SMA0306 - Álgebra II

Prof. Daniel

Lista 1.

Setembro / 2020

Exercícios do livro de A. Gonçalves, quarta edição.

Aviso: Cuidado! A palavra anel no livro do Gonçaves significa anel não necessariamente comutativo.

- Págs 39-42, números 2,3,4,5,6,7,9,10,11,13,14,15,16,19.
- Págs 45-46 números 1,2,5,7,8,10,12,14.

Exercícios do livro de Garcia - Lequain, 6 edição.

- Pág 17, n. I.2.2.
- Págs 34-35 , números 1,2,4,5,6.

Exercícios extras:

(1) Seja $n \in \mathbb{Z}$. Mostre que:

$$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \text{ é domínio } \iff n \text{ é primo } \iff \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \text{ é corpo.}$$

Conclua daí que $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ (p primo) é um corpo finito contendo exatamente p elementos.

(2) Seja $\mathbb{H}$ o anel (não comutativo) dos quatérnios de Hamilton (ver A.Gonçalves págs 38,39). Mostre que se $\alpha = a + bi + cj + dk$ e $\overline{\alpha} := a - bi - cj - dk$ então

$$\alpha\overline{\alpha} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Conclua que todo quatérnio não nulo tem um inverso multiplicativo e deduza a fórmula para esse inverso.

(3) Seja $(A, +, .)$ um anel, não necessariamente comutativo. Definimos as unidades do anel A por U(A)= A* $:= \{a \in A : a$ tem inverso multiplicativo$\} =$ $\{a \in A : \exists b \in A \ ab = 1 = ba\}$. Por exemplo U($\mathbb{Z}$) $= \{\pm 1\}$. Mostre que U(A) é um grupo (não necessariamente abeliano) com a operação de multiplicação do anel.

Calcule:

(i) $U(\mathbb{Z}[i]) = \{\pm 1, \pm i\}$.

(ii) $U(K[X]) = K^\star = K \setminus \{0\}$ (K corpo). Mais geralmente, se D é um domínio, então $U(D[X]) = \mathrm{U}(D) = D^\star = D \setminus \{0\}$.

(iii) $\mathrm{U}(M_n(\mathbb{R})) = \mathrm{GL}_n(M_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \text{A é inversível}\} =$ $\{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$. Generalize para um corpo K qualquer (em vez de $\mathbb{R}$).

(iv) $\mathrm{U}(\mathbb{H}) = \mathbb{H}^\star = \mathbb{H} \setminus \{0\}$.