Curvas parametrizadas em $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$

Curvas parametrizadas em $\mathbb{R}^2$ (curvas planas)

Definição

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ é chamada uma curva em $\mathbb{R}^2$. O conjunto $Im\gamma = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^2; t \in I\}$ é chamado imagem ou trajetória de γ. Escrevemos $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ e chamamos as funções $x(t)$ e $y(t)$ as funções componentes de γ. A variável t é chamado de parâmetro de γ.

Exemplo

Suponha $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. A curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, f(t))$ é uma curva cujo a imagem é o gráfico da função f.

Exemplo

Seja $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. *A imagem de* γ *é a circunferência de centro em* $(0, 0)$ *e raio igual a* 1.

De fato, $x = \cos t$, $y = \sin t \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

Exemplo

Seja $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (2\cos t, 3\sin t)$. *A imagem de* γ *é a elípse de centro em* $(0, 0)$ *de raios iguais a* 2 *e* 3.

De fato, $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \cos t$, $\frac{y}{3} = \sin t \Leftrightarrow$

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

Definição

Seja $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ *uma curva e* t_0 *ponto de acumulação de* I. *Dizemos que* $L = (L_1, L_2) \in \mathbb{R}^2$ *é limite de* $\gamma(t)$ *quando* t *tende a* t_0 *se* $\lim_{t \to t_0} x(t) = L_1$ *e* $\lim_{t \to t_0} y(t) = L_2$. *Neste caso, escrevemos*

$$\lim_{t \longrightarrow t_0} \gamma(t) = L.$$

Exemplo

Seja $\gamma(t) = (t, \frac{\sin t}{t})$. *Temos que* $\lim_{t \to 0} \gamma(t) = (\lim_{t \to 0} t, \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t}) = (0, 1)$.

Definição

Seja $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ *uma curva e* $t_0 \in I$. *Dizemos que* γ *é contínua em* t_0 *se as funções componentes* $x(t)$ *e* $y(t)$ *forem contínuas em* t_0, *isto é,*

$$\lim_{t \longrightarrow t_0} \gamma(t) = \gamma(t_0).$$

Exemplo

Seja $\gamma(t) = (t, e^t)$. *Temos que*

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \gamma(t) = (\lim_{t \longrightarrow 0} t, \lim_{t \longrightarrow 0} e^t) = (0, 1) = \gamma(0)$$

portanto γ *é contínua em* $t = 0$.

Definição

Seja $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ *uma curva e* t_0 *um ponto interior de* I. *Definimos a derivada de* γ *em* t_0 *por*

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \longrightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

se o limite existe.

Observação: Geometricamente, olhamos $\gamma'(t_0)$ como um vetor tangente a trajetória de γ, no ponto $\gamma(t_0)$. Quando t tende a t_0 o vetor

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

tende ao vetor tangente $\gamma'(t_0)$ a trajetória de γ em $\gamma(t_0)$.

Teorema

Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ *uma curva e* t_0 *um ponto interior de* I. *Então* γ *é derivável em* t_0 *se e somente se as funções componentes* $x(t)$ *e* $y(t)$ *forem deriváveis em* t_0. *Neste caso, temos que* $\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$.

Exemplo

a) Seja $\gamma(t) = (t^2 + 1, t^3 + t - 1)$. *Então* $\gamma'(t) = (2t, 3t^2 + 1)$.

b) Seja $\gamma(t) = (2\cos t, 3\sin t)$. *Então* $\gamma'(t) = (-2\sin t, 3\cos t)$.

Curvas parametrizadas em $\mathbb{R}^3$ (curvas espaciais)

Definição

Seja $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo. Uma função* $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ *é chamada uma curva em* $\mathbb{R}^3$*. O conjunto* $Im\gamma = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^3; t \in I\}$ *é chamado imagem ou trajetória de* γ*. Escrevemos* $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ *e chamamos as funções* $x(t)$*,* $y(t)$ *e* $z(t)$ *as funções componentes de* γ*. A variável* t *é chamado de parâmetro de* γ*.*

Exemplo

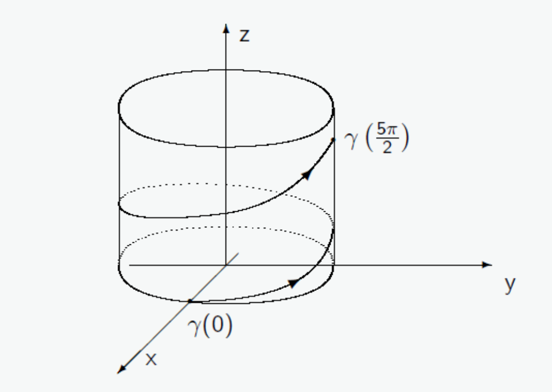
Seja $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 1)$*. A imagem de* γ *é uma circunferência situada no plano* $z = 1$*, com centro em* $(0, 0, 1)$ *e raio igual a* 1*.*

Exemplo

Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, t, t)$. *A imagem de* γ *é uma reta passando por* $(0, 0, 0)$.

Exemplo

Seja $\gamma : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$. *A imagem de* γ *é uma hélice circular em cima do cilindro de centro em* $(0, 0, 0)$ *e raio igual a* 1.


z
$\gamma\left(\frac{5\pi}{2}\right)$
y
$\gamma(0)$
x

Definição

Seja $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ *uma curva e* t_0 *ponto de acumulação de* I. *Dizemos que* $L = (L_1, L_2, L_3) \in \mathbb{R}^2$ *é limite de* $\gamma(t)$ *quando* t *tende a* t_0 *se* $\lim_{t \longrightarrow t_0} x(t) = L_1$, $\lim_{t \longrightarrow t_0} y(t) = L_2$ *e* $\lim_{t \longrightarrow t_0} z(t) = L_3$. *Neste caso, escrevemos*

$$\lim_{t \longrightarrow t_0} \gamma(t) = L.$$

Exemplo

Seja $\gamma(t) = (t, \frac{\sin t}{t}, t + 1)$. *Temos que*
$\lim_{t \to 0} \gamma(t) = (\lim_{t \to 0} t, \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t}, \lim_{t \to 0} t + 1) = (0, 1, 1)$.

Definição

Seja $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ *uma curva e* $t_0 \in I$. *Dizemos que* γ *é contínua em* t_0 *se as funções componentes* $x(t)$, $y(t)$ *e* $z(t)$ *forem contínuas em* t_0, *isto é,*

$$\lim_{t \longrightarrow t_0} \gamma(t) = \gamma(t_0).$$

Exemplo

Seja $\gamma(t) = (t, e^t, \cos t)$. *Temos que*

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \gamma(t) = (\lim_{t \longrightarrow 0} t, \lim_{t \longrightarrow 0} e^t, \lim_{t \longrightarrow 0} \cos t) = (0, 1, 1) = \gamma(0)$$

portanto γ *é contínua em* $t = 0$.

Definição

Seja $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uma curva e t_0 um ponto interior de I. Definimos a derivada de γ em t_0 por

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \longrightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

se o limite existe.

Observação: Geometricamente, olhamos $\gamma'(t_0)$ como um vetor tangente a trajetória de γ, no ponto $\gamma(t_0)$. Quando t tende a t_0 o vetor

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

tende ao vetor tangente $\gamma'(t_0)$ a trajetória de γ em $\gamma(t_0)$.

Teorema

Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ *uma curva e* t_0 *um ponto interior de* I. *Então* γ *é derivável em* t_0 *se e somente se as funções componentes* $x(t)$, $y(t)$ *e* $z(t)$ *forem deriváveis em* t_0. *Neste caso, temos que* $\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$.

Exemplo

a) Seja $\gamma(t) = (t^2 + 1, t^3 + t - 1, \frac{1}{t})$. *Então* $\gamma'(t) = (2t, 3t^2 + 1, -\frac{1}{t^2})$.

b) Seja $\gamma(t) = (2\cos t, 3\sin t, e^t)$. *Então* $\gamma'(t) = (-2\sin t, 3\cos t, e^t)$.