UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO – ESCOLA POLITÉCNICA
Pós-Graduação: Engenharia Química, 3º Período 2020
PQI-5884: Programação Inteira Mista Aplicada à Otimização de. Processos

LISTA DE EXERCÍCIOS 1:
Fundamentos de otimização e problemas irrestritos

1.1
No projeto de uma planta petroquímica, tem-se uma corrente quente Q1 (que deve ser resfriada) e duas correntes frias F1 e F2 (que podem ser aquecidas). Estabeleça uma superestrutura contendo dois trocadores de calor (cada um associado a uma corrente fria) na qual diferentes alternativas para resfriar a corrente quente estejam contempladas. Liste as alternativas consideradas, indicando válvulas abertas e fechadas nas linhas da superestrutura.

1.2
Construa uma superestrutura contendo dois reatores CSTR (I e II), dois tanques de alimentação (reagentes A e B) e um tanque de produto C de forma que as possibilidades de associação e operação dos reatores sejam contempladas para a produção contínua de C pela reação A + 2 B → C. Descreva as possibilidades consideradas. Use derivações e uniões na superestrutura para deixá-la mais clara.

1.3
Prove que o número de nós em uma árvore onde são representadas todas as combinações possíveis de m variáveis binárias 0-1 é dado por $N = 2^{m+1} - 1$.

1.4
Considere o conjunto de restrições de desigualdade $\underline{g}(\underline{x}) + \underline{\underline{A}}.\underline{x} \leq \underline{0}$, onde $\underline{g}(\underline{x})$ é um vetor com m funções convexas, $\underline{\underline{A}}$ é uma matriz $m \times n$ e $\underline{x} \in \Re^n$. Mostre, sem usar a propriedade de soma de funções convexas, que este conjunto de desigualdades define uma região viável convexa.

1.5
Mostre, sem usar a propriedade de soma de funções convexas, que a função objetivo abaixo é convexa, em que α_i são parâmetros reais e c_i são números reais positivos.

$$f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\alpha_i . x_i}$$

1.6
Considere os problemas (P_1) original e (P_2), obtido pela introdução da variável de folga x_3 em (P_1):

$$(P_1)\quad \begin{aligned} \text{Min}\ & f(x_1,x_2) \\ \text{s. a:}\ & h(x_1,x_2) = 0 \\ & g(x_1,x_2) \leq 0 \\ & \underline{x} \in \Re^2 \end{aligned} \qquad\qquad (P_2)\quad \begin{aligned} \text{Min}\ & f(x_1,x_2) \\ \text{s. a:}\ & h(x_1,x_2) = 0 \\ & g(x_1,x_2) + x_3 = 0 \\ & x_3 \geq 0 \\ & \underline{x} \in \Re^3 \end{aligned}$$

Elabore as condições KKT dos problemas (P_1) e (P_2) e mostre que são equivalentes.

1.7

Dado o problema em $\Re^2$:

Min $f(\underline{x}) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2$
sujeito a:

$x_1 + x_2 \leq 8$
$x_1^2 - 2.x_2 \leq 1$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

(a) Analise a convexidade deste problema.
(b) Elabore as condições KKT deste problema.
(c) Desenhe a região viável e os contornos da função objetivo. Determine mínimos locais por inspeção.
(d) Resolva o problema empregando a estratégia de restrições ativas.
(e) Verifique geometricamente a dependência linear de vetores no ponto ótimo.

1.8

Dado o problema em $\Re^2$:

Min $f(\underline{x}) = (x_1 - 2)^2 + 3.(x_2 - 1)^2$
sujeito a:

$2.(x_1 - 2)^2 - x_2 \geq 0$
$x_1 + x_2 \geq 1$
$0 \leq x_1 \leq 2, \quad 0 \leq x_2 \leq 2$

(a) Analise a convexidade deste problema.
(b) Elabore as condições KKT deste problema.
(c) Desenhe a região viável e os contornos da função objetivo. Determine mínimos locais por inspeção.
(d) Resolva o problema empregando a estratégia de restrições ativas.

1.9

Dado o problema em $\Re^2$:

Min $f(\underline{x}) = -x_1 + x_1.x_2 - x_2$
sujeito a:

$2.x_1 - 3.x_2 \geq -3$
$4.x_1 - x_2 \leq 4$
$0 \leq x_1 \leq 2$
$0 \leq x_2 \leq 2$

(a) Analise a convexidade deste problema.
(b) Elabore as condições KKT deste problema.
(c) Desenhe a região viável e os contornos da função objetivo. Determine mínimos locais por inspeção.
(d) Resolva o problema empregando a estratégia de restrições ativas.

1.10

Minimizar a função $f(x) = (x - 5/2)^2 \cdot \exp(-x/3)$, com $x \in [\,1\ ,\ 8\,]$, usando os seguintes métodos:

(a) Bissecção.
(b) Quasi-Newton, verificando o efeito de x_0.
(c) Aproximação quadrática.

Compare os resultados em termos do número de vezes que *f* é calculada.
Sugere-se utilizar uma planilha eletrônica (Excel) para os cálculos.

1.11

Considere o projeto de uma tubulação de comprimento L que deve transportar fluido a uma vazão Q. A seleção do diâmetro do tubo D é baseada na minimização do custo anual da tubulação, bomba e de bombeamento. Suponha que o custo anual de uma linha com tubo de aço carbono padrão e bomba centrífuga motorizada possa ser expresso como:

$$f = 0{,}45.L + 0{,}245.L.D^{1,5} + 325.hp^{0,5} + 61{,}6.hp^{0,925} + 102$$

em que: $$hp = 4{,}4.10^{-8}\,\frac{L.Q^3}{D^5} + 1{,}92.10^{-9}\,\frac{L.Q^{2,68}}{D^{4,68}}$$

com as seguintes unidades: $[\,L\,]$ = ft, $[\,Q\,]$ = gpm e $[\,D\,]$ = in

Formule um problema de otimização monovariável para o projeto de uma tubulação de 2000 ft com vazão de fluido de 30 gpm. O diâmetro da tubulação deve estar entre 0,25 e 5,00 in. Resolva-o empregando os seguintes métodos:

(a) Quasi-Newton, verificando o efeito de x_0.

(b) Aproximação cúbica.

Compare os resultados em termos do número de vezes que f é calculada.
Sugere-se utilizar uma planilha eletrônica (Excel) para os cálculos.

1.12

O custo de óleo refinado, quando enviado via Estreito de *Malacca* para o Japão em \$/kl (kilolitro) é dado como uma função linear do custo de óleo cru, seguro, alfândega, frete, carregamento e descarregamento, ancoradouro, custo de oleoduto, custo de armazenamento, custo de tancagem, custo de refino e frete de produtos como:

$$C = c_c + c_i + c_x + \frac{2{,}09.10^4.t^{-0{,}3017}}{360} + \frac{1{,}064.10^6.a.t^{0{,}4925}}{52{,}47.q.360} + \frac{42420\,.a.t^{0{,}7952} + 1{,}813\,.i.p.(n.t + 1{,}2.q)^{0{,}861}}{52{,}47.q.360} +$$
$$+ \frac{4250\,.a.(n.t + 1{,}2.q)}{52{,}47.q.360} + \frac{5042\,.q^{-0{,}1899}}{360} + \frac{0{,}1049\,.q^{0{,}671}}{360}$$

em que a = fração de custo fixo anual (a = 0,20)
c_c = preço de óleo cru, \$/kl (c_c = 12,50)
c_i = custo de seguro, \$/kl (c_i = 0,50)
c_x = custo de alfândega, \$/kl (c_x = 0,90)
i = taxa de juros (i = 0,06)
p = preço de terra, \$/m^2, (p = 7000)
n = número de portos (n = 3)
q = capacidade da refinaria, bbl/dia (Obs: 1 kl = 6,29 bbl, barril de petróleo).
t = tamanho do navio-tanque, kl

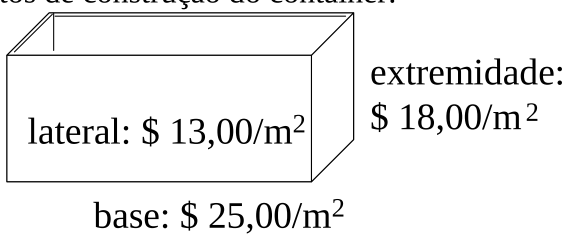
(a) Determine o custo mínimo total C e os tamanhos ótimos da refinaria e do navio-tanque. Utilize o MATLAB e também LINGO ou GAMS para resolução e compare resultados.
(b) Faça uma análise de sensibilidade do custo de frete (parâmetro 0,1049 na equação de C). Verifique o efeito do parâmetro sobre a solução ótima.

1.13

Suponha que você tenha sido contratado para transportar 2.500 m^3 de entulho ao longo de um rio. Para tal, você deve construir um container sem tampa que minimize os custos totais. Os seguintes dados de custo são fornecidos:

- Cada viagem de ida e volta custa \$ 110,00/viagem

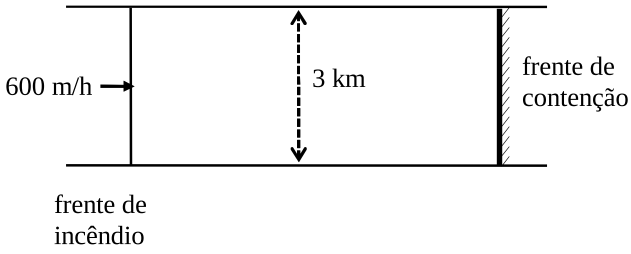
- Custos de construção do container:



(a) Formule o problema e resolva-o utilizando uma função de otimização irrestrita do MATLAB. Como levar em conta que o número de viagens é uma variável inteira?
(b) Formule o problema como um MINLP e utilize o LINGO para resolução.
(c) Faça a seguinte análise de sensibilidade do problema: como o custo da viagem afeta o número ótimo de viagens?

1.14 (Reklaitis et al., 1983)

Um incêndio florestal está ocorrendo em um vale estreito com 3 km de largura, a uma velocidade de 600 m/h. O incêndio pode ser contido se uma clareira de largura 2 m for cortada ao longo da largura do vale. Um homem pode clarear 35 m² de vegetação por hora. O custo de transporte de cada homem até o local é de $20 (ida e volta) e cada homem recebe $5 por hora de trabalho. O valor da madeira é de $400 por quilômetro quadrado. Quantos homens devem ser enviados para conter o incêndio de modo a minimizar os custos? (a) Formule um problema NLP, definindo claramente parâmetros e variáveis do problema. (b) Por substituição de variáveis, obtenha um problema de otimização irrestrito unidimensional.



1.15

Obtenha uma expressão analítica para o diâmetro ótimo de uma tubulação minimizando o custo anual de operação C = custo fixo amortizado + custo de bombeamento:

$$C = c_1 . D^n . L + c_2 . \frac{\dot{m} . \Delta P}{\rho . \eta}$$

Em que c_1, c_2 e n são parâmetros de custo.

Modelagem do processo: $\Delta P = \dfrac{2 . f . \rho . v^2 . L}{D}$ perda de carga

$f = 0{,}046 . Re^{-0{,}2}$ fator de atrito para escoamento turbulento

O diâmetro econômico deve ser expresso em função da vazão mássica $\dot{m}$, da eficiência da bomba η, da densidade do líquido ρ, da viscosidade do líquido μ e dos parâmetros de custo.

1.16

Dada a função:

$$f(\underline{x}) = 3(1 - x_1)^2 . \exp\left(-x_1^2 - (x_2 + 1)^2\right) - 10\left(\frac{x_1}{5} - x_1^3 - x_2^5\right) . \exp\left(-x_1^2 - x_2^2\right) - \exp\left(-(x_1 + 1)^2 - x_2^2\right)$$

Usando uma função de otimização irrestrita do MATLAB determine o seu valor mínimo, verificando o efeito do chute inicial x = [0 0], [+1 +1], [–1, –1] , [–1, +1], , [+1, –1]. Visualize a função para avaliar a localização dos pontos de mínimo.