

Gráfico e curvas (superfícies) de nível

Gráfico, $n = 2$

Definição

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ função. O conjunto

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = f(x, y), (x, y) \in \Omega\}$$

é chamado o gráfico de f .

Exemplo

Seja $c \in \mathbb{R}$ fixo e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = c$ (função constante). O gráfico de f é

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = c, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

que é um plano paralelo ao plano xy .

Exemplo

O gráfico da função linear $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x + 3y$ é

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 2x + 3y, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

que é um plano passando pela origem $(0, 0, 0)$ que tem como vetor normal $n = (2, 3, -1)$.

Observação: Fazer o esboço do gráfico de uma função de duas variáveis em geral não é fácil. Para auxiliar no esboço do gráfico encontra-se as curvas de nível da função f .

Curvas de nível

Definição

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ função e $k \in \text{Im}(f)$. O conjunto

$$C_k = \{(x, y) \in \Omega; f(x, y) = k\}$$

é chamado a curva de nível k de f .

Observação: 1) Segue da definição que a função f é constante em cada curva de nível.

2) Uma curva de nível é um subconjunto do domínio de f , portanto um subconjunto de $\mathbb{R}^2$

Parabolóide

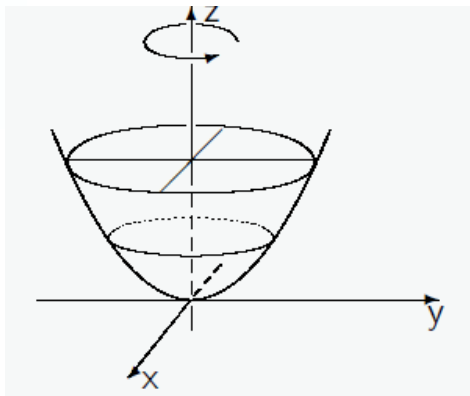
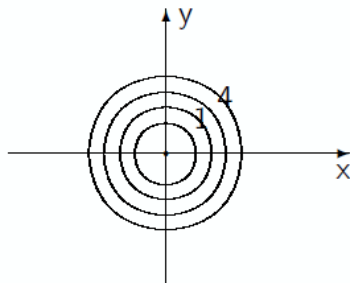
Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$. Encontre as curvas de nível de f .

solução: Temos que a imagem de f é o intervalo $[0, +\infty)$. Seja $k \in [0, +\infty)$.

- $k = 0$, $f(x, y) = x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$. Portanto $C_0 = \{(0, 0)\}$
- $k > 0$, $f(x, y) = x^2 + y^2 = k \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (\sqrt{k})^2$. Portanto $C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = (\sqrt{k})^2\}$ que é a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $\sqrt{k}$.

Gráfico e curvas de nível de $f(x, y) = x^2 + y^2$ (parabolóide)



Sela

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$. Encontre as curvas de nível de f .

solução: Temos que a imagem de f é o conjunto dos números reais.

- $k = 0$, $f(x, y) = x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow y = \pm x$. Portanto $C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = \pm x\}$ que é a união das retas $y = x$ e $y = -x$.

- $k > 0$, $f(x, y) = x^2 - y^2 = k \Leftrightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{k})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{k})^2} = 1$. Portanto

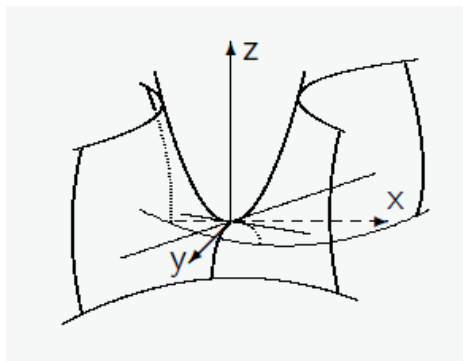
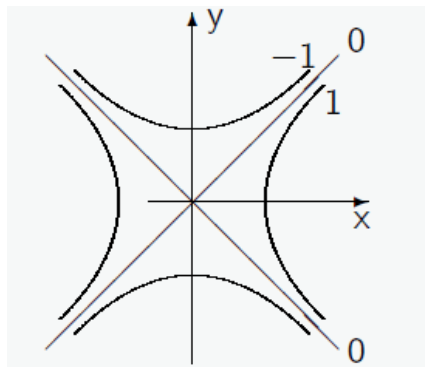
$C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{(\sqrt{k})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{k})^2} = 1\}$ é uma hipérbole.

- $k < 0$,

$$f(x, y) = x^2 - y^2 = k \Leftrightarrow y^2 - x^2 = -k \Leftrightarrow \frac{y^2}{(\sqrt{-k})^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{-k})^2} = 1.$$

Portanto $C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{y^2}{(\sqrt{-k})^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{-k})^2} = 1\}$ é uma hipérbole.

Gráfico e curvas de nível de $f(x, y) = x^2 - y^2$ (sela)



Gráfico, $n = 3$

Definição

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ função. O conjunto

$$G_f = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; w = f(x, y, z), (x, y, z) \in \Omega\}$$

é chamado o gráfico de f .

Observação: O gráfico de f é um subconjunto de $\mathbb{R}^4$ e deste modo não é possível representá-lo graficamente.

Superfícies de nível

Definição

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ função e $k \in \text{Im}(f)$.

$$C_k = \{(x, y, z) \in \Omega; f(x, y, z) = k\}$$

é chamado superfície de nível k de f .

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Encontre as superfícies de nível de f .

solução: Temos que $\text{Im}f = [0, +\infty)$. Seja $k \in [0, +\infty)$.

- $k = 0$, $f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$.

Portanto $C_0 = \{(0, 0, 0)\}$.

- $k > 0$,

$$f(x, y, z) = k \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = k \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = (\sqrt{k})^2.$$

Portanto $C_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = (\sqrt{k})^2\}$ é a esfera de centro $(0, 0, 0)$ e raio igual a $\sqrt{k}$.