ELEMENTOS DE TEORIA DOS CONJUNTOS - LISTA 0

Exercício 1. *Identifique a hipótese e a tese em cada uma das seguintes afirmações:*

a) Se n é inteiro, então $2n$ é um número par.
b) Você pode trabalhar aqui somente se tiver um diploma universitário.
c) Um carro não anda, sempre que está sem combustível.
d) Eu receberei a bandeirada, se cruzar a linha de chegada primeiro.
e) Continuidade é uma condição necessária para diferenciabilidade.
f) Normalidade é condição suficiente para regularidade.
g) Eu tenho sono na aula das 14h, sempre que almoço no Central.
h) $f(x) = 5$ dado que $x > 3$.

Exercício 2. *Sejam p e q as sentenças "$2 < 3$" e $0 + 1 = 1$", respectivamente. Construa as sentenças:*

a) $p \wedge q$
b) $p \vee q$
c) $\neg(p \vee q)$
d) $\neg(p \wedge q)$
e) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

Exercício 3. *Sejam p e q duas sentenças quaisquer. Escreva as sentenças abaixo usando apenas $\wedge$ e $\neg$:*

a) $p \vee q$
b) $p \rightarrow q$
c) $p \leftrightarrow q$

Exercício 4. *Dizemos que uma afirmação é uma* ***tautologia****, se é verdade sempre, ou seja, se, costruindo uma tabela-verdade, obtemos somente o valor verdadeiro. Verifique que cada uma das seguintes afirmações é uma tautologia.*
Os itens a) e b) são chamados de leis comutativas, os itens c) e d) são chamados de leis associativas e os itens e) e f) são as leis distributivas.

a) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
b) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
c) $[p \wedge (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$
d) $[p \vee (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$
e) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
f) $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

Exercício 5. *Verifique que as seguintes afirmações (que mostram como negar $\wedge$, $\vee$ e $\Rightarrow$) são tautologias:*

a) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow [(\neg p) \vee (\neg q)]$
b) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow [(\neg p) \wedge (\neg q)]$
c) $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [p \wedge (\neg q)]$

Exercício 6. *Use as tautologias do exercício 5 para escrever uma negação para cada uma das seguintes afirmações:*

a) 7 é um número primo e $2 + 2 = 4$.
b) Se M é limitado, então M é compacto.
c) Roberto e Alberto medem mais que 2 metros.
d) 7 é um primo ou 5 é par.
e) Se hoje não é segunda-feira, então faz calor.
f) Se K é fechado e limitado, então K é compacto.
g) Se rosas são vermelhas, então violetas são roxas.
h) Se K é compacto, então K é fechado e limitado.
i) Se chover hoje, eu ficarei em casa ou irei ao shopping.

Exercício 7. *Quando escrevemos $p \vee q$ podemos ter p e q ao mesmo tempo. Escreva uma fórmula (usando os conectivos $\vee, \wedge$ e $\neg$) que diga que temos p ou q mas que não podemos ter p e q ao mesmo tempo.*

Exercício 8. *Escreva a negação de cada uma das seguintes afirmações:*

a) Alguns lápis são azuis.
b) Todas as cadeiras têm quatro pernas.
c) f é contínua em todos os pontos.
d) Existe um ponto onde f é contínua.
e) Por quaisquer dois pontos passa uma reta.
f) Por quaisquer dois pontos passa uma única reta.
g) Todo jogador de futebol é inteligente.
h) Para todo número x maior ou igual a zero, $|x| = x$.
i) $\exists x > 1\ (f(x) = 3)$
j) $\forall x > 1\ (0 < f(x) < 4)$
k) $\exists x \in A\ (f(x) > x)$
l) $\exists y \leq 2\ (f(y) < 2$ ou $g(y) \geq 7)$
m) $\forall x \in A\ \exists y \in B\ (x < y < 1)$
n) $\exists x \exists y\ (x + y = 8)$
o) $\forall x \exists y\ (x < y \vee y < x)$
p) $\exists x \forall y\ (y < x)$
q) $\forall x \exists y\ (x < y)$
r) $\forall x \exists y \forall z\ (x + y + z \leq xyz)$

Exercício 9. *Para os itens abaixo faça duas coisas: (i) reescreva a condição da definição usando somente simbologia lógica ($\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$, etc); e (ii) escreva a negação da parte (i)* *usando da mesma simbologia.* ***Não é necessário entender precisamente o que cada termo diz.***

a) Uma função f é *par* se, e somente se, para todo x, $f(-x) = f(x)$.
b) Uma função f é *periódica* se, e somente se, existe um $k > 0$, tal que, para todo x, $f(x+k) = f(x)$.
c) Uma função f é *crescente* se, e somente se, para todo x e para todo y, se $x \leq y$, então $f(x) \leq f(y)$.
d) Uma função f é *estritamente decrescente* se, e somente se, para todo x e para todo y, se $x < y$, então $f(x) > f(y)$.
e) Uma função $f\colon A \longrightarrow B$ é *injetora* se, e somente se, para todos x e y em A, se $f(x) = f(y)$, então $x = y$.
f) Uma função $f\colon A \longrightarrow B$ é *sobrejetora* se, e somente se, para todo y em B, existe x em A, tal que, $f(x) = y$.
g) Uma função $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ é *contínua* em $c \in D$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, $|f(x) - f(c)| < \epsilon$, sempre que $|x - c| < \delta$ e $x \in D$.
h) Uma função f é *uniformemente contínua* num conjunto S se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, sempre que x e y estão em S e $|x - y| < \delta$.
i) O número real L é limite da função $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ no ponto c se, e somente se, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, $|f(x) - L| < \epsilon$, sempre que $x \in D$ e $0 < |x - c| < \delta$.

Exercício 10. *Considere as seguintes afirmações:*

(1) O sistema solar tem apenas 9 (nove) planetas.
(2) Jesus Cristo ressuscitou dos mortos e está vivo agora.
(3) Toda função diferenciável é contínua.

Cada uma das sentenças foi dita por alguém em algum momento como sendo uma "verdade". Reflita sobre a natureza da verdade, comparando e contrastando o seu significado nestes (e em possíveis outros) contextos. Você pode também considerar algumas das seguintes questões: Em qual contexto a verdade é absoluta? Em qual contexto a verdade pode mudar conforme o tempo? Em qual contexto a verdade é baseada em opinião? Em qual contexto as pessoas são livres para aceitar como verdade o que elas quiserem?