MAT0315 - Introdução à Análise

Segundo Semestre de 2020

Período Diurno

Martha S. Monteiro

IME-USP

Introdução

Uma discussão satisfatória dos principais conceitos de análise (convergência, continuidade, diferenciação e integração) se apoia no conhecimento profundo sobre o conjunto dos números reais.

O conjunto dos números racionais não é adequado para se trabalhar, já que tem “falhas”.

Por exemplo, não existe solução $r \in \mathbb{Q}$ para a equação $r^2 = 2$.

A sequência de números racionais

$$\begin{array}{cccc} x_1 = 1 & x_2 = 1,4 & x_3 = 1,41 & x_4 = 1,414 \\ x_5 = 1,4142 & x_6 = 1,41421 & x_7 = 1,414213 & x_8 = 1,4142135 \\ \dots & & & \end{array}$$

se aproxima do número que costumamos representar por $\sqrt{2}$. Mas esse número não existe em $\mathbb{Q}$.

Logo, em $\mathbb{Q}$, não existe limite para essa sequência!

Existe um conjunto em que a equação $x^2 = 2$ admite uma solução?

Se sim, como você descreve esse conjunto? (Que propriedades ele tem?)

O que o difere de $\mathbb{Q}$?

Essas são algumas questões importantes que serão tratadas nesta parte do programa.

Nesta disciplina veremos também o significado preciso para a frase

a seqüência de números se aproxima de $\sqrt{2}$

mencionada anteriormente.

Números Reais - Introdução

Iremos assumir conhecidos o conjunto dos números naturais

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

o conjunto dos números inteiros

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

e o conjunto dos números racionais

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Mas antes de começarmos a estudar o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, iremos observar mais de perto alguns aspectos do conjunto $\mathbb{Q}$.

Todos sabem que não existe racional r tal que $r^2 = 2$, certo?

Sabem por quê?

A afirmação

Entre dois números racionais distintos sempre existe outro racional

é verdadeira?

Por quê?

A discussão acima serviu para mostrar que, apesar de entre dois racionais, mesmo que muito próximos, sempre existir outro racional, o conjunto dos números racionais tem falhas!

O conjunto dos números reais preenche esses buracos e é esse o principal motivo para seu papel fundamental em análise.

Representação decimal dos números racionais

Sabemos que o sistema de numeração decimal é *posicional*.

Por exemplo, o algarismo 7 escrito na segunda casa decimal vale $70 = 7 \times 10^1$ e, se escrito na quarta casa, vale $7.000 = 7 \times 10^3$.

Podemos escrever:

$$35.206 = 3 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 6 \times 10^0$$

ou simplesmente

$$35.206 = 3 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 6$$

Representação decimal dos números racionais

Para representar quantidades não inteiras, as escolas ensinam inicialmente as frações e, posteriormente, suas representações decimais.

As *frações decimais*, isto é, frações da forma $\frac{a}{10^n}$, sendo a um inteiro e n um natural, são representadas como nos exemplos:

$$\frac{3}{10} = 0,3 \qquad \frac{7}{100} = 0,07$$

$$5,372 = 5 + 0,3 + 0,07 + 0,002 = 5 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{2}{10^3}$$

$$10 \times 5,372 = 10 \left(5 + \frac{3}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{2}{10^3} \right) = 50 + 3 + \frac{7}{10} + \frac{2}{10^2} = 53,72$$

Esse exemplo ilustra o seguinte fato: para multiplicar um número x escrito em sua forma decimal por 10, basta deslocar a vírgula uma casa para a direita.

Representação decimal dos números racionais

Como se obtém a representação decimal de frações cujos denominadores não são potência de 10?

Vejamos alguns exemplos:

$$\frac{5}{8} = \frac{5}{2^3} = \frac{5 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{5^4}{10^3} = \frac{625}{1000} = 0,625$$

$$\frac{6}{15} = \frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0,4$$

Pergunta: É sempre possível trocar uma fração por outra equivalente de modo que o denominador seja uma potência de 10?

$$\frac{1}{6} = ?$$

A resposta para essa questão está no seguinte teorema:

Teorema Fundamental da Aritmética

Todo número natural pode ser escrito como produto de fatores primos, de modo único a menos da ordem dos fatores.

Voltemos à tentativa de trocar a fração $\frac{1}{6}$ por outra equivalente cujo denominador é uma potência de 10. Assim, teríamos que encontrar n natural tal que

$$6n = 10^k, \text{ para algum } k \in \mathbb{N}$$

Mas o lado esquerdo da igualdade acima tem 3 como um dos fatores primos, enquanto que no lado direito os únicos fatores primos são 2 e 5. A unicidade estabelecida pelo Teorema Fundamental da Aritmética nos garante que a igualdade acima é impossível.

Representação decimal dos números racionais

Determine a representação decimal dos números, fazendo a conta a mão para poder observar os restos que aparecem no algoritmo da divisão:

(a) $\frac{1}{3}$

(b) $\frac{4}{7}$

(c) $\frac{3}{11}$

(d) $\frac{2455}{9000}$