## 1.1.2 Função do $2^0$ grau

**Definição 1.11 Função do $2^0$ grau.** A função:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = ax^2 + bx + c \end{cases}$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ é denominada função do $2^0$ grau ou quadrática.

i. As raizes da função podem ser obtidas pela equação de Báskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{em que} \qquad \Delta = b^2 - 4ac \tag{1.3}$$

ii. As relações de Girard para as raizes dessa função são:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{e} \qquad P = x_1.x_2 = \frac{c}{a}$$

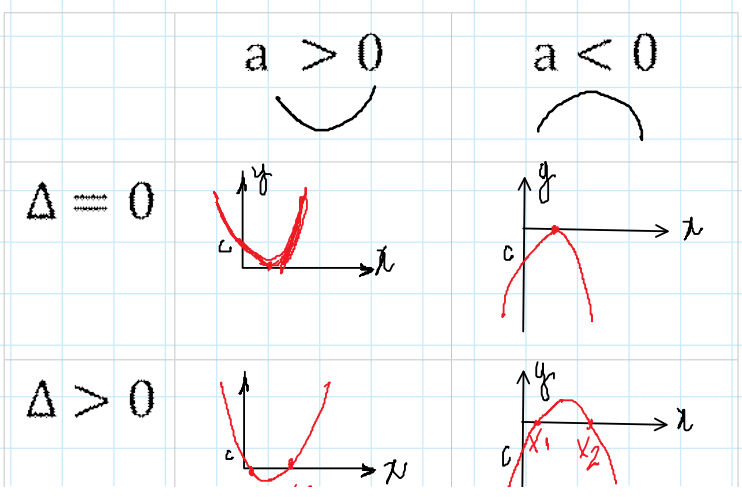
iii. Se na equação (1.3), $\Delta < 0$, então a função não terá raizes reais;

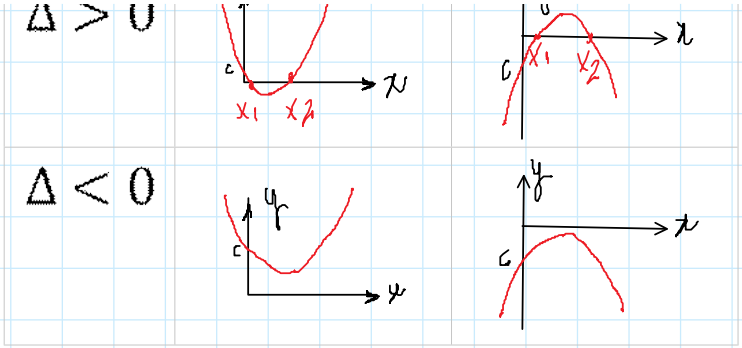
iv. O gráfico de uma função do $2^0$ grau é uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo $Oy$;

v . A concavidade da parábola é determinada pelo sinal da constante $a$, se $a > 0$ a parábola tem concavidade para cima e se $a < 0$ tem concavidade para baixo;

vi. As coordenadas do vértice da parábola são $\left(x_V = -\frac{b}{2a}, y_V = -\frac{\Delta}{4a}\right)$;

vii. Se $a > 0$, o conjunto imagem da função quadrática é $I = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_V\}$, porém se $a < 0$, o conjunto imagem será $I = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_V\}$.






*Resumindo temos,*

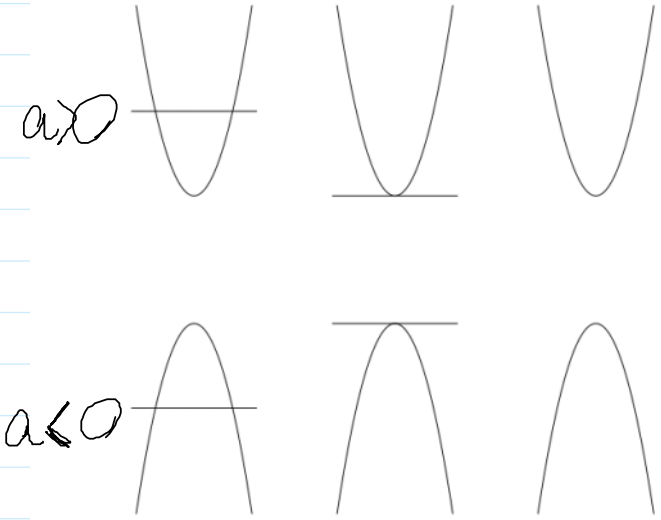
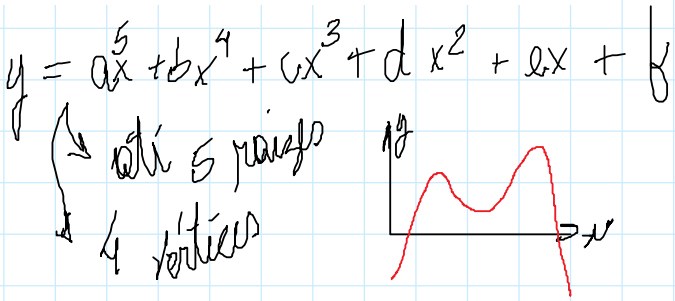
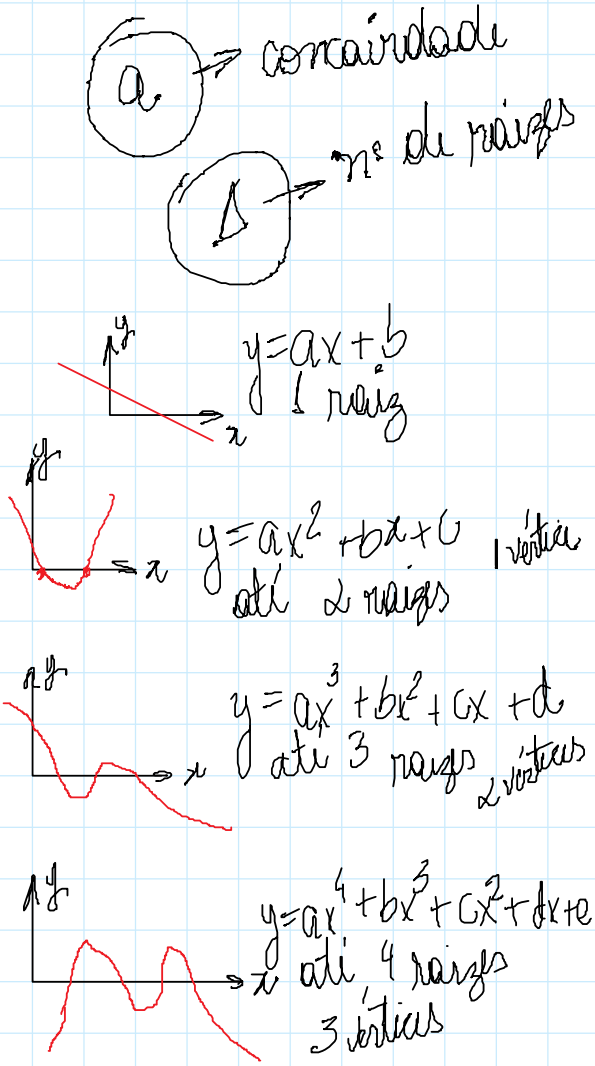
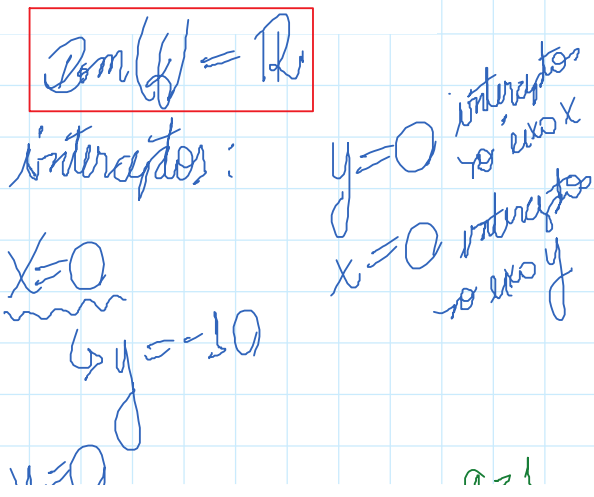


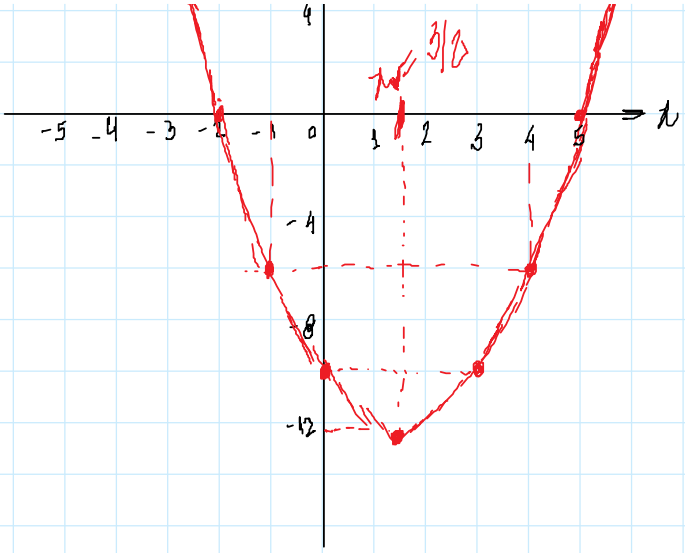

Figura 1.6: Posições relativas da parábola em função de $a$ e $\Delta$.




**Exemplo 1.13** Dada a função $y = x^2 - 3x - 10$, pede-se: domínio, conjunto imagem, vértice da parábola, eixo de simetria, esboço do gráfico e estudo da monotonicidade em $\mathbb{R}$.






$y = 0$

$x^2 - 3x - 10 = 0$

$a = 1$
$b = -3$
$c = -10$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)$
$\Delta = 9 + 40$
$\Delta = 49$

$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2}$

$x = \frac{3 \pm 7}{2}$ → $x_1 = -2$, $x_2 = 5$

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{+3}{2} = 1,5$

$x_v = \frac{5-2}{2} = 1,5$

$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{49}{4} \cong -12,3$

$y_v = (1,5)^2 - 3(1,5) - 10 = -12,25$

$x = -1$, $y = -6$

$x = 4$, $y = -6$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -49/4\}$

vértice: $(3/2, -49/4)$

eixo de simetria: $x = 3/2$

monotonicidade: $\forall\, x < 3/2$ $f(x)$ é decrescente

$\forall\, x > 3/2$ $f(x)$ é crescente

## 1.1.3 Função modular

**Definição 1.12 Módulo ou valor absoluto**. Seja $x$ um número real, $x \in \mathbb{R}$, o módulo ou valor absoluto de $x$, denotado por $| x |$, é:

$$| x | = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0; \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

$x = 3$, $y = +2$

$|x| = x$

$|x+y| = |x| + |y|$ $\quad f(x) = |x|$

$|x+y| = 3+2$ $\quad f(x) = |x-2|$

$|x+y| = 5$ $\quad f(x) = |x| + 5$

Propriedades do módulo:

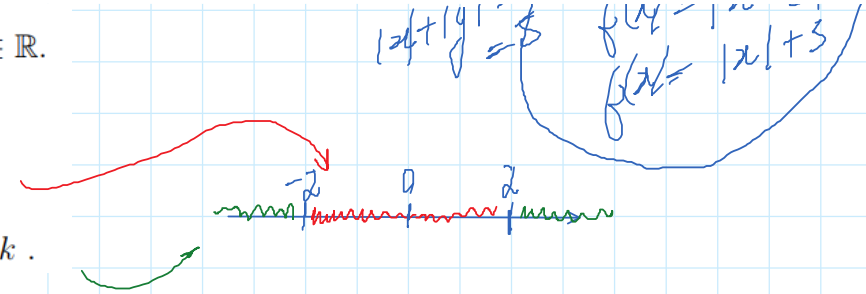
a. $| x + y | \leq | x | + | y |$, $x, y \in \mathbb{R}$.

a. $|x+y| \leq |x|+|y|$, $x, y \in \mathbb{R}$.

b. $|x.y| = |x| . |y|$, $x, y \in \mathbb{R}$.

c. $|x| < k \Leftrightarrow -k < x < +k$.

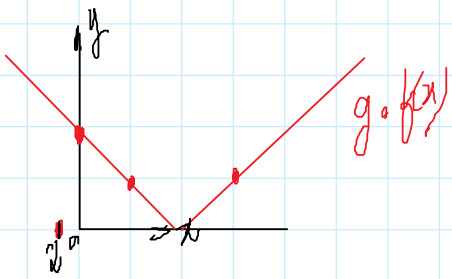
d. $|x| > k \Leftrightarrow x > k$ ou $x < -k$ .

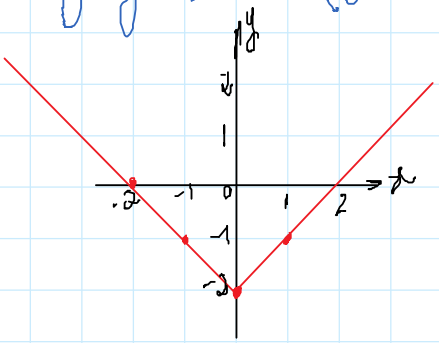



**Definição 1.13 Função modular**. Considerando uma função real qualquer $f(x)$, se $g(x) =| x |$, a função composta $gof(x) = g(f(x)) =| f(x) |$ é uma função modular. Assim, $h(x) = gof(x) =| f(x) |$ é definida por duas sentenças:

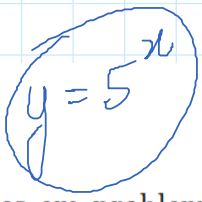
$$h(x) = gof(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0; \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0. \end{cases}$$

**Exemplo 1.16** Sejam as funções $f(x) = x - 2$ e $g(x) =| x |$. Construa os gráficos, especifique o domínio e o conjunto imagem de cada uma das funções: $gof(x)$ e $fog(x)$.



### 1.1.5 Função exponencial



A função exponencial tem aplicações em problemas de crescimento e dinâmica. Apresenta-se a seguir alguns pré-requisitos.

**Definição 1.14 Propriedades de potências.** Para as potências do tipo $a^n$ ou $a^m$, com $a > 0$ e $m, n \in \mathbb{N}$, valem as propriedades:

i. $a^n = \underbrace{a.a.a.\ldots.a}_{\text{n vezes}}$

ii. $a^0 = 1$

iii. $a^1 = a$

iv. $a^n a^m = a^{m+n}$

v. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

vi. $(a^n)^m = a^{nm}$

vii. $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

**Definição 1.15 Equação exponencial.** Uma equação em que a variável $x$ figura no expoente é denominada equação exponencial. Com base nas propriedades das potências, podemos reduzir uma equação exponencial em:

i. Potências de mesma base

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

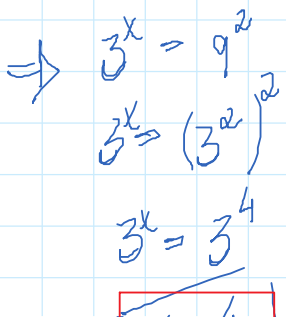
ii. Potências de mesmo expoente

$$a^{f(x)} = b^{f(x)} \Leftrightarrow a = b$$

com $a > 0$, $a \neq 1$ $b > 0$ e $b \neq 1$.

**Exemplo 1.17** Resolver em $\mathbb{R}$ a equações exponenciais:

a. $3^x = 81$



$3^x = 3$

$x = 4$

b. $5^{2x^2-3x-2} = 1$

$5^{2x^2-3x-2} = 5^0 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$

$\Delta = 9 - 4.2.(-2)$

$\Delta = 9 + 16$

$\Delta = 25$

$x = \frac{3 \pm 5}{4}$ $\quad x_1 = -\frac{1}{2}$ $\quad x_2 = 2$

$x = -\frac{1}{2}$ e $x = 2$

c. $2^{2x} + 2^{x+1} = 80$

$(2^x)^2 + 2^x \cdot 2^1 - 80 = 0$

$2^x = y$

$y^2 + 2y - 80 = 0$

$\Delta = 4 - 4.1.(-80)$

$\Delta = 4 + 320$

$\Delta = 324$

$y = \frac{-2 \pm 18}{2}$ $\quad y_1 = -10$ não satisfaz $\quad y_2 = 8$

porque $2^x > 0$

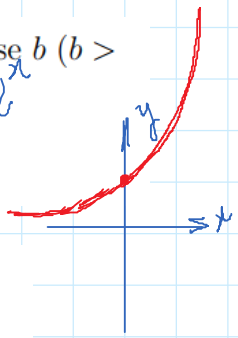
$2^x = 8$

$2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$

**Definição 1.16 Função exponencial.** Denomina-se função exponencial de base $b$ ($b > 0$ e $b \neq 1$) à função:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = b^x \end{cases}$$

$b > 1 \Rightarrow f(x) = a^x$




Observações:

i. A restrição $b > 0$ e $b \neq 1$ se faz necessária para garantir a existência da função;

ii. Se $b > 1$ a função exponencial (1.16) é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, porém, se $0 < b < 1$ a função exponencial (1.16) é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$;

iii. Se $0 < b < 1$, pode-se efetuar uma mudança de base, fazendo o expoente negativo, por exemplo, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$. Assim as condições $b > 0$ e $b \neq 1$ de existência da função exponencial (1.16) podem ser simplificadas pela condição única $b > 1$;

$a^{-1} = \frac{1}{a}$

$2^{-2} = \frac{1}{2^2}$

$2^{-10} = \frac{1}{2^{10}}$

iv. Se considerarmos uma restrição no contradomínio da função (1.16), fazendo-o igual a $\mathbb{R}_+^*$, a função torna-se bijetora e, portanto, admite inversa.

igual a $\mathbb{R}_+^*$, a função torna-se bijetora e, portanto, admite inversa.

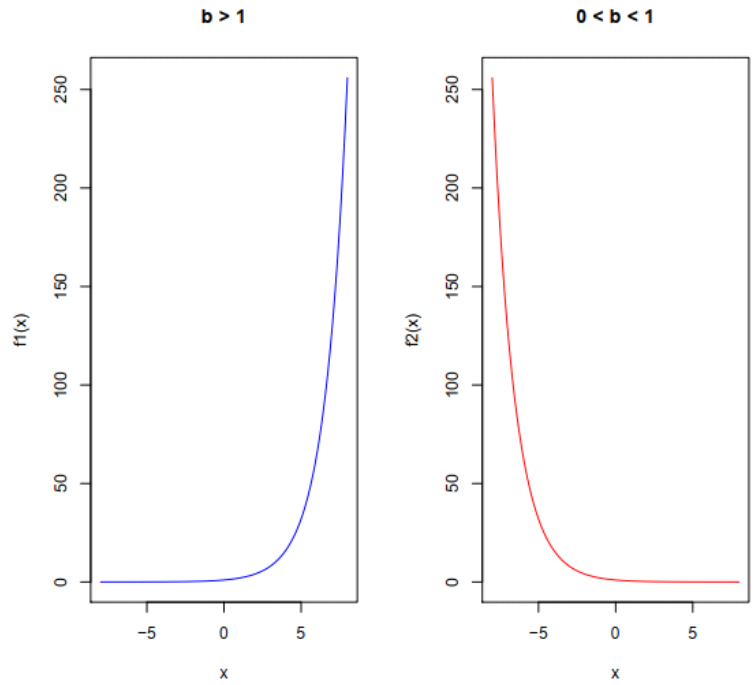



Figura 1.7: Gráficos das funções exponenciais $y = 2^x$ e $y = (\frac{1}{2})^x$.

**Exemplo 1.18** Considere as funções: $y = 2^x$, $y = 4^x$ e $y = 2.2^x$. Os gráficos dessas funções são apresentados, a seguir.

Observa-se pela Figura (1.8) que o efeito da constante 2 no expoente é o de contrair a curva exponencial à metade da distância do eixo $Oy$.

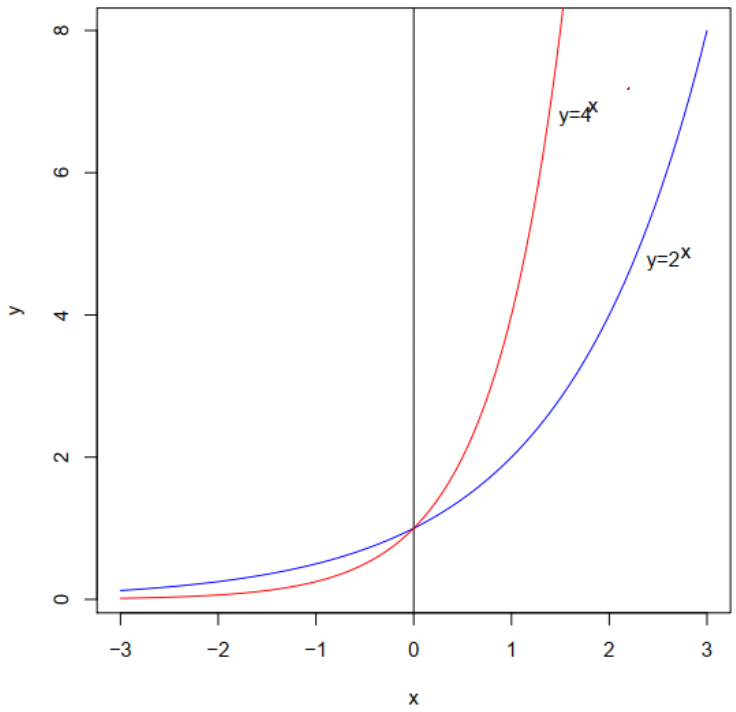



Figura 1.8: Gráficos das funções exponenciais $y = 2^x$ e $y = 4^x = 2^{2x}$.

Observa-se pela Figura (1.9) que o efeito da constante 2, que pré-multiplica $2^x$ é o de estender verticalmente a curva exponencial.

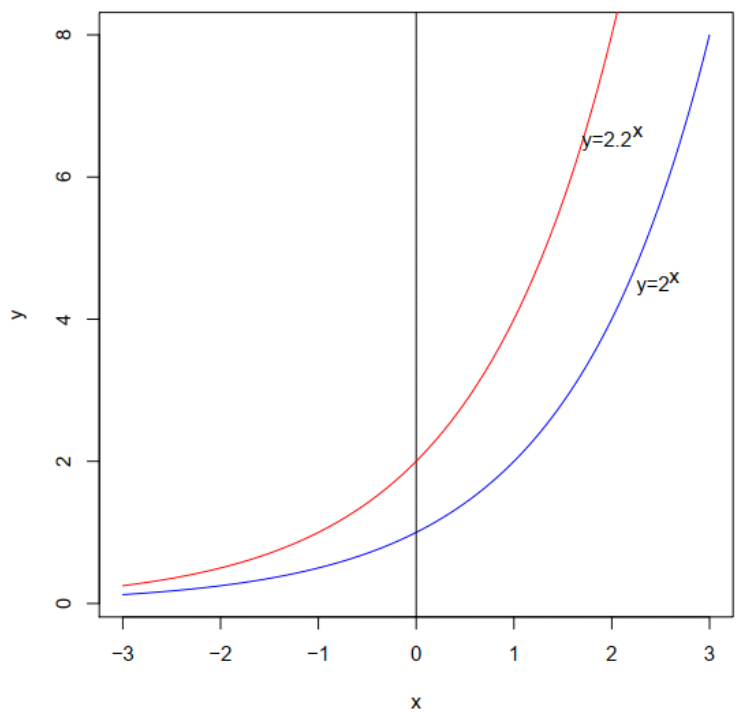



Figura 1.9: Gráficos das funções exponenciais $y = 2^x$ e $y = 2.2^x$.