UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO – ESCOLA POLITÉCNICA
Pós-Graduação: Engenharia Química, 3º Período 2020
PQI-5884: Programação Inteira Mista Aplicada à Otimização de. Processos

LISTA DE EXERCÍCIOS 2:
Problemas contínuos em programação matemática

2.1

Dado o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & z = -7.x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a:} & x_1 + x_2 \leq 15 \\ & 2.x_1 - x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

(a) Desenhe os contornos da região viável e da função objetivo. Determine o ótimo por inspeção.
(b) Resolva manualmente o problema usando o algoritmo simplex. Comparar com os resultados obtidos através de software.

2.2

Um investidor deseja investir $ 50.000 entre três oportunidades de investimento: poupança, títulos do governo e ações. O retorno anual sobre o investimento é estimado em 2%, 7% e 10%, respectivamente. O investidor não deseja investir os ganhos sobre o investimento. O investimento mínimo em títulos é de $10.000. Além disso, o investimento em ações não deve exceder o investimento em títulos e poupança somados. Finalmente o investimento em poupança deve ficar entre $5.000 e $30.000. Deseja-se maximizar o retorno anual dos investimentos.
(a) Formule um problema LP no formato padrão de programação matemática, definindo claramente variáveis e parâmetros criados e suas unidades.
(b) Determine o número de graus de liberdade.
(c) Resolva o problema de otimização usando LINGO ou GAMS.

2.3

Uma empresa de manufatura de chips para calculadoras produz dois chips: A e B. A empresa deseja maximizar o seu retorno semanal, sendo que o retorno por unidade de A é $20 e de B é $30. Entretanto, devido a obrigações contratuais, pelo menos 30 unidades de A devem ser produzidas por semana e baseado na demanda atual, tudo o que é produzido pode ser vendido. A equipe de produção (a qual não se deseja expandir no momento) possui os seguintes limites de horas:

Montagem : 250 h/semana.
Teste : 140 h/semana.
A requer 4 horas de montagem + 1 hora de teste.
B requer 3 horas de montagem + 2 horas de teste.

(a) Formule um problema LP no formato padrão de programação matemática, definindo claramente variáveis e parâmetros criados e suas unidades. Considere variáveis contínuas.
(b) Determine o número de graus de liberdade.
(c) Resolva o problema de otimização usando LINGO ou GAMS.

2.4

Uma empresa produz dois tipos de barras de cereais: Maxx e Light. As receitas de venda são de R$50,00 e R$60,00 por caixa, respectivamente. As barras são produzidas em três operações principais: mistura, prensagem e empacotamento. Abaixo tem-se o tempo em minutos para produção de cada caixa nas etapas:

	Mistura	Prensagem	Embalagem
Maxx	1 min	5 min	3 min
Light	2 min	4 min	1 min

Em um dia de produção, os equipamentos da planta dispõem de 15 h para mistura, 40 h para prensagem e 15 h para embalagem.

(a) Formule um problema LP no formato padrão de programação matemática para maximizar o retorno na venda das caixas das barras de cereais, respeitando os limites de produção da planta. Considere cariáveis contínuas.
(b) Determine o número de graus de liberdade.
(c) Resolva o problema de otimização manualmente pelo método simplex e verifique a solução usando um software.

2.5

Uma refinaria comercializa três tipos de gasolina, G1, G2 e G3. Para obter estes tipos, são misturados produtos do refino do petróleo: P1, P2, P3 e P4. A disponibilidade diária destes produtos e as restrições de composição das gasolinas são apresentas abaixo.

	Máxima quantidade disponível (barris/dia)	Custo ($/barril)
P1 (butano)	3000	13,00
P2 (destilação direta)	2000	15,30
P3 (craq. térmico)	4000	15,60
P4 (craq. catalítico)	1000	14,90

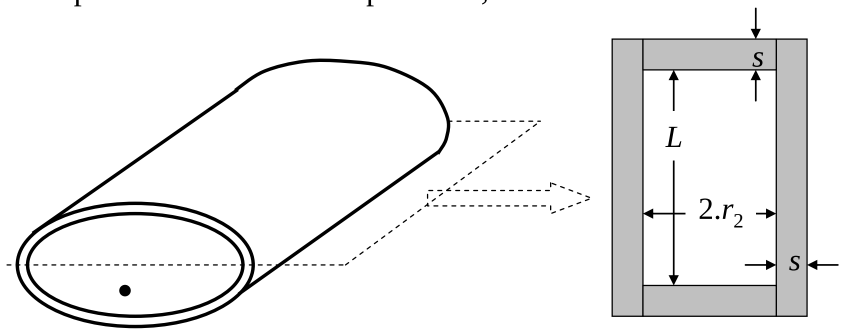
Gasolina	Especificações	Preço de venda ($/barril)
G1	No máximo 15% de P1 No mínimo 50% de P2 No máximo 50% de P3	16,20
G2	No máximo 10% de P1 No mínimo 10% de P2	15,75
G3	No máximo 20% de P1	15,30

(a) Formule um problema LP para maximização do lucro diário levando em conta apenas os custos dos produtos do refino e os valores de venda das gasolinas.
(b) Determine o número de graus de liberdade.
(c) Resolva o problema de otimização.
(d) Identifique restrições ativas e seus multiplicadores.

2.6

Considere o projeto de um tanque cilíndrico horizontal de seção elíptica (caminhão tanque de combustível). A chapa de metal que será usada tem espessura s. O comprimento interno é L e o comprimento externo é L+2.s. As tampas são elipses chatas com raios r_1 e r_2. Estima-se que o custo seja diretamente proporcional ao volume de metal, com coeficiente de custo C_m ($/m^3).

O volume interno deve ser de pelo menos 25 m^3. O menor raio, r_1, deve ser de no mínimo 30 cm para permitir a instalação de uma conexão de saída. A relação entre os raios deve estar entre 0,60 e 0,80. A relação entre espessura da parede e o maior raio deve ser de 0,010. Por limitações de espaço, o comprimento externo não deve ser superior a 5,0 m e a altura no tanque não deve ultrapassar 3,0 m. A espessura mínima da chapa é de 3,7 mm.



(a) Formule um problema de otimização NLP para dimensionamento do tanque, minimizando o custo do material.
(b) Determine o número de graus de liberdade.
(c) Resolva o problema de otimização.
(d) Identifique restrições ativas.

2.7

Uma empresa consiste de duas fábricas A e B. Cada fábrica produz dois produtos, *standard* e *luxo*. Uma unidade de *standard* gera um lucro (receita – custos) de \$10, enquanto uma unidade *luxo* gera um lucro de \$15. Cada fábrica utiliza dois processos, montagem e acabamento, para ambos os produtos. A fábrica A possui uma capacidade de moagem de 80 horas/semana e de polimento de 60 horas/semana. Para a fábrica B estes números são 60 e 75, respectivamente. Os tempos de moagem e polimento em horas para uma unidade são:

Processo	Fábrica A		Fábrica B	
	Standard	*Luxo*	*Standard*	*Luxo*
Montagem	4	2	5	3
Acabamento	2	5	5	6

Além disso, uma unidade de cada produto utiliza 4 kg de matéria prima *mp*. A empresa possui 120 kg de *mp* disponível por semana.

(a) Admitindo inicialmente que sejam alocados 75 kg de *mp* por semana para a fábrica A e 45 para a fábrica B, formule e resolva o problema de maximização do lucro.
(b) Suponha agora que a alocação de *mp* não é mais pré-definida. Reformule e resolva o problema de otimização da empresa. Qual foi a melhora obtida?

2.8

Uma empresa produz três tipos de polímeros em reatores distintos. As receitas de venda dos polímeros Pol1, Pol2 e Pol3 são 40, 33 e 38 \$/ton, respectivamente. A demanda máxima por Pol1 é de 7,0 ton/dia. Na produção são consumidos os monômeros A, B e C, cuja disponibilidade diária e custo de aquisição estão abaixo, assim como os custos operacionais dos processos.

Monômero	Disponibilidade (ton/dia)	Custo (\$/ton)
A	4,0	15
B	3,0	20
C	2,5	25

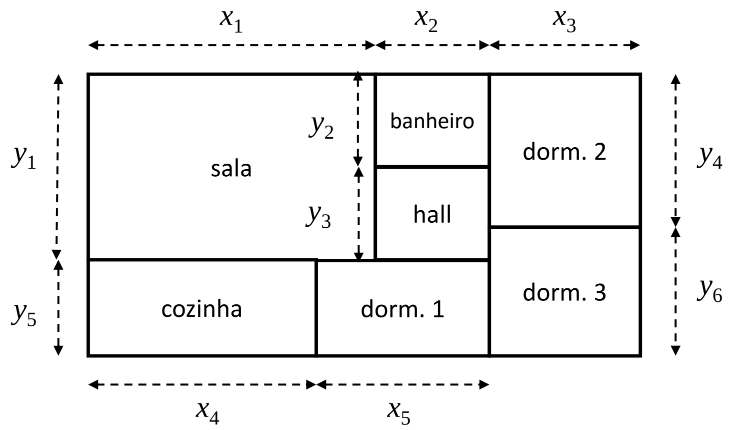
Processo	Balanço mássico	Custo operacional
1	$^2/_3\ kg_A + {}^1/_3\ kg_B$ = Pol1	\$10 / ton A de consumido
2	$^1/_4\ kg_A + {}^3/_4\ kg_B$ = Pol2	\$5 / ton A de consumido
3	$^1/_2\ kg_A + {}^1/_6\ kg_B + {}^1/_3\ kg_C$ = Pol3	\$10 / ton de Pol3 produzida

(a) Formule um problema LP para maximizar o lucro diário. Resolva o problema usando o LINGO ou GAMS. Quais são as variáveis independentes (graus de liberdade)?
(b) Faça uma análise de sensibilidade da disponibilidade do monômero A sobre o ótimo, fazendo um gráfico que mostre a variáveis otimizadas em função deste parâmetro.

2.9

Considere a planta do apartamento mostrado na figura. O objetivo é o de determinar a largura e o comprimento de cada dependência que minimizem o custo total do apartamento, sujeito às restrições na tabela. Os custos da cozinha e do banheiro, por pé quadrado, são o dobro dos custos das demais dependências. Além disso, deve haver um espaço mínimo de 3 ft para portas nas paredes entre o dormitório 3 e o hall e entre o dormitório 2 e o hall. A restrição de *proporção máxima* vale tanto para a relação comprimento/largura como largura/comprimento. Na figura o comprimento é dado na direção x e a largura é dada pela direção y. Todos os aposentos são retangulares.

(a) Formule um problema NLP e resolva usando LINGO ou GAMS.
(b) Desenhe a planta otimizada em escala para verificação.



Dependência	Comprimento mínimo (ft)	Comprimento máximo (ft)	Largura mínima (ft)	Largura máxima (ft)	Área mínima (ft²)	Área máxima (ft²)	Proporção máxima
Sala	8	20	8	20	100	300	1,5
Cozinha	6	18	6	18	50	120	-
Banheiro	5	7	7	9	40	120	-
Hall	4	15	4	9	30	80	-
Dorm. 1	9	25	9	25	100	180	1,7
Dorm. 2	10	23	10	23	130	220	1,7
Dorm. 3	9	19	8	20	100	180	1,7

2.10

A tabela abaixo apresenta resultados experimentais de temperatura em função da distância. Deseja-se ajustar um modelo matemático para $T(L)$. As opções encontradas na literatura são: $T = a + \exp(b.L)$ e $T = a + b.L^3$. Formule um problema NLP para minimização do erro quadrático de ajuste e utilize a ferramenta Solver da planilha eletrônica EXCEL para otimizar os parâmetros dos modelos. Apresente graficamente os pontos experimentais com barras de desvio padrão e a curva que teve melhor ajuste.

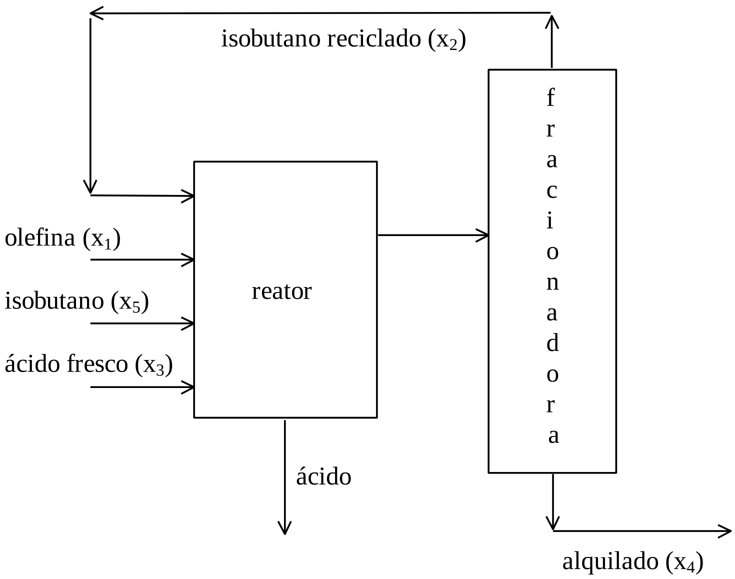
L **(m)**	***T*** **(ºC)**
1,0	16,4 ± 0,2
2,0	16,6 ± 0,2
3,0	16,7 ± 0,2
4,0	16,9 ± 0,2
5,0	17,1 ± 0,2

L **(m)**	***T*** **(ºC)**
6,0	17,6 ± 0,2
7,0	18,0 ± 0,2
8,0	19,0 ± 0,2
9,0	19,7 ± 0,2
10,0	20,9 ± 0,2

2.11 (Himmelblau, 2nd ed, Example 14.3)
A figura a seguir mostra um diagrama simplificado de um processo de alquilação. O processo contém um reator e uma fracionadora. O reator é alimentado por diversas olefinas (hidrocarboneto alifático com dupla ligação na cadeia) e isobutano, além de ácido fresco. O ácido é usado como catalisador das reações químicas. O produto (hidrocarbonetos) é alimentado na fracionadora.
A coluna de fracionamento separa o produto final, o qual é retirado do fundo da coluna, de isobutano não-reagido, retirado no topo da coluna e reciclado no reator. A alimentação total de isobutano consiste de isobutano reciclado e de isobutano puro, de modo a manter uma razão específica entre isobutano e olefinas na entrada do reator.

As variáveis do problema são as seguintes:

- x_1 alimentação de olefina (barris por dia)
- x_2 reciclo de isobutano (barris por dia)
- x_3 taxa de adição de ácido fresco (klbs por dia)
- x_4 vazão de alquilado (barris por dia)
- x_5 alimentação de isobutano (barris por dia)
- x_6 força do ácido no reator (% em peso)
- x_7 número de octanas (octanagem) do alquilado
- x_8 razão isobutano externo/olefina
- x_9 fator de diluição do ácido
- x_{10} número de desempenho F-4 do alquilado



Há 10 variáveis de interesse, das quais x_1, x_2 e x_3 são consideradas variáveis independentes (controladas). Estas três variáveis podem ser fixadas pelo operador por ajuste de set-points nos instrumentos de controle. O objetivo é determinar valores das variáveis independentes os quais maximizam o lucro da planta.
Admitem-se as seguintes hipóteses:

(1) A alimentação de olefinas é de buteno puro;
(2) A alimentação e o reciclo de isobutano são de isobutano puro;
(3) A força do ácido fresco é de 98 % em peso;
(4) O ácido consumido no reator é descartado.

As seguintes equações se aplicam a este processo:

1) A vazão de alquilado, x_4, depende da alimentação de olefina, x_1, e da razão de isobutano externo / olefina, x_8 (correlação empírica):

$$x_4 = x_1\left(1{,}12 + 0{,}13167\,.x_8 - 0{,}00667\,.x_8^{\,2}\right)$$

2) A octanagem do alquilado, x_7, é uma função da razão de isobutano externo / olefina, x_8, e da força do ácido em percentual em peso, x_6:

$$x_7 = 86{,}35 + 1{,}098\,.x_8 - 0{,}038\,.x_8^{\,2} + 0{,}325\,.(x_6 - 89)$$

3) O fator de diluição do ácido, x_9, é uma função linear do número de desempenho F-4, x_{10}:

$$x_9 = 35{,}82 - 0{,}222\,.x_{10}$$

4) O número de desempenho F-4, x_{10}, pode ser expresso como uma função linear da octanagem, x_7:

$$x_{10} = 3.x_7 - 133$$

5) A razão isobutano externo / olefina é:

$$x_8 = {(x_2 + x_5)}\big/{x_1}$$

6) A vazão de isobutano, x_5, é dada pelo balanço volumétrico no reator:

$$x_5 = 1{,}22.x_4 - x_1$$

7) A força do ácido é relacionada com a taxa de adição de ácido, o fator de diluição do ácido e da vazão de alquilado por,

$$x_6 = {98000\,.x_3}\big/{(x_4.x_9 + 1000\,.x_3)}$$

8) A função lucro é dada por:

$$0{,}063\,.x_4.x_7 - 5{,}04.x_1 - 0{,}035\,.x_2 - 10.x_3 - 3{,}36.x_5$$

em que: valor do alquilado = \$0,063 por barril de octana
custo da alimentação de olefina = \$5,04 por barril
custo de reciclo de isobutano = \$0,035 por barril
custo de adição de ácido = \$10,00 por barril
custo de alimentação de isobutano = \$3,36 por barril

Finalmente, limites inferiores e superiores e a condição atual de operação na planta são dadas por:

Variável	Limite inferior	Limite superior	Ponto de operação original
x_1	0	2000	1745
x_2	0	16000	12000
x_3	0	120	110
x_4	0	5000	3048
x_5	0	2000	1974
x_6	85	93	89,2
x_7	90	95	92,8
x_8	3	12	8
x_9	0,01	4,0	3,6
x_{10}	145	162	145

(a) Formule e resolva o problema NLP utilizando LINGO ou GAMS de modo a determinar o ponto ótimo de operação para o processo de alquilação. Qual foi o aumento percentual no lucro em relação ao ponto de operação original?

(b) Identifique as restrições ativas do problema e seus multiplicadores de Kuhn-Tucker.

(c) Como é afetado o ponto ótimo de operação se o valor do alquilado cair para \$0,050 por barril de octana?

2.12

Dado o problema NLP

Min $\quad f(\underline{x}) = x_2$

sujeito a:

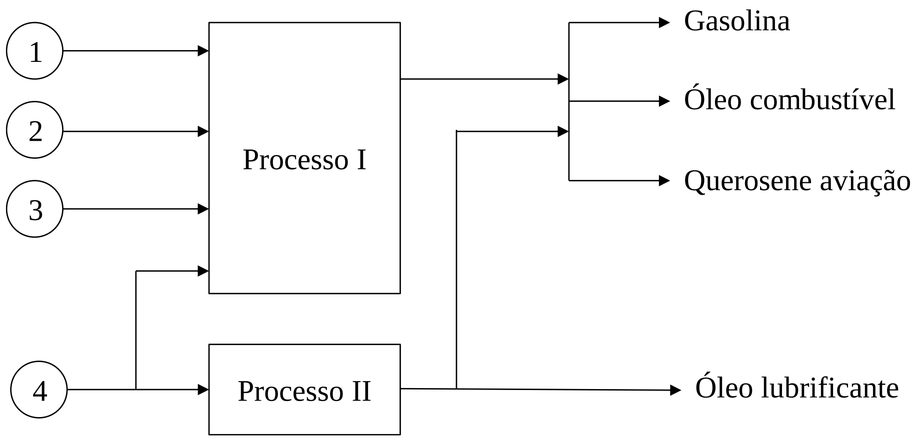
$$-x_2 + 2.(x_1 - 1)^2 - (x_1 - 1)^3 \leq 0$$
$$-x_2 + 2.(2 - x_1)^2 - (2 - x_1)^3 \leq 0$$
$$0 \leq x_1 \leq 3$$
$$0 \leq x_2 \leq 3$$

(a) Desenhe a região viável e indique os mínimos locais e pontos estacionários.

(b) Teste alguns solvers comerciais NLP para resolução deste problema variando o ponto inicial fornecido: $\underline{x}_0$ = [0 3], [1 3], [2 3], [3 3].

2.13

Uma refinaria processa quatro diferentes tipos de óleos crus, que geram quatro produtos: gasolina, óleo combustível, querosene de aviação e óleo lubrificante. Há limites nas demandas de produtos (quantidades a serem vendidas) e disponibilidade dos óleos crus. Um esquema da operação é dado na figura abaixo.



Dados os lucros, custos e rendimentos na tabela a seguir, pede-se:

(a) Modele a refinaria como um problema LP e maximize o lucro.

(b) Suponha que os valores de demandas máximas dos produtos se tornem limites mínimos de produção. Otimize a refinaria para custo mínimo.

Óleo Cru	1	2	3	4			
Custo óleo ($/bbl)	15,00	15,00	15,00	25,00			
Disponibilidade (bbl/sem)	100 000	100 000	100 000	200 000			
	Rendimentos (bbl produto / bbl cru)					Valor do produto ($/bbl)	Demanda máxima (bbl/sem)
Processo	I	I	I	I	II		
Gasolina	0,6	0,5	0,5	0,4	0,4	45	170 000
Óleo comb.	0,2	0,2	0,1	0,3	0,1	30	85 000
Querosene av.	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2	15	85 000
Óleo lubrif.	-	-	-	-	0,2	60	20 000
Perdas	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1		
Custo operacional ($/bbl cru)	5,00	8,50	7,50	3,00	2,50		

bbl = barris
sem = semana