

Equação de Poisson e de Laplace

Sabemos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{e} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Logo, o potencial eletrostático satisfaz

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \Leftarrow \text{Eq. de Poisson}$$

Em regiões em que $\rho = 0$, a eq. de Poisson se reduz

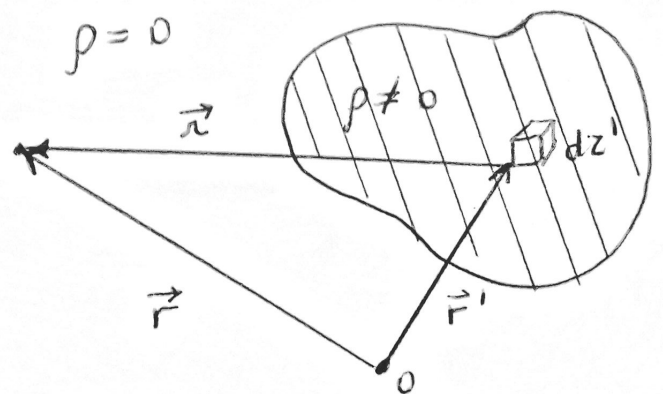
a

$$\boxed{\nabla^2 V = 0} \Leftarrow \text{Eq. de Laplace}$$

As duas eqs acima são equações diferenciais a derivadas parciais de segunda ordem.

Já vimos anteriormente uma fórmula para a solução $V(\vec{r})$ das equações acima na forma de uma integral

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{r} dz'$$



Equação de Laplace

(2)

Em coordenadas cartesianas, temos

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (3d)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (2d)$$

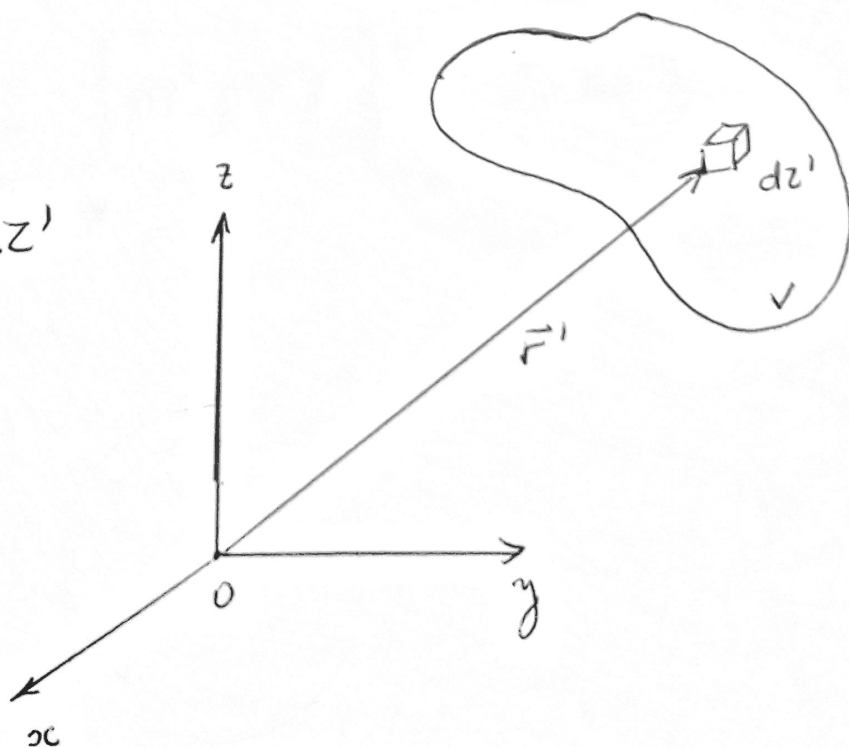
$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 0 \quad (1d)$$

Propriedades das soluções da eq. de Laplace

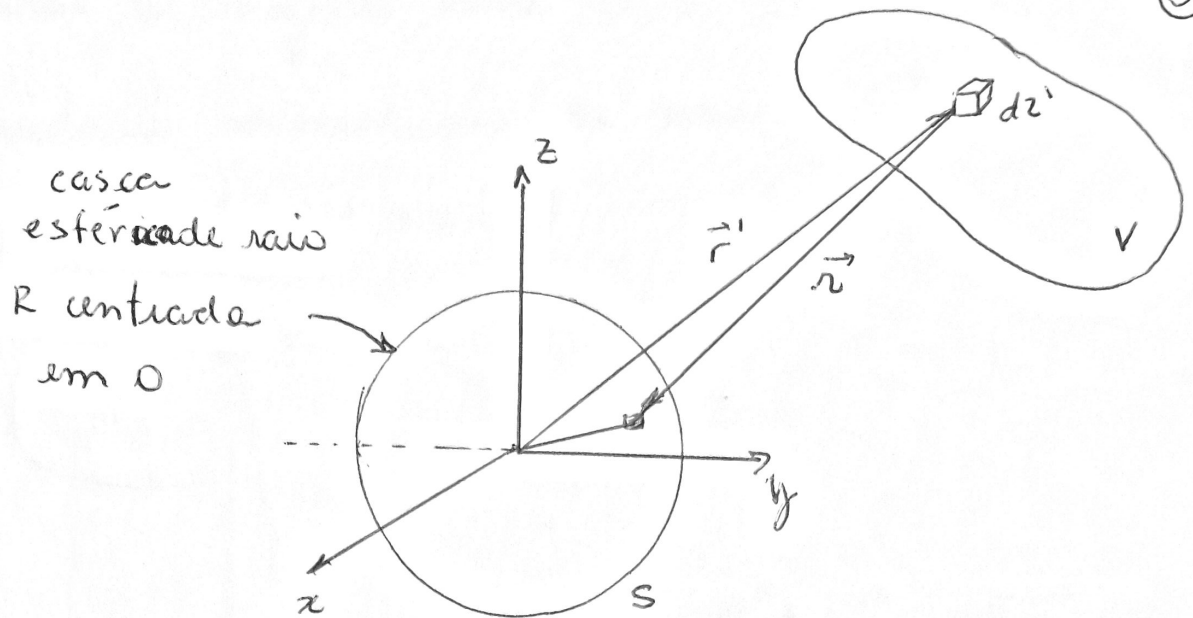
Tomemos, sem perda de generalidade, um ponto do espaço onde $\rho = 0$ como a origem do sistema de coordenadas

$$V(\vec{0}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{r'} dz'$$

$$\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{r} = -\vec{r}'$$



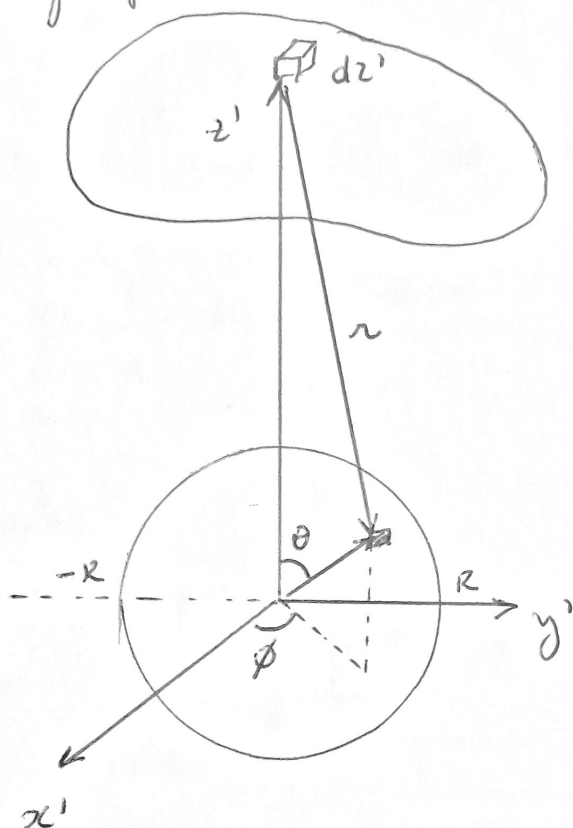
(3)



O valor médio do potencial sobre a casca esférica é

$$\begin{aligned}
 \overline{V}_{\text{casca}} &= \frac{1}{4\pi R^2} \oint_S V(\vec{r}) da \\
 &= \frac{1}{4\pi R^2} \oint_S \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{r} dz' \right\} da \\
 &= \frac{1}{4\pi R^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dz' \rho(\vec{r}') \left\{ \oint_S \frac{1}{r} da \right\}
 \end{aligned}$$

Para calcular a integral sobre S é útil fazer uma reorientação momentânea de eixos de forma que $\vec{r}'$ seja paralelo ao eixo z' (4)



$$r^2 = R^2 + z'^2 - 2Rz' \cos \theta$$

$$\oint_S \frac{1}{r} da = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta [R^2 + z'^2 - 2Rz' \cos \theta]^{-1/2} R^2 \sin \theta$$

$$= 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \underbrace{[R^2 + z'^2 - 2Rz' \cos \theta]^{-1/2}}_{\equiv u} \sin \theta d\theta$$

$$\equiv u \Rightarrow du = 2Rz' \sin \theta d\theta$$

$$= \frac{\pi R}{z'} \int_{(z'-R)^2}^{(z'+R)^2} u^{-1/2} du = \frac{2\pi R}{z} u^{1/2} \Big|_{(z'-R)^2}^{(z'+R)^2}$$

$$\oint_S \frac{1}{r} da = \frac{2\pi R}{z'} [z' + R - |z' - R|] = \frac{4\pi R^2}{z'} \quad (5)$$

$\uparrow$
 $z' > R$

De volta à orientação de eixos original

$$\oint_S \frac{1}{r} da = \frac{4\pi R^2}{r'}$$

e portanto

$$\overline{V}_{casca} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{r'} dz' = V(\vec{0})$$

Isto seja, o valor do potencial num ponto onde $\rho=0$ é igual ao seu valor médio sobre uma casca esférica centrada no mesmo ponto.

Isto implica que $V(\vec{r})$ não possui máximos ou mínimos locais em regiões de $\rho=0$. Ela possui no máximo pontos de sela.

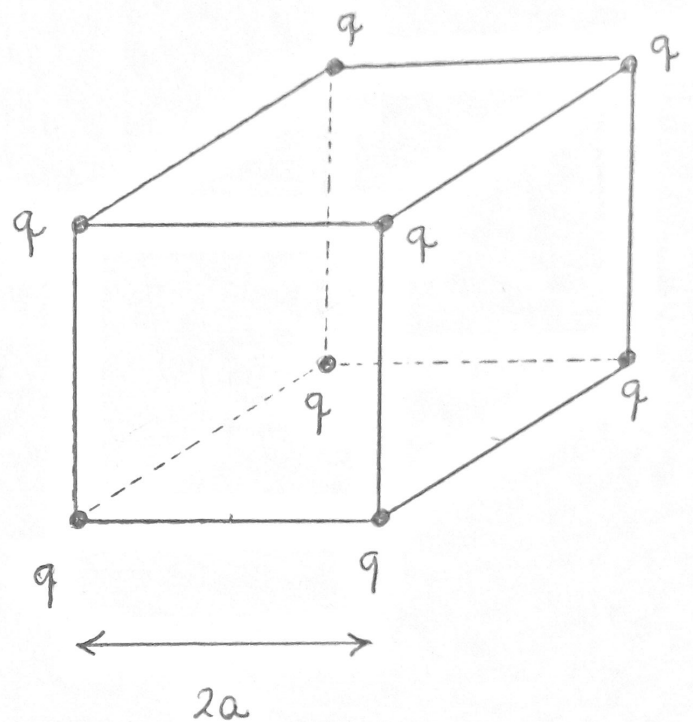
Portanto, os extremos de $V(\vec{r})$ devem estar todos nas fronteiras onde $\rho \neq 0$.

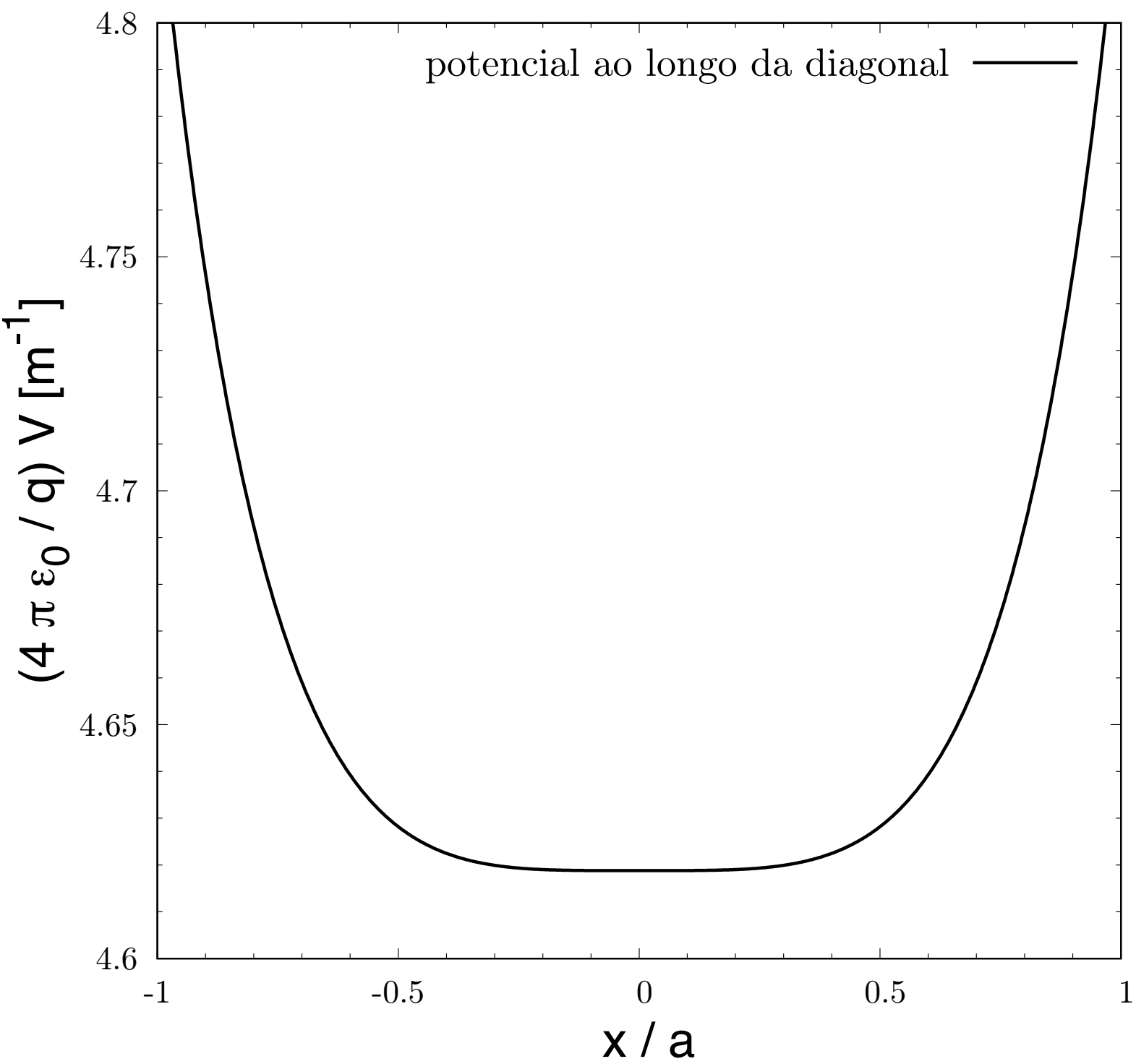
Uma consequência direta da propriedade do valor médio é o seguinte Teorema:

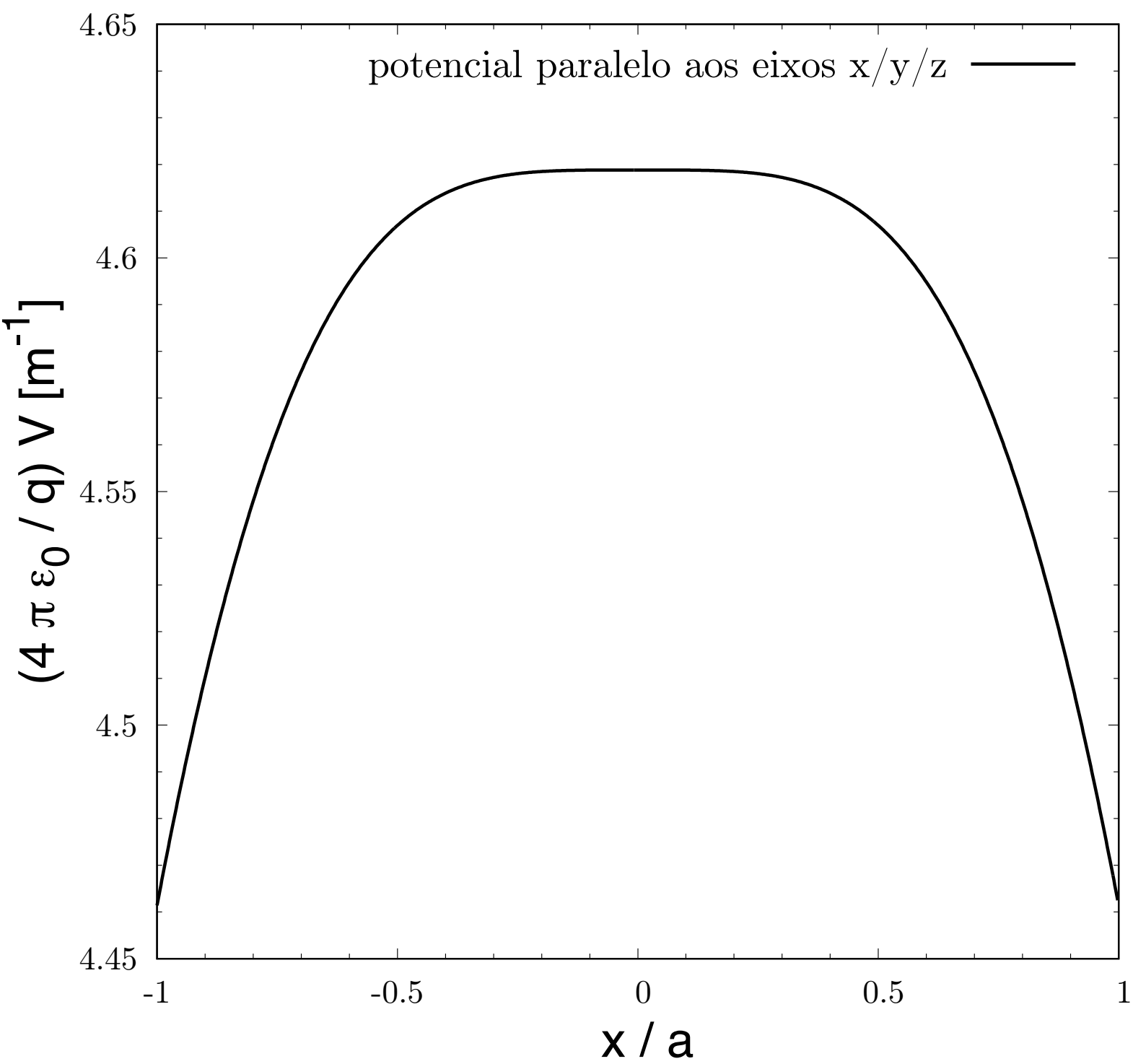
(6)

Teorema (Earnshaw) : uma partícula carregada não pode ser mantida em equilíbrio estável por forças eletrostáticas apenas.

O centro deste cubo é um ponto de sela

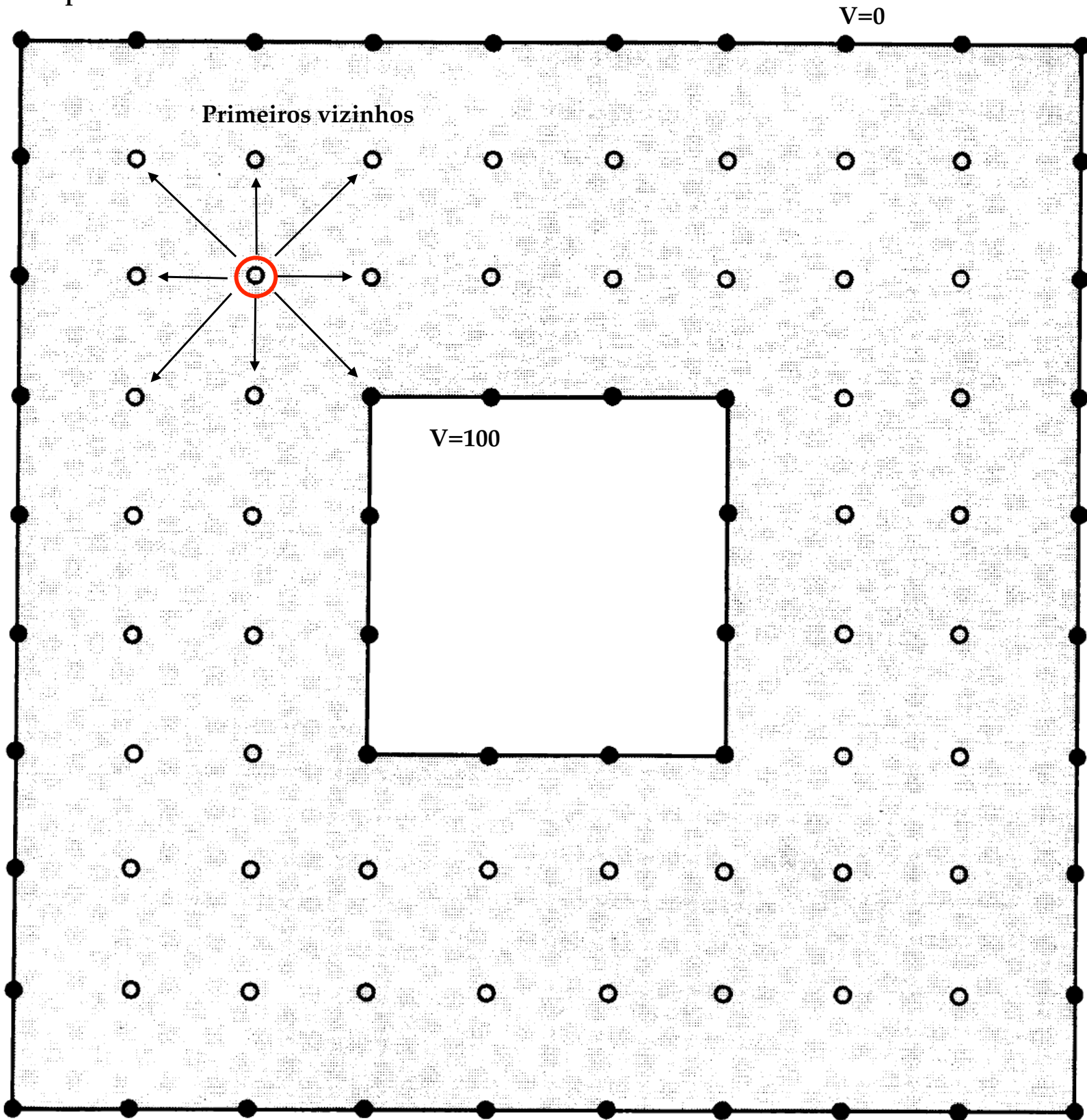






Método de relaxação

Método iterativo em que o potencial num ponto de uma grade é definido como a média dos seus primeiros vizinhos



Iteration 0

$V=0$

