- **Exercício:** Considere dois 4-vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ quaisquer e sejam u^μ e v^μ, respectivamente, suas componentes na *mesma* base tetrada $\{\mathbf{e}_\mu\}_{\mu=0,1,2,3}$. Ou seja,

$$\mathbf{u} = u^0\mathbf{e}_0 + u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^3\mathbf{e}_3 = \sum_{\mu=0}^{3} u^\mu \mathbf{e}_\mu,$$

$$\mathbf{v} = v^0\mathbf{e}_0 + v^1\mathbf{e}_1 + v^2\mathbf{e}_2 + v^3\mathbf{e}_3 = \sum_{\mu=0}^{3} v^\mu \mathbf{e}_\mu,$$

onde cada $u^\mu, v^\mu \in \mathbb{R}$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) representa a componente dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ na direção de $\mathbf{e}_\mu$ — e *não* números u e v elevados à potência μ. Mostre que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} u^\mu v^\nu = -u^0v^0 + u^1v^1 + u^2v^2 + u^3v^3 \\ &= [\mathbf{u}]^\top \eta\, [\mathbf{v}] = [\mathbf{v}]^\top \eta\, [\mathbf{u}]\,, \end{aligned}$$

onde $[\mathbf{u}]$ representa a matriz coluna das componentes de $\mathbf{u}$, o sobrescrito $\top$ indica a transposição da matriz e η é a matriz definida na Eq. (1.2).

Veremos, mais adiante, que (campos de) bases tetradas serão usadas(os) para caracterizar o que chamamos de "(famílias de) observadores".

1.4.1 Interlúdio: Espaço dual, tensores, convenção de Einstein e notação de índices abstratos

As estruturas definidas acima — de espaço afim munido de uma forma $\mathcal{G}$ com as propriedades listadas — são tudo que precisamos para caracterizar nosso espaço-tempo como sendo o de Minkowski $\mathbb{M}$. No entanto, elas trazem consigo outras estruturas que serão muito úteis e necessárias quando quisermos descrever fenômenos ou formular leis físicas sobre o espaço-tempo. Essas estruturas são normalmente definidas e exploradas num curso de *Álgebra Linear*, mas, por completeza, faremos uma breve exposição aqui das definições e resultados mais importantes para os propósitos desta disciplina.

Espaços duais

Comecemos pelo conceito de *espaço dual*. Dado um espaço vetorial $\mathbb{V}$ qualquer, de dimensão d (finita, por simplicidade), considere os *funcionais lineares* sobre $\mathbb{V}$; ou seja, as funções $\mathbf{U} : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\mathbf{U}(\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}) = \mathbf{U}(\mathbf{u}) + \lambda\mathbf{U}(\mathbf{v}), \text{ para quaisquer } \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{V},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Não é difícil ver que o conjunto de *todos* os funcionais lineares sobre $\mathbb{V}$ também forma um espaço vetorial — denominado *espaço dual a* $\mathbb{V}$ e denotado por $\mathbb{V}^*$ — que possui a mesma dimensão de $\mathbb{V}$.[6]

- **Exercício:** Seja $\{\mathbf{x}_\mu\}_{\mu=0,1,2,3}$ uma base *qualquer* (ou seja, não necessariamente uma tetrada) de $\mathbb{V}$. Mostre que os quatro funcionais lineares $\mathbf{X}^\mu \in \mathbb{V}^*$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, definidos por $\mathbf{X}^\mu(\mathbf{x}_\nu) := \delta^\mu_\nu$, formam uma base de $\mathbb{V}^*$ — dita ser a *base dual a* $\{\mathbf{x}_\mu\}_{\mu=0,1,2,3}$.

Assim como convencionamos chamar os elementos de $\mathbb{V}$ de 4-vetores, chamaremos os elementos de $\mathbb{V}^*$ de *covetores*, apenas para diferenciá-los dos 4-vetores, e é frequente nos referirmos a $\mathbb{V}^*_p = \mathbb{V}^*$ como o *espaço cotangente* a $\mathbb{M}$ em p.

- **Exercício:** Seja $\{\mathbf{x}_\mu\}_{\mu=0,1,2,3}$ uma base qualquer de $\mathbb{V}$ e $\{\mathbf{X}^\mu\}_{\mu=0,1,2,3}$ a respectiva base dual de $\mathbb{V}^*$. Seja $\mathbf{U} \in \mathbb{V}^*$ um covetor qualquer, expresso em termos da base dual como

$$\mathbf{U} = \sum_{\mu=0}^{3} U_\mu \mathbf{X}^\mu$$

(ou seja, U_μ são as componentes do covetor $\mathbf{U}$), e seja $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ um 4-vetor qualquer, com componentes u^μ na base dada:

$$\mathbf{u} = \sum_{\mu=0}^{3} u^\mu \mathbf{x}_\mu .$$

(a) Mostre que as componentes de $\mathbf{u}$ (u^μ) e as componentes de $\mathbf{U}$ (U_μ) são dadas por

$$u^\mu = \mathbf{X}^\mu(\mathbf{u}) \ , \quad U_\mu = \mathbf{U}(\mathbf{x}_\mu);$$

(b) Mostre que

$$\mathbf{U}(\mathbf{u}) = \sum_{\mu=0}^{3} U_\mu u^\mu = [\mathbf{U}]^\top [\mathbf{u}] = [\mathbf{u}]^\top [\mathbf{U}] \, .$$

Naturalmente, do mesmo jeito que podemos falar do espaço dual a $\mathbb{V}$, podemos também definir o espaço dual a $\mathbb{V}^*$: $(\mathbb{V}^*)^*$. Esse espaço é constituído de funcionais lineares sobre $\mathbb{V}^*$; ou seja, por *todas* as funções $\underline{\mathbf{u}} : \mathbb{V}^* \to \mathbb{R}$ satisfazendo $\underline{\mathbf{u}}(\mathbf{U}+\lambda\mathbf{V}) = \underline{\mathbf{u}}(\mathbf{U})+\lambda\underline{\mathbf{u}}(\mathbf{V})$, para quaisquer $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{V}^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Podemos ir além e falar do dual a $(\mathbb{V}^*)^*$ — $[(\mathbb{V}^*)^*]^*$ —, do dual a $[(\mathbb{V}^*)^*]^*$ — $\left\{[(\mathbb{V}^*)^*]^*\right\}^*$ —, e assim por diante, construindo uma cadeia infinita de

[6] Subentendendo que a combinação linear de dois funcionais quaisquer $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{V}^*$ é definida por $(\mathbf{U} + \lambda\mathbf{V})(\mathbf{u}) := \mathbf{U}(\mathbf{u}) + \lambda\mathbf{V}(\mathbf{u})$, para *todo* $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

espaços vetoriais a partir de $\mathbb{V}$. E pela mesma razão que $\mathbb{V}$ e $\mathbb{V}^*$ possuem a mesma dimensão d, todos os espaços dessa cadeia infinita também têm dimensão d. Logo, todos eles são *isomorfos* — ou seja, podem ser identificados entre eles, elemento a elemento, de modo a preservar a estrutura de espaço linear de cada um deles. Na verdade, há *infinitas* maneiras *diferentes* de se fazer essas identificações e a questão que se coloca é: haveria, dentre as infinitas maneiras de se identificar dois espaços vetorias dessa cadeia, *uma* maneira privilegiada?

Apenas com a estrutura de espaço vetorial dada em $\mathbb{V}$, a resposta é "*não*" para os "duais imediatos" — $\mathbb{V}$ e $\mathbb{V}^*$, $\mathbb{V}^*$ e $(\mathbb{V}^*)^*$, $(\mathbb{V}^*)^*$ e $[(\mathbb{V}^*)^*]^*$, e assim por diante.[7] No entanto, há *sim* um isomorfismo "natural" — denominado de *isomorfismo canônico* — entre os "duplo-duais": $\mathbb{V}$ e $(\mathbb{V}^*)^*$, $\mathbb{V}^*$ e $[(\mathbb{V}^*)^*]^*$, e assim por diante. Explicitamente, esse isomorfismo canônico entre $\mathbb{V}$ e $(\mathbb{V}^*)^*$ é dado pela identificação

$$(\mathbb{V}^*)^* \ni \underline{\mathbf{u}} \leftrightarrow \mathbf{u} \in \mathbb{V} \iff \underline{\mathbf{u}}(\mathbf{U}) = \mathbf{U}(\mathbf{u}) \text{ para } \textit{todo } \mathbf{U} \in \mathbb{V}^*.$$

- **Exercício:** Mostre que $\underline{\mathbf{u}} \in (\mathbb{V}^*)^*$ é canonicamente identificado com $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ se, e somente se, suas *componentes* $\underline{u}^\mu$ e u^μ, nas respectivas bases (duplo-)duais, são iguais: $\underline{u}^\mu = u^\mu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$. (Sugestão: combine a definição do isomorfismo canônico dada acima com as últimas igualdades do Exercício anterior.)

Com essa identificação, a cadeia infinita de duais se reduz a apenas dois elementos: $\mathbb{V}$ e $\mathbb{V}^*$. Além disso, vemos que há uma simetria entre eles: $\mathbb{V}^*$ é o dual de $\mathbb{V}$, assim como $\mathbb{V}$ pode ser visto como o dual de $\mathbb{V}^*$ [pois $\mathbb{V} \equiv (\mathbb{V}^*)^*$]. Esses dois espaços servirão de base para a construção a seguir.

Tensores

O conceito de *tensor* surge, em física, da necessidade de se definir grandezas que, além de elas próprias poderem ser somadas entre elas e multiplicadas por números reais — o que uma simples estrutura de espaço vetorial já provê —, também precisam ser multiplicadas entre elas ou por elementos de outro espaço vetorial. Um exemplo simples é o *momentum* de uma partícula. Evidentemente, podemos somar os momenta de partículas que constituem um sistema para calcular o momentum total do sistema (e, então, ver se este está sujeito a alguma lei de conservação, por exemplo). Os próprios momenta são definidos pelo produto de números reais — as massas das partículas numa dada unidade — por vetores — as velocidades. Porém, sabemos, de nossa experiência com mecânica newtoniama, que também é útil se definir o *momentum angular* de uma partícula, através de um produto

[7] No entanto, no nosso caso, há uma estrutura adicional: a forma bilinear $\mathcal{G}$ — que mais adiante denominaremos de *métrica*. Essa estrutura permite, sim, estabelecer *um* isomorfismo preferencial entre os duais diretos. Vide Exercício ②.

"apropriado" entre momentum e posição, ambos sendo grandezas vetoriais — que vivem em "cópias" de $\mathbb{V}$ com unidades diferentes. Assim, precisamos dar sentido a, por exemplo, produtos de elementos de $\mathbb{V}$.

Antes de prosseguirmos, vale a pena deixar claro o espírito por trás da definição que buscaremos. Note que ao falarmos de elementos de $\mathbb{V}$ e de $\mathbb{V}^*$, fizemos questão de apresentá-los como objetos cuja definição e existência *independem* do conceito de "componentes". É claro que, *dada* uma base de $\mathbb{V}$, existe uma associação um a um (mais precisamente, um isomorfismo) entre $\mathbb{V}$ e $\mathbb{R}^4$: $\mathbf{u} \leftrightarrow (u^\mu)_{\mu=0,1,2,3}$. O mesmo vale para $\mathbb{V}^*$: $\mathbf{U} \leftrightarrow (U_\mu)_{\mu=0,1,2,3}$. Mas desde o começo, ainda quando falávamos apenas do conceito de espaço-tempo, quisemos deixar clara a distinção entre o "objeto" em si ($p \in \mathbb{M}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$, $\mathbf{U} \in \mathbb{V}^*$) e sua *representação* (respectivamente, $(t, \mathbf{P}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}^3$, $(u^\mu) \in \mathbb{R}^4$, $(U_\mu) \in \mathbb{R}^4$): o "objeto" — que descreverá alguma propriedade do sistema físico de interesse — tem existência absoluta, enquanto que sua representação depende de escolhas (como sistemas de coordenadas, bases, etc.) que são "externas" ao sistema físico de interesse — e que, portanto, deveriam ser desnecessárias para se *definir* as grandezas que caracterizam ou descrevem o sistema. Em resumo, queremos, por exemplo, definir o produto de elementos de $\mathbb{V}$ sem termos que nos referir às componentes desses elementos. Mais genericamente, queremos definir, em cada ponto do espaço-tempo, grandezas que são combinações de produtos de outras grandezas, mas sem a necessidade de se adotar nenhum sistema de coordenadas ou base para isso — para garantir que o "objeto" que codifica essa grandeza tenha existência absoluta e não seja refém de, ou fique preso a, escolhas arbitrárias.

Tensores são os objetos matemáticos que implementam o que queremos. A idéia é generalizar o procedimento usado para se definir os covetores e definir um *tensor de posto* (m, n) (com $m, n \in \mathbb{N}$) como sendo um *funcional multilinear* atuando sobre m cópias de $\mathbb{V}^*$ e n cópias de $\mathbb{V}$; ou seja, uma função $T : \mathbb{V}^* \times \cdots \times \mathbb{V}^* \times \mathbb{V} \times \cdots \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ que é linear em *cada um* de seus $m + n$ argumentos. Vale notar que, com essa definição, um vetor pode ser visto como um tensor de posto $(1, 0)$, enquanto que um covetor é um tensor de posto $(0, 1)$. A própria forma simétrica bilinear $\mathcal{G}$ definida anteriormente é um exemplo de tensor de posto $(0, 2)$. Por definição (e consistência de notação), tensores de posto $(0, 0)$ são os *escalares*: grandezas que já assumem valores (reais) sem necessidade de se atuar em nada.

O conjunto de todos os tensores de posto (m, n) será denotado por $\mathcal{T}(m, n)$.[8] Esse conjunto possui estrutura natural de espaço vetorial, pois pode-se facilmente definir combinações lineares de funcionais multilineares, assim como fizemos anteriormente para funcionais lineares (vide nota de rodapé 6). Mas, além disso, dados dois tensores quaisquer, $T \in \mathcal{T}(m, n)$ e

[8] Note, então, que $\mathcal{T}(0, 0) = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}(1, 0) = \mathbb{V}$ e $\mathcal{T}(0, 1) = \mathbb{V}^*$.

$Q \in \mathcal{T}(r,s)$, podemos *definir* o tensor *produto*, $T \otimes Q \in \mathcal{T}(m+r, n+s)$ por

$$(T \otimes Q)(\mathbf{U}^1, ..., \mathbf{U}^{m+r}, \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{n+s}) := T(\mathbf{U}^1, ..., \mathbf{U}^m, \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n) \times Q(\mathbf{U}^{m+1}, ..., \mathbf{U}^{m+r}, \mathbf{u}_{n+1}, ..., \mathbf{u}_{n+s}),$$

para qualquer $(\mathbf{U}^1, ..., \mathbf{U}^{m+r}, \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{n+s}) \in \mathbb{V}^* \times ... \times \mathbb{V}^* \times \mathbb{V} \times ... \times \mathbb{V}$.

- **Exercício:** Mostre que $\mathcal{T}(m,n)$ é um espaço vetorial de dimensão d^{m+n}. [Sugestão: Mostre que se $\{\mathbf{x}_\mu\}_{\mu=0,...,d-1}$ é uma base qualquer de $\mathbb{V}$ e $\{\mathbf{X}^\mu\}_{\mu=0,...,d-1}$ a respectiva base dual de $\mathbb{V}^*$, então os tensores

$$\{\mathbf{x}_{\mu_1} \otimes ... \otimes \mathbf{x}_{\mu_m} \otimes \mathbf{X}^{\nu_1} \otimes ... \otimes \mathbf{X}^{\nu_n}\}_{\mu_i, \nu_j = 0,...,d-1}$$

  formam uma base de $\mathcal{T}(m,n)$ — denominada *base induzida*.]

- **Exercício:** Seja $T \in \mathcal{T}(m,n)$ um tensor qualquer e considere sua expansão em termos da base introduzida no exercício anterior:

$$T = \sum_{\mu_1=0}^{d-1} ... \sum_{\mu_m=0}^{d-1} \sum_{\nu_1=0}^{d-1} ... \sum_{\nu_n=0}^{d-1} T^{\mu_1 ... \mu_m}_{\nu_1 ... \nu_n} \, \mathbf{x}_{\mu_1} \otimes ... \otimes \mathbf{x}_{\mu_m} \otimes \mathbf{X}^{\nu_1} \otimes ... \otimes \mathbf{X}^{\nu_n}.$$

  Mostre que suas componentes são dadas por

$$T^{\mu_1 ... \mu_m}_{\nu_1 ... \nu_n} = T(\mathbf{X}^{\mu_1}, ..., \mathbf{X}^{\mu_m}, \mathbf{x}_{\nu_1}, ..., \mathbf{x}_{\nu_n}).$$

- **Exercício:** Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ dois 4-vetores quaisquer, cujas componentes numa base arbitrária $\{\mathbf{x}_\mu\}_{\mu=0,1,2,3}$ são $(u^\mu)_{\mu=0,1,2,3}$ e $(v^\mu)_{\mu=0,1,2,3}$, respectivamente.

  (a) Mostre que as componentes de $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ na base induzida de $\mathcal{T}(2,0)$ são dadas por $(u^\mu v^\nu)_{\mu,\nu=0,1,2,3}$; ou seja,

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} u^\mu v^\nu \, \mathbf{x}_\mu \otimes \mathbf{x}_\nu;$$

  (b) Com o resultado do item anterior, mostre, nesse caso simples, que o produto de tensores *não* é, em geral, comutativo;

  (c) Repita o item (a) para $\mathbf{u} \otimes \mathbf{V}$, onde $\mathbf{V} \in \mathbb{V}^*$, e mostre que, nesse caso, $\mathbf{u} \otimes \mathbf{V} = \mathbf{V} \otimes \mathbf{u}$.

- **Exercício:** Calcule as componentes do tensor $\mathcal{G}$, definido anteriormente, na base de $\mathcal{T}(0,2)$ induzida pela base tetrada $\{\mathbf{e}_\mu\}_{\mu=0,1,2,3}$. Em seguida, escreva $\mathcal{G}$ *explicitamente* em termos dessa base induzida. (Use $\{\mathbf{E}^\mu\}_{\mu=0,1,2,3}$ para a base dual à base tetrada.)

• **Exercício:** Sendo $T \in \mathcal{T}(m,n)$ um tensor qualquer, mostre que

$$T\left(\mathbf{U},...,\mathbf{V},\mathbf{u},...,\mathbf{v}\right) = \sum_{\mu_1=0}^{d-1}...\sum_{\mu_m=0}^{d-1}\sum_{\nu_1=0}^{d-1}...\sum_{\nu_n=0}^{d-1} T^{\mu_1...\mu_m}_{\nu_1...\nu_n}\, U_{\mu_1}...V_{\mu_m}u^{\nu_1}...v^{\nu_n},$$

onde se subentende a quantidade de covetores e vetores no argumento de T.

Outra operação útil de se definir para tensores é a chamada *contração*. Seja $T \in \mathcal{T}(m,n)$ um tensor qualquer com $m,n \geq 1$. Então, a contração do i-ésimo argumento covetorial com o j-ésimo argumento vetorial ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$) é definida pelo mapeamento $\mathcal{C}_{(i,j)} : \mathcal{T}(m,n) \to \mathcal{T}(m-1,n-1)$ dado por

$$\mathcal{C}_{(i,j)}\left(T\right)\left(...\right) := \sum_{\mu=0}^{d-1} T(...,\mathbf{X}^{\mu},...,\mathbf{x}_{\mu},...),$$

onde *cada* elemento da base $\{\mathbf{x}_{\mu}\}_{\mu=0,...,d-1}$ é inserido no j-ésimo argumento vetorial de T, ao mesmo tempo que o *correspondente* elemento da base dual $\{\mathbf{X}^{\mu}\}_{\mu=0,...,d-1}$ é inserido no i-ésimo argumento covetorial e então soma-se sobre todos os valores de $\mu = 0,...,d-1$. (Subentende-se a maneira como os outros $m+n-2$ argumentos aparecem na expressão acima.)

• **Exercício:** Sendo $\mathbf{u} \in \mathcal{T}(1,0)$ e $\mathbf{U} \in \mathcal{T}(0,1)$, calcule $\mathcal{C}_{(1,1)}\left(\mathbf{u}\otimes\mathbf{U}\right)$ e mostre que

$$\mathcal{C}_{(1,1)}\left(\mathbf{u}\otimes\mathbf{U}\right) = \mathbf{U}(\mathbf{u}) = \sum_{\mu=0}^{d-1} U_{\mu}u^{\mu}.$$

É importante frisar que, embora tenha sido feita menção a uma base de $\mathbb{V}$ e à respectiva base dual de $\mathbb{V}^*$ na definição acima de contração, o resultado da contração é um legítimo tensor de posto $(m-1,n-1)$; logo, independente de base. O Exercício abaixo ilustra bem, num caso particular, como isso ocorre.

• **Exercício:** Considere um tensor $T \in \mathcal{T}(2,3)$ com componentes $T^{\mu\nu}_{\alpha\beta\gamma}$ numa base arbitrária; ou seja,

$$T = \sum_{\mu=0}^{d-1}\sum_{\nu=0}^{d-1}\sum_{\alpha=0}^{d-1}\sum_{\beta=0}^{d-1}\sum_{\gamma=0}^{d-1} T^{\mu\nu}_{\alpha\beta\gamma}\,\mathbf{x}_{\mu}\otimes\mathbf{x}_{\nu}\otimes\mathbf{X}^{\alpha}\otimes\mathbf{X}^{\beta}\otimes\mathbf{X}^{\gamma}.$$

Mostre que

$$\mathcal{C}_{(1,3)}(T) = \sum_{\nu=0}^{d-1}\sum_{\alpha=0}^{d-1}\sum_{\beta=0}^{d-1}\left(\sum_{\lambda=0}^{d-1} T^{\lambda\nu}_{\alpha\beta\lambda}\right)\mathbf{x}_{\nu}\otimes\mathbf{X}^{\alpha}\otimes\mathbf{X}^{\beta};$$

ou seja, que $\mathcal{C}_{(1,3)}(T)$ é um legítimo tensor de posto $(1,2)$ cujas componentes são dadas por $\sum_{\lambda=0}^{d-1} T^{\lambda\nu}_{\alpha\beta\lambda}$.

Convenção de Einstein e notação de índices abstratos

Os Exercícios anteriores ilustram bem que somatórias são (muito!) frequentes quando trabalhamos com tensores, em particular quando lidamos com expressões dadas em termos de suas componentes. Note, no entanto, que da maneira como introduzimos a notação de bases e componentes, sempre que um índice é somado sobre todos seus possíveis valores (de 0 a $d-1$), esse *mesmo* índice aparece *exatamente duas vezes* numa mesma parcela: uma de forma sobrescrita, outra subescrita. Isso permite que identifiquemos os índices a serem somados *sem* a necessidade do símbolo de somatória, o que, por sua vez, possibilita que adotemos a convenção — denominada *convenção de soma de Einstein*[9] — na qual os símbolos de somatória são *subentendidos e omitidos* sempre que o *mesmo índice estiver repetido em cima e embaixo* numa mesma parcela de uma expressão. Exemplificando o uso dessa convenção, note como ficam algumas das expressões que encontramos até agora:

$$\mathbf{u} = u^\mu \mathbf{x}_\mu, \quad \mathbf{U} = U_\mu \mathbf{X}^\mu, \quad \mathbf{U}(\mathbf{u}) = U_\mu u^\mu,$$

$$T = T^{\mu_1 \ldots \mu_m}_{\nu_1 \ldots \nu_n} \, \mathbf{x}_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{x}_{\mu_m} \otimes \mathbf{X}^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{X}^{\nu_n},$$

$$T\left(\mathbf{U}, \ldots, \mathbf{V}, \mathbf{u}, \ldots, \mathbf{v}\right) = T^{\mu_1 \ldots \mu_m}_{\nu_1 \ldots \nu_n} \, U_{\mu_1} \ldots V_{\mu_m} u^{\nu_1} \ldots v^{\nu_n},$$

$$\mathcal{C}_{(1,3)} : T^{\mu\nu}_{\alpha\beta\gamma} \, \mathbf{x}_\mu \otimes \mathbf{x}_\nu \otimes \mathbf{X}^\alpha \otimes \mathbf{X}^\beta \otimes \mathbf{X}^\gamma \mapsto T^{\lambda\nu}_{\alpha\beta\lambda} \, \mathbf{x}_\nu \otimes \mathbf{X}^\alpha \otimes \mathbf{X}^\beta.$$

Além disso, note que o nome usado para o índice repetido é irrelevante, sendo um índice "mudo" (como acontece com variáveis de integração em Cálculo). O único cuidado que se deve tomar é o de que o mesmo índice não pode aparecer mais de *duas* vezes (uma embaixo, uma em cima) numa mesma parcela.

A convenção de soma de Einstein simplifica bastante expressões tensoriais que teremos que manipular ao longo do curso. No entanto, ainda há um fato inconveniente com nossa notação de tensores. Até agora, utilizamos letras romanas minúsculas em negrito para denotar vetores e letras romanas maiúsculas em negrito para denotar covetores. Mas agora que temos infinitos tipos diferentes de tensores, dos quais vetores e covetores são apenas dois exemplos, temos que pensar numa notação mais versátil, de modo que ao ver uma quantidade tensorial numa expressão, saibamos qual seu tipo (i.e., posto) só pela maneira como ela foi denotada.

Felizmente, uma notação assim versátil (e escandalosamente simples!) já foi pensada: a notação de *índices abstratos*.[10] A idéia é explorar o fato que, com nossa convenção para a posição de índices nas componentes e bases de tensores, é imediato identificar o posto de um tensor T se dissermos que suas

[9] Jocosamente, Einstein teria dito que essa foi sua maior contribuição à matemática.

[10] Essa notação foi introduzida pelo físico e matemático Roger Penrose, na década de 1960.

componentes são dadas, por exemplo, por $T^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}$; nesse caso, evidentemente $T \in \mathcal{T}(1,3)$. Ou seja, a posição e a quantidade de índices (diferentes) nas *componentes* — chamados de *índices concretos*, por assumirem valores, de 0 a $d-1$ — denuncia o posto do tensor. Por outro lado, lembre-se que, dentro do espírito de se distinguir o objeto em si (absoluto) de sua representação (dependente de escolhas arbitrárias), não queremos identificar o tensor T com suas componentes. A saída para esse impasse é bem simples: ao invés de se denotar o tensor apenas por T, por exemplo, incluiremos, como parte da notação, *índices abstratos*, ou seja, índices que *não* devem assumir nenhum valor, apenas fazem parte do "nome" dado ao tensor e demarcam as posições em que os índices concretos aparecem nas componentes do tensor. No exemplo dado, ao invés de T, denotaríamos o tensor por T^{a}_{bcd}, o que imediatamente deixaria claro seu posto. É claro que temos que arrumar uma convenção para diferenciar, à vista, índices abstratos de índices concretos — para sabermos se estamos nos referindo ao tensor ou às suas componentes. Para isso, adotaremos as oito primeiras letras minúsculas do alfabeto romano $(a, b, ..., h)$ para denotar índices abstratos. Índices concretos que podem assumir valores de 0 a $d-1$ serão representados por letras gregas minúsculas $(\alpha, \beta, ...)$ — como já vínhamos fazendo — e índices concretos que assumem apenas os valores de 1 a $d-1$ serão denotados pelas letras minúsculas romanas do final do alfabeto $(i, j, ...)$. Se precisarmos de mais índices do que os providos por essa "regra", podemos anexar índices numéricos (ou concretos) a esses índices (e.g., $a_1, \mu_m, i_n, ...$).

À primeira vista, a notação de índices abstratos pode parecer um preciosismo em nível patológico. Porém, a clareza que essa notação nos trará, principalmente quando nos depararmos com objetos descritos por componentes que possuem índices mas *não* são tensores[11], mais do que justifica sua adoção — na minha opinião. Além disso, as operações tensoriais introduzidas anteriormente são mais diretamente expressas usando essa notação. Por exemplo, dados tensores $T^{a_1...a_m}_{b_1...b_n}$ e $Q^{a_1...a_r}_{b_1...b_s}$, o produto é simplesmente denotado por $T^{a_1...a_m}_{b_1...b_n} Q^{c_1...c_r}_{d_1...d_s}$, enquanto que a operação de contração fica particularmente simples:

$$\mathcal{C}_{(i,j)} : T^{a_1...a_m}_{b_1...b_n} \mapsto T^{a_1...c...a_m}_{b_1...c...b_n},$$

onde o índice abstrato "mudo" c foi colocado nos lugares de a_i e b_j. (Sendo c um índice abstrato, a convenção de Einstein não se aplica concretamente a ele. Mas o fato de ele aparecer repetido indica que, quando se calcular as *componentes* de $T^{a_1...c...a_m}_{b_1...c...b_n}$, deve-se aplicar a convenção de Einstein ao índice concreto que entrar no lugar de c.) Note que índices abstratos "mudos" não devem ser contados para se inferir o posto do tensor. Assim, por exemplo, o produto de tensores T^{a}_{bc} e Q^{ab}_{c}, seguido das contrações $\mathcal{C}_{(1,3)}$ e $\mathcal{C}_{(2,1)}$ (nessa

[11] Não, nem todo objeto com índice é um tensor.

ordem) tem como resultado final o tensor $S^e_c := T^a_{bc}Q^{eb}_a$ cujo posto é $(1,1)$ (certifique-se de que você entende isso).

Com essa notação, os elementos da base adquirem formato peculiar. Uma base arbitrária de $\mathbb{V}$ será denotada por $\{\mathbf{x}^a_\mu\}$, enquanto que uma base tetrada será dada por $\{\mathbf{e}^a_\mu\}$. O índice concreto μ, aqui, continua indexando elementos diferentes da base, enquanto que o índice abstrato aparece apenas para deixar claro o caráter vetorial de cada elemento. Analogamente, as respectivas bases duais serão denotadas por $\{\mathbf{X}^\mu_a\}$ e $\{\mathbf{E}^\mu_a\}$, onde a condição de dualidade, agora, é escrita como $\mathbf{X}^\mu_a\mathbf{x}^a_\nu = \delta^\mu_\nu = \mathbf{E}^\mu_a\mathbf{e}^a_\nu$. Manteremos o negrito para nos referirmos a elementos de bases para deixar claro que o índice concreto, aqui, *não* se refere a componentes, mas a elementos diferentes. Assim, um tensor é expresso em termos de suas componentes como

$$T^{a_1\ldots a_m}_{b_1\ldots b_n} = T^{\mu_1\ldots\mu_m}_{\nu_1\ldots\nu_n}\,\mathbf{x}^{a_1}_{\mu_1}\ldots\mathbf{x}^{a_m}_{\mu_m}\mathbf{X}^{\nu_1}_{b_1}\ldots\mathbf{X}^{\nu_n}_{b_n},$$

enquanto que suas componentes são dadas por

$$T^{\mu_1\ldots\mu_m}_{\nu_1\ldots\nu_n} = T^{a_1\ldots a_m}_{b_1\ldots b_n}\mathbf{X}^{\mu_1}_{a_1}\ldots\mathbf{X}^{\mu_m}_{a_m}\mathbf{x}^{b_1}_{\nu_1}\ldots\mathbf{x}^{b_n}_{\nu_n}.$$

O(a) leitor(a) deve se certificar de que entende a sutil diferença entre as duas expressões acima: a primeira representa uma combinação linear de elementos da base de $\mathcal{T}(m,n)$ — portanto, tendo como resultado um elemento desse mesmo espaço —, enquanto a segunda representa a aplicação (equivalentemente, a contração) de um elemento de $\mathcal{T}(m,n)$ em (com) m elementos da base de $\mathbb{V}^*$ e n elementos da base de $\mathbb{V}$ — tendo como resultado números reais. Note, ainda, a perfeita correspondência entre os índices "livres" (i.e., "não-mudos") de ambos os lados de cada expressão. Isso é uma característica obrigatória de *qualquer* legítima equação tensorial.

Munidos desse arsenal de estruturas, convenções e notações, podemos (finalmente!) voltar para a física.

1.5 Métrica e Intervalo invariante

Recapitulando, definimos nosso espaço-tempo de Minkowski $\mathbb{M}$ como sendo um espaço afim de dimensão $d = 4$, munido de uma forma bilinear simétrica, não-degenerada, com assinatura lorentziana, $\mathcal{G}$. Na linguagem tensorial, vimos que $\mathcal{G}$ nada mais é do que um tensor de posto $(0,2)$ (com certas propriedades), que a partir de agora denotaremos simplesmente por g_{ab}, de acordo com a notação de índices abstratos introduzida. Traduzindo as propriedades de $\mathcal{G}$ para essa notação, temos que:

(i) $g_{ab} = g_{ba}$; (Simetria)

(ii) $g_{ab}u^b = 0$ se, se somente se, $u^a = 0$; (Não-degenerescência)