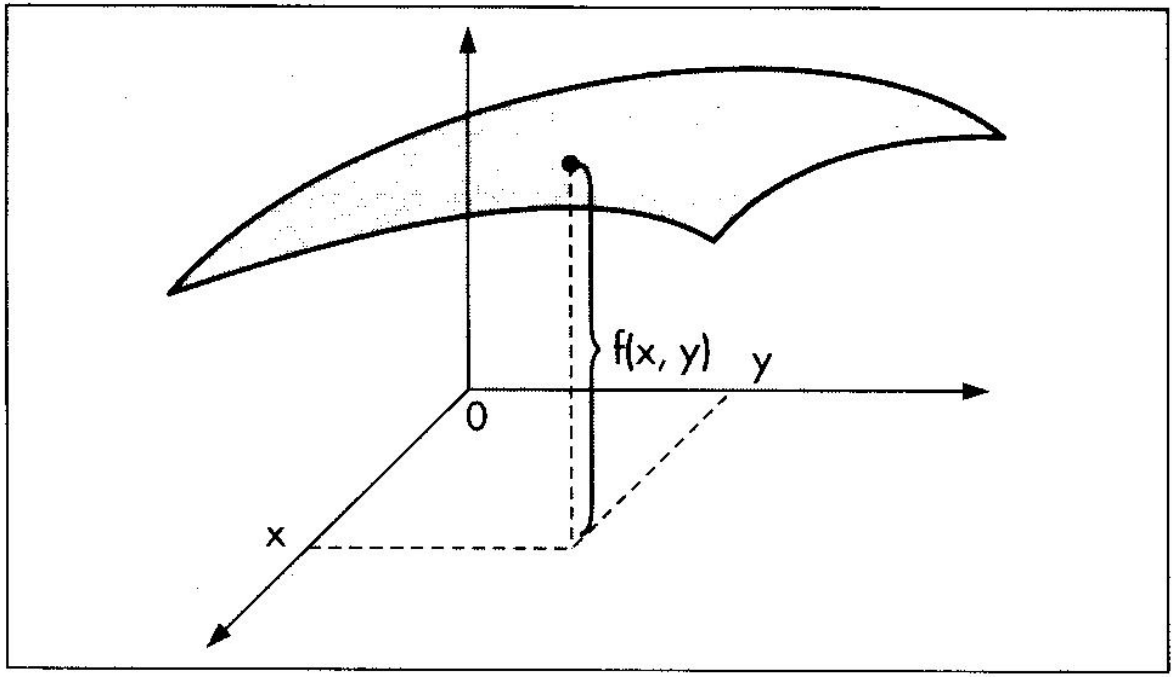


## 1. Representação geométrica de função de 2 variáveis *(continuação)*

- A posição de um ponto no espaço tridimensional é especificada através de **triplas ordenadas** (x, y, z);

- Os pares ordenados (x,y) pertencentes ao domínio de f(x,y), são pontos do plano xy e á a "altura" do par ordenado (ou "profundidade" se z for negativo).

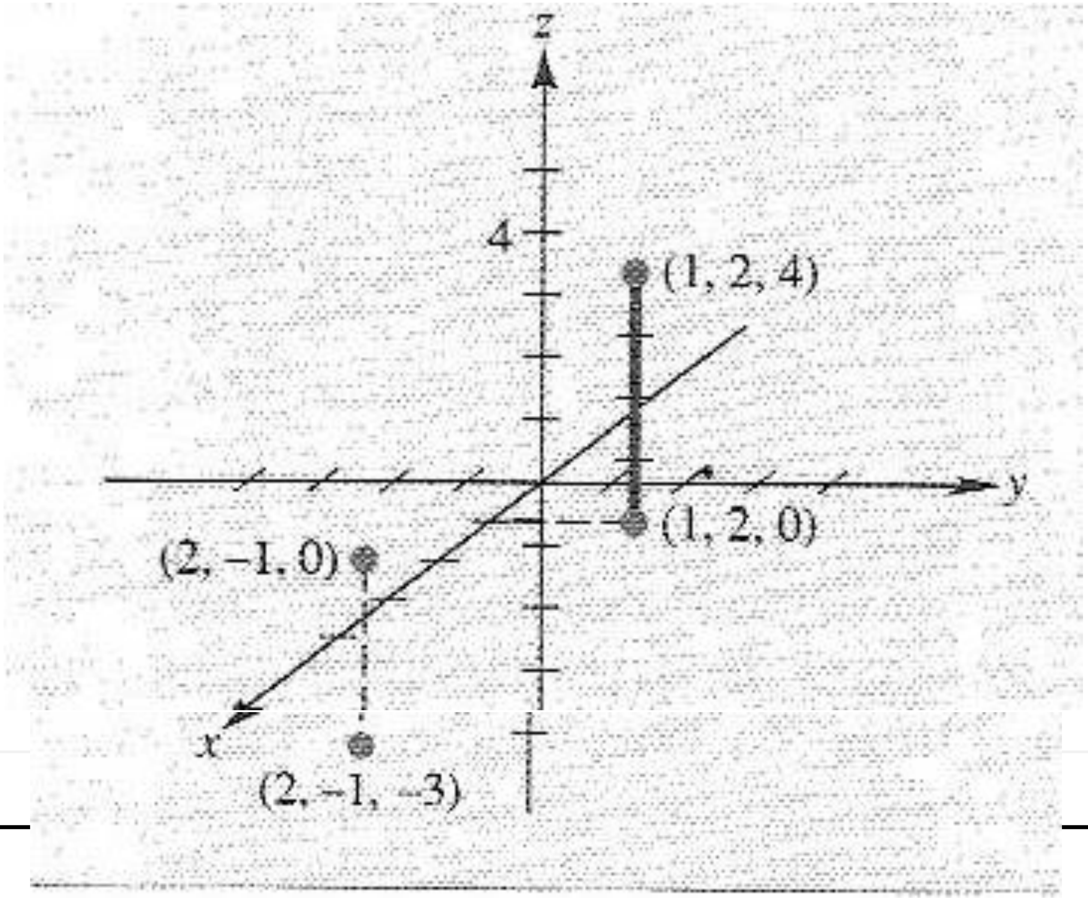
Figura 9.3: Gráfico de funções de duas variáveis.



## 1. Representação geométrica de função de 2 variáveis *(continuação)*

- Por convenção supõe-se que o plano xy é horizontal e o sentido positivo do eixo z é “para cima”;

- No gráfico abaixo observa-se as triplas ordenadas (1, 2, 4) ; (1, 2, 0) ; (2, -1, 0) e (2, -1 e -3)



## 1. Representação geométrica de função de 2 variáveis *(continuação)*

- Considerando a função f(x,y) = 6 – 2x – 3y com $D_f = R^2$;

- O gráfico dessa função é um plano no espaço tridimensional;

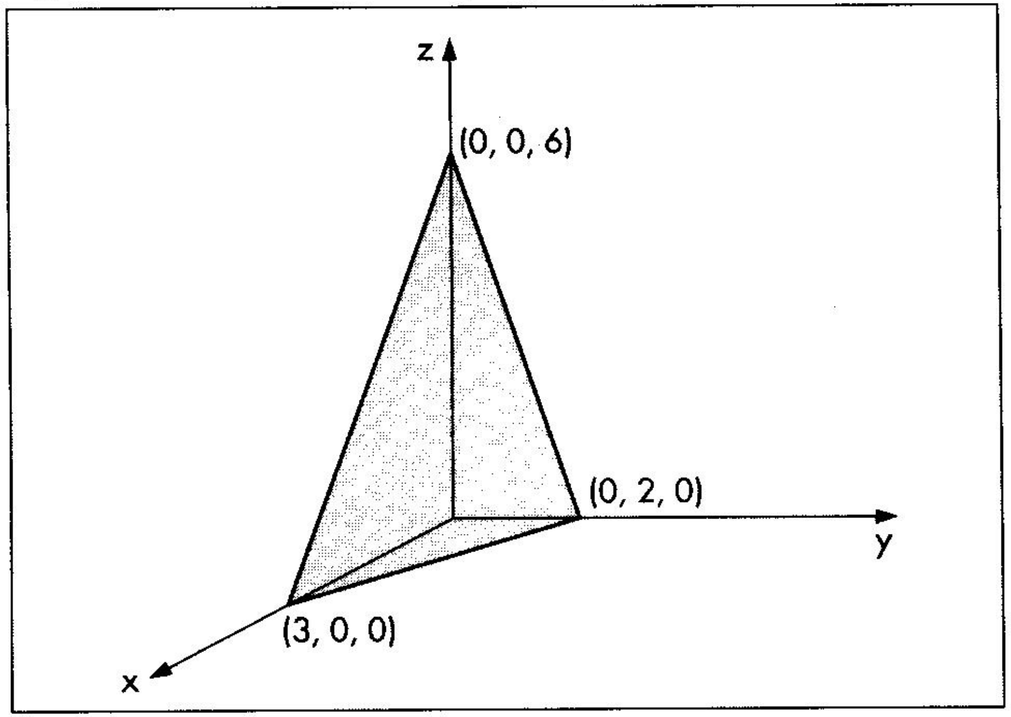
Para desenharmos esse plano tomemos três de seus pontos que sejam não alinhados.

- Para $x = 0$ e $y = 0 \Rightarrow z = 6$. Temos o ponto (0, 0, 6).
- Para $x = 0$ e $z = 0 \Rightarrow y = 2$. Temos o ponto (0, 2, 0).
- Para $y = 0$ e $z = 0 \Rightarrow x = 3$. Temos o ponto (3, 0, 0).

0 = 6 – 2.0 – 3y
3y = 6
y = 2

0 = 6 – 2x – 3.0
2x = 6
x = 3

Figura 9.6: Gráfico da função $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$.



# Agenda

1. Representação geométrica de funções de 2 variáveis
2. Alguns gráficos de funções de 2 variáveis
3. Curvas de nível

Referência:

**Cap 9**: págs 232 a 243 (seções 9.1 a 9.3)

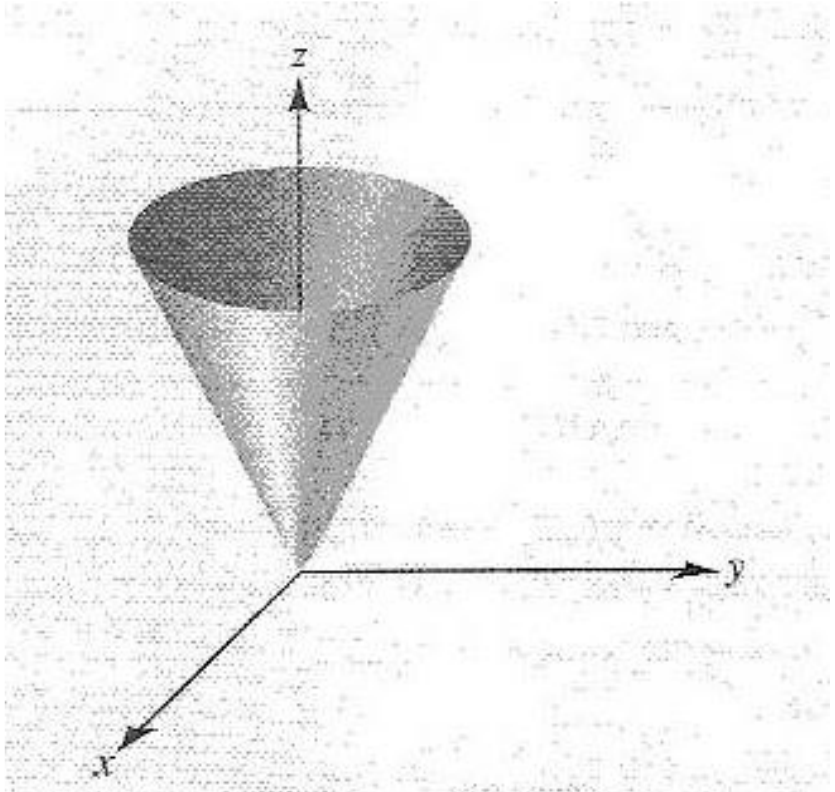
**Cap 9**: págs 243 a 245 (seção 9.4)

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

## 2. Alguns gráficos de funções de duas variáveis

- Exemplo 1: função f(x,y) = $\sqrt{x^2 + y^2}$ com $D_f = R^2$;

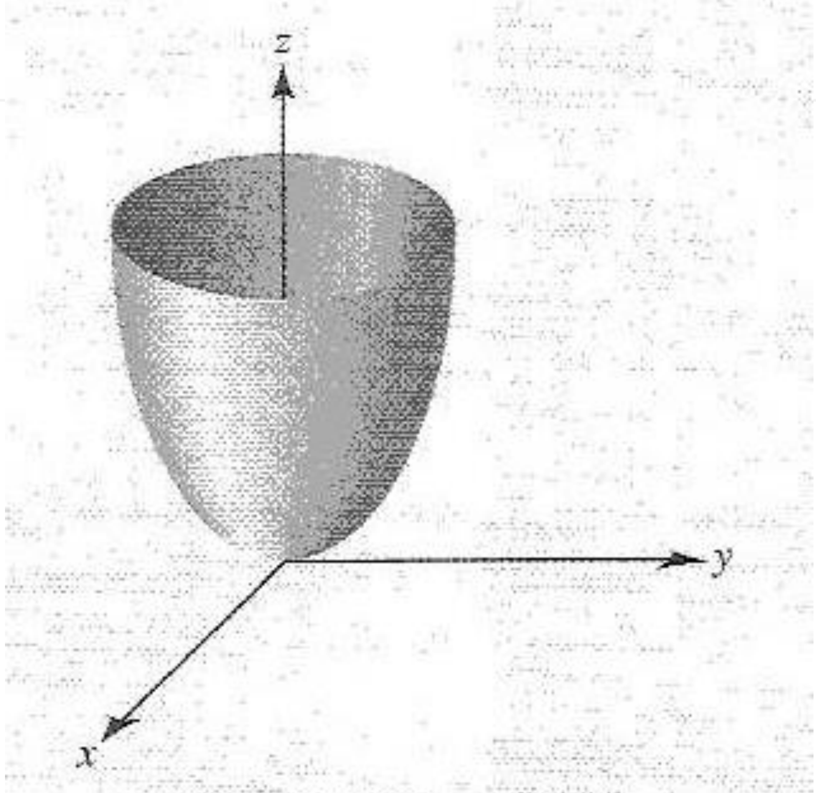
- O gráfico dessa função é um cone no espaço tridimensional;




(a) Cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

## 2. Alguns gráficos de funções de duas variáveis *(continuação)*

- Exemplo 2: função f(x,y) = $x^2 + y^2$ com $D_f = R^2$;
- O gráfico dessa função é uma parabolóide no espaço tridimensional;

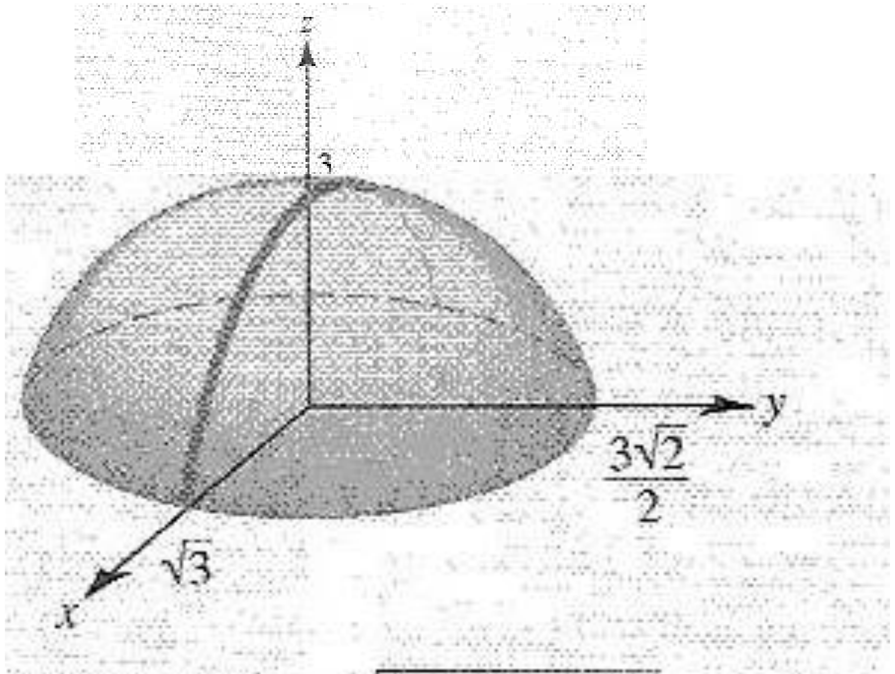


(b) Parabolóide $z = x^2 + y^2$

## 2. Alguns gráficos de funções de duas variáveis *(continuação)*

- Exemplo 3: função f(x,y) = $\sqrt{9-3x^2-2y^2}$ com $D_f$ = ((x,y) ∈ $R^2$ / $x^2 < \frac{2}{3}y^2 + 3$ }

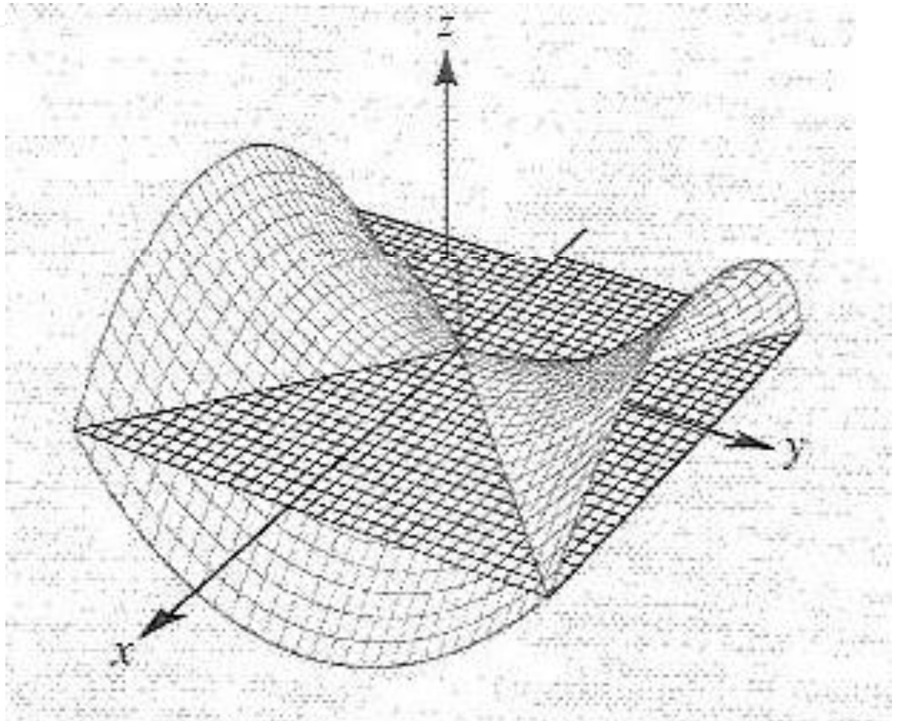
- O gráfico dessa função é um elipsóide no espaço tridimensional;




(c) Elipsóide $z = \sqrt{9-3x^2-2y^2}$

## 2. Alguns gráficos de funções de duas variáveis *(continuação)*

- Exemplo 2: função f(x,y) = $y^2 - x^2$ com $D_f$ = $R^2$
- O gráfico dessa função é uma superfície de sela no espaço tridimensional;




(d) Superfície de sela $z = y^2 - x^2$

# Agenda

1. Representação geométrica de funções de 2 variáveis
2. Alguns gráficos de funções de 2 variáveis
3. Curvas de nível

Referência:

**Cap 9**: págs 232 a 243 (seções 9.1 a 9.3)

**Cap 9**: págs 243 a 245 (seção 9.4)

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

## 3. Curvas de nível

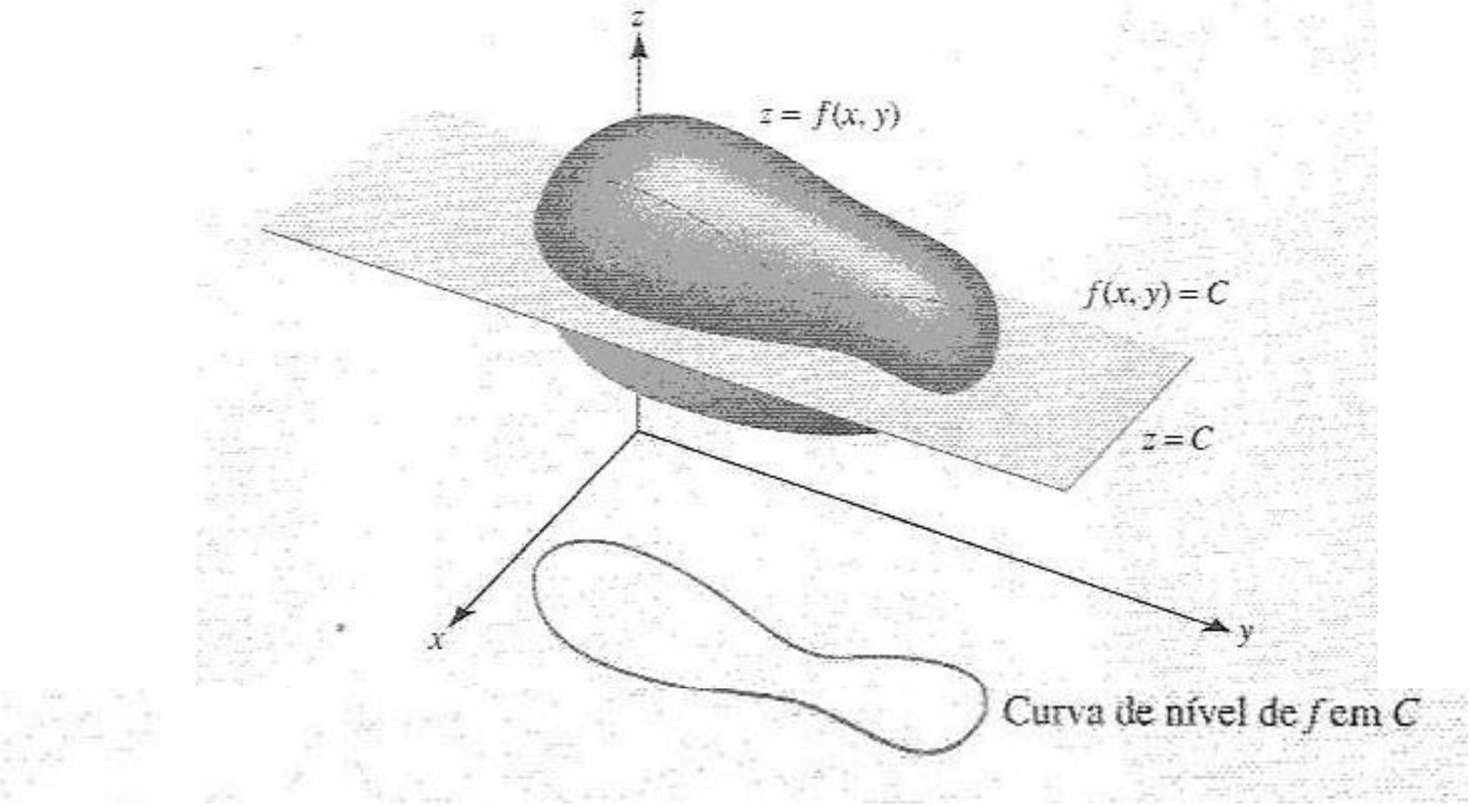
- Existem muitas situações em que se deseja conhecer combinações possíveis das variáveis x e y para as quais as a função $f(x, y)$ será igual a uma certa constante $c$.

- Nesse caso, tais combinações podem ser representadas geometricamente como pontos sobre uma curva no plano xy.

- Tal curva denomina-se **curva de nível** de $f(x, y)$ : $\boxed{f(x, y) = c}$

## 3. Curvas de nível *(continuação)*

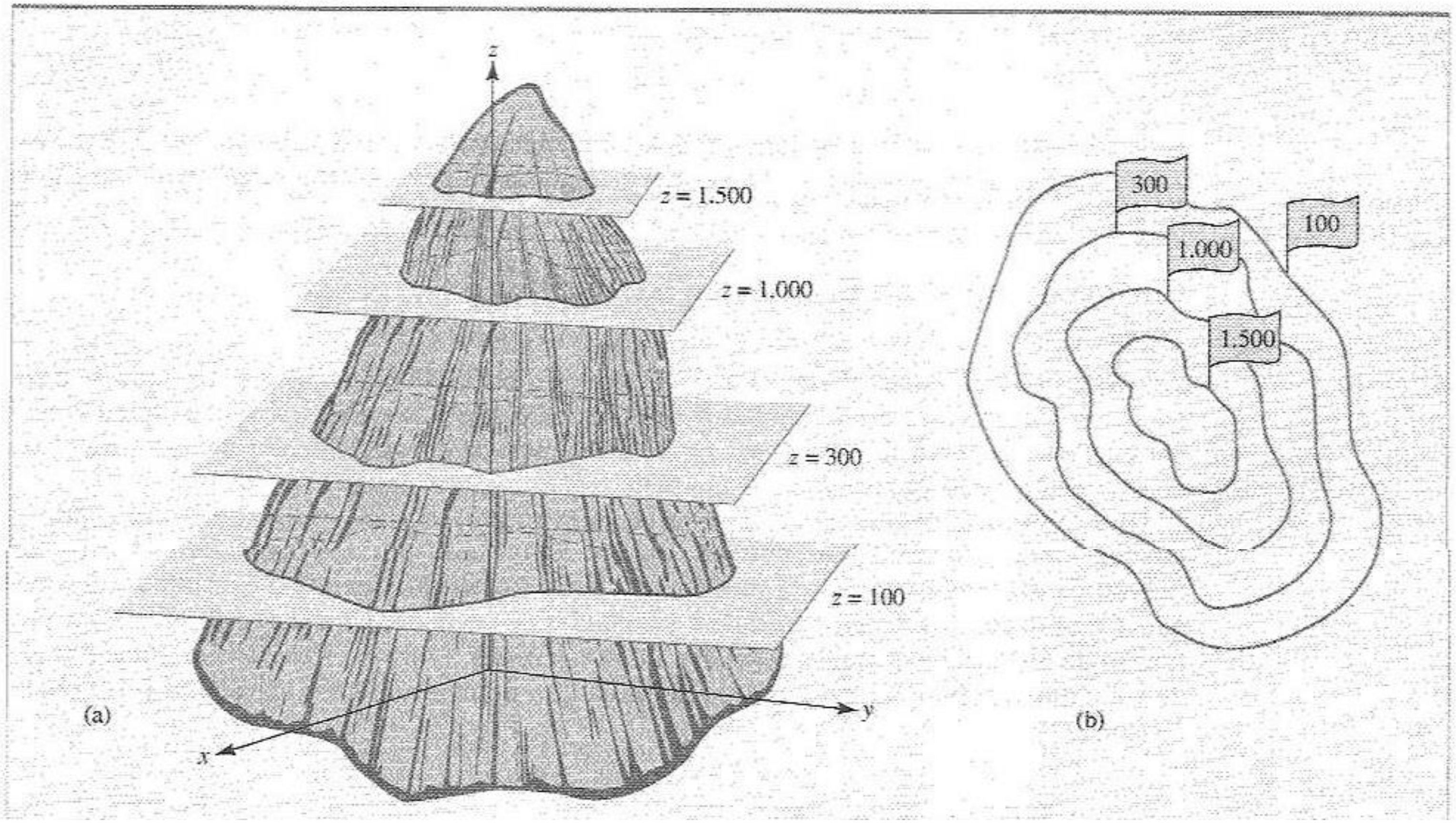
- A curva de nível $\boldsymbol{f(x,y) = c}$ é a projeção, sobre o plano $\boldsymbol{xy}$, da curva formada pela intersecção da superfície $z = \boldsymbol{f(x,y)}$ com o plano horizontal



## 3. Curvas de nível *(continuação)*

- Exemplo 1: (a) A superfície z = f(x,y) como uma montanha; (b) as curvas de nível representam um mapa topográfico de z = f(x,y)

- Atribuindo valores a c, obtemos as curvas de nível de f(x,y).



## 3. Curvas de nível *(continuação)*

- <u>Exemplo 2</u>: Seja a função $f(x,y) = x^2 + y^2$. Encontre suas curvas de nível quando c = 1, c = 4 e c = 9.

se **c = 1**: (equivalente a z = 1)

1) substituir na função f(x,y): $x^2 + y^2 = 1$

2) classificar o tipo de função obtido: equação da circunferência: de raio 1 e centro (0,0)

$(x - 0)^2 + (y-0)^2 = 1^2$

se **c = 4**: (equivalente a z = 4)

1) substituir na função f(x,y): $x^2 + y^2 = 4$

2) classificar o tipo de função obtido: equação da circunferência: de raio 2 e centro (0,0)

$(x - 0)^2 + (y-0)^2 = 2^2$

## 3. Curvas de nível *(continuação)*

- Exemplo 3: Seja a função $f(x,y) = x^2 + y^2$. Encontre suas curvas de nível quando c = 1, c = 4 e c = 9.

se **c = 9**: (equivalente a z = 9)

1) substituir na função f(x,y): $x^2 + y^2 = 9$

2) classificar o tipo de função obtido: equação da circunferência: de raio 3 e centro (0,0)

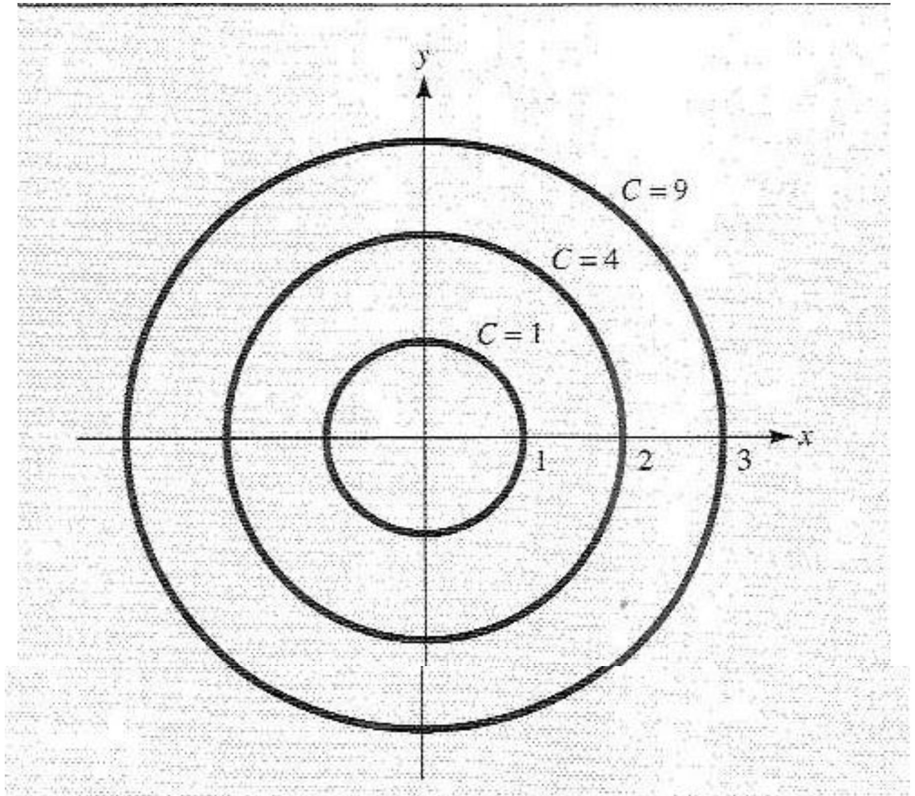
$(x - 0)^2 + (y-0)^2 = 3^2$

**=> Colocar as 3 curvas de nível no mesmo gráfico (no mesmo plano xy)**

## 3. Curvas de nível *(continuação)*

- Exemplo 3: Seja a função $f(x,y) = x^2 + y^2$. Encontre suas curvas de nível quando c = 1, c = 4 e c = 9.

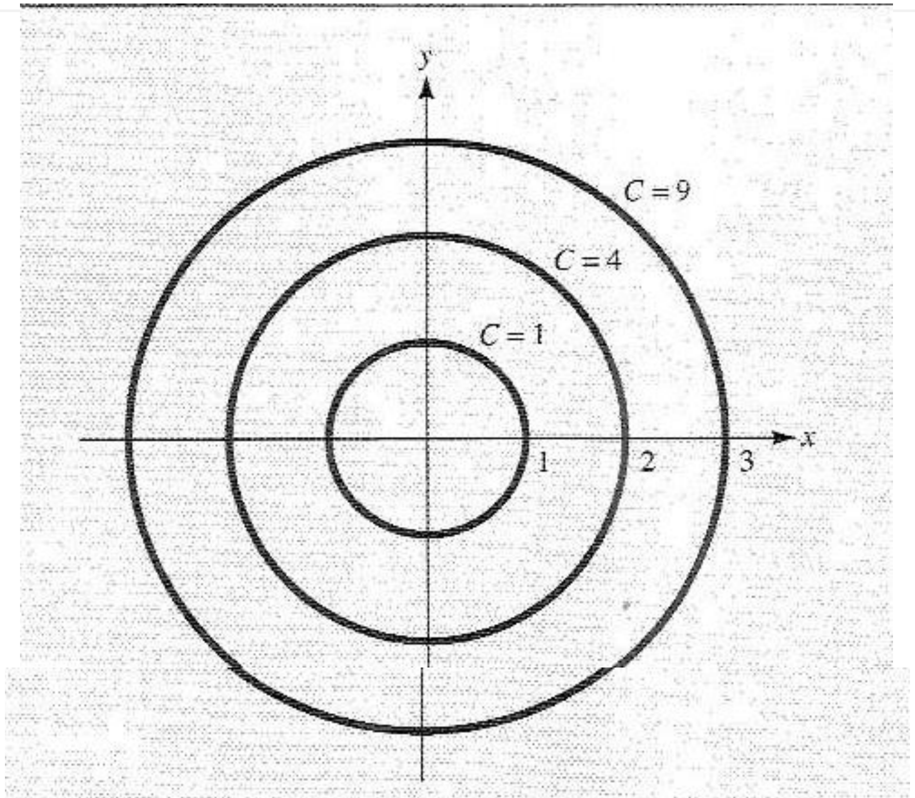
**=> Colocar as 3 curvas de nível no mesmo gráfico**



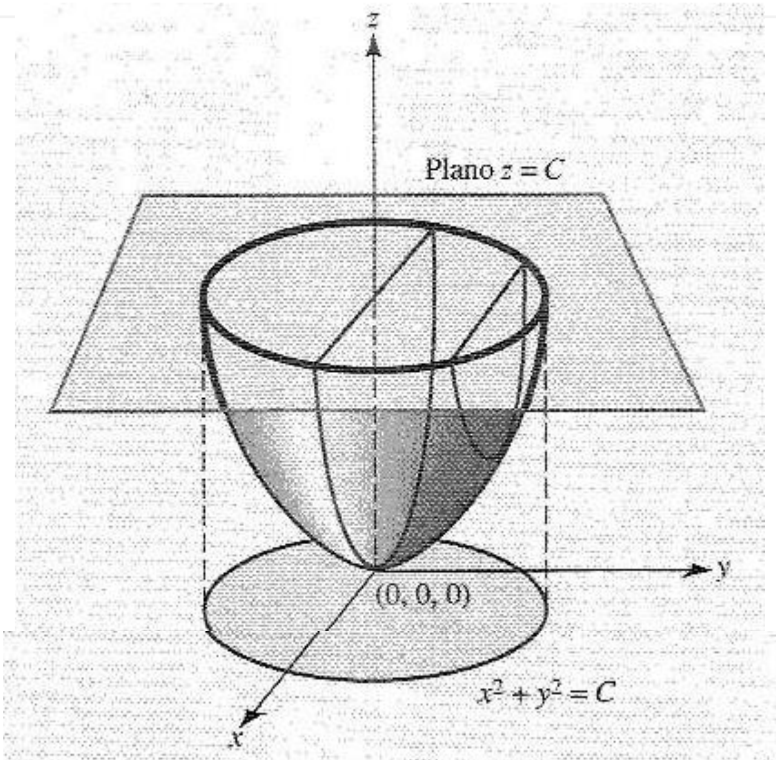
(a) As curvas de nível são as circunferências $x^2 + y^2 = C$.

## 3. Curvas de nível *(continuação)*

- <u>Exemplo 3</u>: Seja a função $f(x,y) = x^2 + y^2$. Encontre suas curvas de nível quando c = 1, c = 4 e c = 9.




(a) As curvas de nível são as circunferências $x^2 + y^2 = C$.




(b) A superfície $z = x^2 + y^2$ tem a forma de uma tigela.

- O gráfico da função $f(x,y) = x^2 + y^2$ é uma parabolóide;
- As curvas de nível da função $f(x,y) = x^2 + y^2$ são circunferências.

## 3. Curvas de nível *(continuação)*

- Exemplo 4: Seja a função $f(x,y) = x^2 - y$, construa o gráfico das curvas de nível quando $c = 4$ e $c = 9$.

se **$c = 4$**: (equivalente a $z = 4$)

1) substituir na função f(x,y): $x^2 - y = 4$

2) Isolar o y do lado esquerdo: $y = x^2 - 4$

3) classificar o tipo de função obtido: função do 2º grau => gráfico é uma parábola de raízes 2 e -2

se **$c = 9$**: (equivalente a $z = 9$)

1) substituir na função f(x,y): $x^2 - y = 9$

2) Isolar o y do lado esquerdo: $y = x^2 - 9$

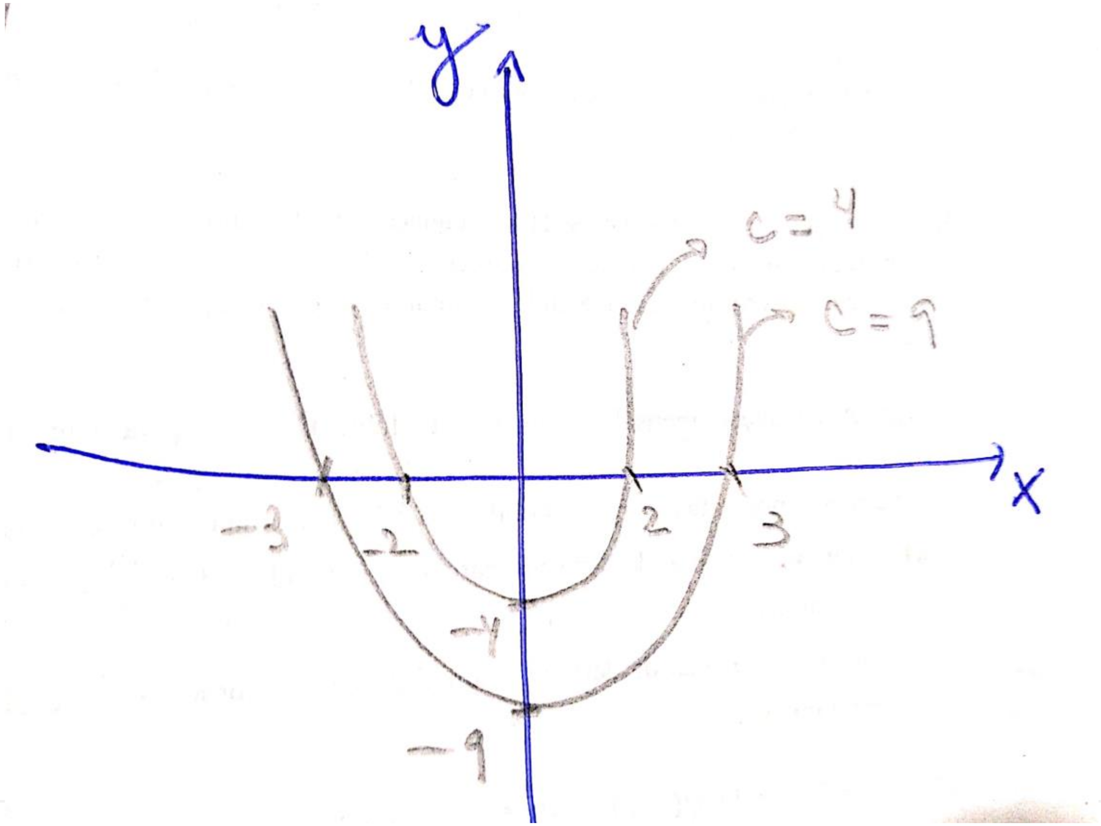
3) classificar o tipo de função obtido: função do 2º grau => gráfico é uma parábola de raízes 3 e -3

=> **Colocar as duas curvas de nível no mesmo gráfico**

## 3. Curvas de nível *(continuação)*

- Exemplo 4: Seja a função $f(x,y) = x^2 - y$, construa o gráfico das curvas de nível quando $c = 4$ e $c = 9$.

=> **Colocar as duas curvas de nível no mesmo gráfico:**



## 3. Curvas de nível *(continuação)*

- Exemplo 5: Seja a função f(x,y) = xy, construa o gráfico das curvas de nível quando c = 1 e c = 2.

se **c = 1**: (equivalente a z = 1)

1) substituir na função f(x,y): xy = 1
2) Isolar o y do lado esquerdo: y = $\frac{1}{x}$
3) classificar o tipo de função obtido: função racional ou hipérbole => gráfico composto por dois ramos no 1º e 3º quadrante

se **c = 2**: (equivalente a z = 2)

1) substituir na função f(x,y): xy = 2
2) Isolar o y do lado esquerdo: y = $\frac{2}{x}$
3) classificar o tipo de função obtido: função racional ou hipérbole => gráfico composto por dois ramos no 1º e 3º quadrante

**=> Colocar as duas curvas de nível no mesmo gráfico**

## 3. Curvas de nível *(continuação)*

- Exemplo 5: Seja a função f(x,y) = xy, construa o gráfico das curvas de nível quando c = 1 e c = 2.

=> **Colocar as duas curvas de nível no mesmo gráfico:**