

CIRCUITOS DE CORRENTE ALTERNADA

FÍSICA IV — AULAS DE 24 E 25 DE AGOSTO

TEXTO ATUALIZADO EM 26/08/2020

Estudaremos neste capítulo o movimento de cargas elétricas, impulsionado por fontes de tensão alternadas, em circuitos. Os circuitos que nos interessam são constituídos por elementos passivos: capacitores, indutores e resistores. Circuitos dessa natureza têm várias aplicações práticas, mas mais importante é o que eles nos ensinam sobre oscilações, escalas de tempo e álgebra linear, conforme veremos.

ELEMENTOS DE CIRCUITO

A figura 1 mostra um circuito simples com uma fonte que produz uma tensão alternada

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t), \quad (1)$$

onde a amplitude \mathcal{E}_0 (dimensão de potencial elétrico) e a frequência ω são constantes. No instante $t = 0$, o terminal inferior da fonte de tensão tem potencial positivo, enquanto o potencial do terminal superior é negativo.

Os outros três elementos do circuito são nossos conhecidos, da Física III, mas vale a pena fazer uma rápida recordação.

Resistor

A figura 2 mostra um resistor, com resistência R . Uma corrente I atravessa o resistor. De acordo com a lei de Ohm, a diferença de potencial entre os dois terminais é

$$V_B - V_A = RI. \quad (2)$$

A corrente flui no sentido do campo elétrico, isto é, no sentido decrescente do potencial. Assim, na figura, o potencial do ponto B é maior do que o do ponto A , e a diferença $V_B - V_A$ é positiva, em acordo com a Eq. (2).

Capacitor

O elemento na figura 3 é um capacitor de capacitância C . A diferença de potencial entre suas placas é proporcional à carga nele armazenada:

$$V_B - V_A = \frac{Q}{C}. \quad (3)$$

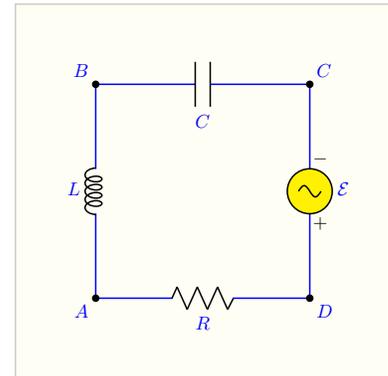


Figura 1: Circuito elétrico simples. O círculo amarelo representa uma fonte de tensão alternada. Os sinais \pm ao lado do gerador indicam a polaridade no instante $t = 0$. Os demais elementos são passivos.

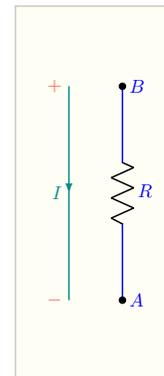


Figura 2: Resistor. O potencial diminui quando se atravessa o elemento no sentido da corrente.

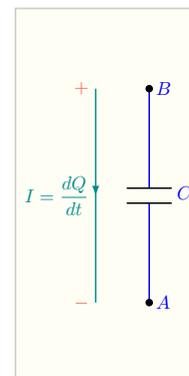


Figura 3: Capacitor. Como no resistor, o potencial decai no sentido da corrente.

O potencial da placa com carga positiva Q é maior do que o da outra placa, cuja carga é $-Q$. É conveniente visualizar a corrente como se as cargas em movimento, que chamamos de *portadores*, fossem positivas. Assim, a carga depositada na placa superior pela corrente na figura 3 é positiva; como na figura 2, o potencial diminui quando atravessamos o capacitor no sentido da corrente.

Indutor

O terceiro elemento é o indutor, representado na figura 4. O indutor é um solenóide, que reage a variações na corrente I que o atravessa. A diferença de potencial entre os terminais A e B na figura é proporcional à derivada da corrente:

$$V_B - V_A = L \frac{dI}{dt}. \quad (4)$$

Para conferir o sinal do lado direito da Eq. (4), vamos considerar o caso $dI/dt > 0$ e voltar ao circuito da figura 1. Vamos supor que a corrente naquele circuito tenha o sentido antihorário, para que I corra de cima para baixo ao passar pelo indutor. De acordo com a lei de Lenz, a diferença de potencial deve opor-se à variação da corrente. Para isso, o potencial no terminal superior do indutor deve ser superior ao do terminal inferior, pois essa diferença de potencial tenderá a empurrar a corrente no sentido horário.

Podemos agora voltar à figura 4, para ver que, para $dI/dt > 0$, o potencial do terminal B (superior) deve ser mais alto do que o do terminal A (inferior). Isso mostra que o sinal do lado direito na Eq. (4) é o correto.

Ao analisar circuitos elétricos, é sempre conveniente admitir que a carga Q num capacitor e a derivada dI/dt da corrente através de um indutor têm o sinal positivo. Com isso, a diferença de potencial entre os terminais dos três elementos passivos pode ser facilmente determinada: basta lembrar que o potencial cai quando se avança na mão de trânsito da corrente ou que aumenta quando se avança na contramão da corrente.

Essa regra não se estende às fontes de tensão, alternadas ou contínuas. O sinal da diferença de potencial em uma fonte de corrente alternada, por exemplo, varia periodicamente com o tempo de forma predeterminada, independente da hipótese que se faz sobre o sentido da corrente. A próxima seção ajuda a entender.

LEI DAS MALHAS

Queremos encontrar a corrente no circuito da figura 1. Como sempre, as leis de Kirchoff definem o ponto de partida. O circuito é simples,

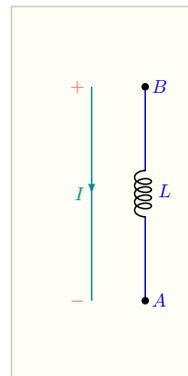


Figura 4: Indutor. Para correntes crescentes, o potencial de B será maior do que o de A .

constituído por uma única malha. Por isso, podemos dispensar a lei dos nós e concentrar nossa atenção na das malhas. Para aplicá-las, começaremos num ponto qualquer do circuito e o percorreremos ao longo de um caminho fechado. A soma das diferenças de potencial, conforme se vê em Física III, deve ser zero.

Para calcular a diferença de potencial entre os terminais de cada elemento, precisamos definir um sentido para a corrente. A escolha é arbitrária. Se estiver errada, a corrente I calculada no final será negativa. No caso, como a fonte de tensão é alternada, a corrente deve inverter-se a cada período. Já sabemos, portanto, que o sentido escolhido na figura 5 será incorreto metade do tempo; podemos esperar que o sinal de $I(t)$ se inverta com a frequência ω que aparece na Eq. (1).

Na figura 5, a seta azul indica que escolhemos o sentido horário. Percorremos o circuito também no sentido horário: $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$. Com isso, avançamos sempre na mão da corrente, e o potencial decai cada vez que atravessamos um elemento passivo. Ao atravessar a fonte de tensão, passamos do polo superior, negativo, para o inferior, positivo, e o potencial cresce.

Igualada a zero a soma das diferenças de potencial indicadas ao longo da circunferência laranja na figura, chegamos à igualdade

$$-L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} + \mathcal{E} - RI = 0. \quad (5)$$

Para ficar com uma só variável, em lugar de duas, no lado esquerdo da Eq. (5), podemos lembrar que $I = dQ/dt$ e substituir, também, dI/dt por d^2I/dt^2 . Podemos aproveitar a oportunidade para deixar as contribuições que dependem da carga à esquerda e passar a força eletromotriz da fonte de tensão para a direita. Com isso, teremos que

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}(t). \quad (6)$$

A Eq. (6) já está na forma padrão na qual se deve escrever uma equação diferencial: os termos que dependem da variável Q estão do lado esquerdo, em ordem decrescente das derivadas, e a função independente de Q está no lado direito. Essa disposição permite reconhecer que ela é uma equação diferencial *ordinária, linear, de segunda ordem, não-homogênea e com coeficientes constantes*.

É *linear* porque cada uma das parcelas que depende de Q é proporcional à carga ou a uma de suas derivadas. Significa que, se multiplicarmos Q por um número qualquer λ , o lado esquerdo ficará multiplicado por λ . Isso não aconteceria, por exemplo, se o último termo à direita fosse proporcional a Q^2 ou a $Q dQ/dt$, casos em que a equação seria não-linear.

A equação é *ordinária* porque as derivadas são ordinárias: nenhuma delas é derivada parcial. Sua *ordem* é a da derivada mais alta, d^2Q/dt^2 .

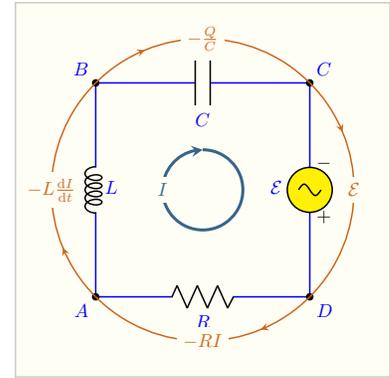


Figura 5: Lei das malhas aplicada ao circuito da figura 1. As diferenças de potencial anotadas em cor laranja somam zero.

A equação seria *homogênea* se o lado direito fosse zero; nessa hipótese, se $Q(t)$ obedecesse à equação, então $\lambda Q(t)$ também satisfaria. No caso, porém, a equação é *não-homogênea*.

A equação tem *coeficiente constantes* porque os fatores multiplicando Q , dQ/dt e d^2Q/dt^2 no lado direito são constantes ($1/C$, R e L), independentes do tempo. O procedimento que discutiremos a seguir vale para qualquer equação ordinária e linear com coeficientes constantes, mesmo que sua ordem seja mais alta.

CONDIÇÕES INICIAIS

A Eq. (6) não é suficiente para encontrarmos a carga Q como função do tempo. Precisamos, também, da carga inicial $Q(t=0)$ e da corrente inicial $I(t=0)$. Supomos que essas duas grandezas sejam dadas:

$$Q(0) = Q_0 \quad (7)$$

e

$$I(0) = I_0, \quad (8)$$

onde Q_0 é uma carga conhecida e I_0 , uma corrente conhecida.

As Eqs. (6), (7) e (8) definem o problema matemático que devemos resolver.

EQUAÇÕES NÃO-HOMOGÊNEA E HOMOGÊNEA

Calcular a carga $Q(t)$ no capacitor da figura 1 equivale a encontrar uma função que obedece à equação diferencial (6) e satisfaz às condições iniciais (7) e (8). Veremos mais adiante que é relativamente fácil encontrar uma solução $Q = q(t)$ da Eq. (6); infelizmente, a não ser em condições muito especiais, essa solução não satisfará às condições iniciais. Nosso problema, portanto, se reduz a outro: dado uma função $q(t)$ que obedece à Eq. (6), mas não satisfaz as condições iniciais (7) e (8), encontrar a solução que satisfaz tanto a equação diferencial como as condições iniciais.

A ilustração na figura 6 nos ajuda a entender. O plano nela representado contém todas as funções do tempo que obedecem à Eq. (6). Cada uma delas tem um valor inicial $Q(0)$ e uma derivada inicial $I(0)$. Uma das funções, indicada pelo símbolo \otimes é a solução desejada, que satisfaz as condições iniciais que nos interessam. A função $q(t)$, indicada pelo símbolo \otimes azul, é a solução que encontraremos abaixo. Ela obedece a Eq. (6), mas sua carga inicial e sua corrente inicial, em geral, estão em desacordo com as Eqs. (7) e (8).

Podem parecer que a diferença ΔQ , entre $q(t)$ e $Q(t)$, obedece a Eq. (6), mas isso não é verdade. Para verificar, devemos lembrar que

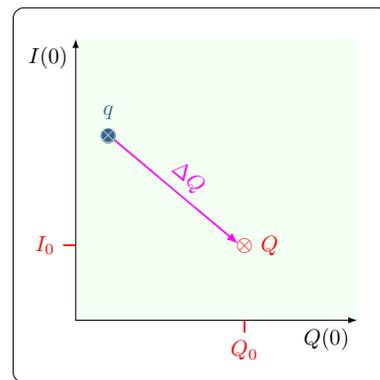


Figura 6: Espaço das soluções da Eq. (6). Cada ponto do plano corresponde a uma solução, que satisfaz a um par de condições iniciais $[Q(0), I(0)]$. A solução $q(t)$, indicada pelo símbolo \otimes azul, é a função que encontraremos mais adiante, e a solução $Q(t)$, indicada pelo símbolo vermelho, é a função que satisfaz as condições iniciais dadas.

tanto $q(t)$ como $Q(t)$ são soluções da equação diferencial. Temos, portanto, que

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}(t). \quad (9)$$

Subtraímos, agora, a Eq. (9) da Eq. (6). Resulta que

$$L \frac{d^2 \Delta Q}{dt^2} + R \frac{d\Delta Q}{dt} + \frac{\Delta Q}{C} = 0. \quad (10)$$

Em outras palavras, a função ΔQ satisfaz a uma equação diferencial homogênea. Essa equação é a igualdade que se obtém da Eq. (6) quando se escreve zero no lado direito, no lugar de \mathcal{E} . Por isso, ela é chamada de *equação homogênea associada* à equação não-homogênea. Nossa primeira tarefa, portanto, é resolver a equação diferencial homogênea associada à Eq. (6). Para isso, convém estudar a Eq. (10).

A EQUAÇÃO HOMOGÊNEA

Suponhamos que $\Delta Q_1(t)$ e $\Delta Q_2(t)$ sejam duas funções distintas, tais que $Q_2(t)$ não seja proporcional a $Q_1(t)$, que obedecem à Eq. (10). Podemos facilmente mostrar que qualquer combinação linear $\Delta Q_3(t) = \alpha \Delta Q_1 + \beta \Delta Q_2$, onde α e β são duas constantes, também obedece à mesma equação. Para isso, notamos que

$$L \frac{d^2 \Delta Q_1}{dt^2} + R \frac{d\Delta Q_1}{dt} + \frac{\Delta Q_1}{C} = 0 \quad (11)$$

e

$$L \frac{d^2 \Delta Q_2}{dt^2} + R \frac{d\Delta Q_2}{dt} + \frac{\Delta Q_2}{C} = 0, \quad (12)$$

já que as duas funções são soluções da equação homogênea.

Se agora multiplicarmos os dois lados da Eq. (11) por α e os dois lados da Eq. (12) por β e somarmos os resultados, veremos que

$$L \frac{d^2 \Delta Q_3}{dt^2} + R \frac{d\Delta Q_3}{dt} + \frac{\Delta Q_3}{C} = 0. \quad (13)$$

Como queríamos demonstrar, a combinação linear $\Delta Q_3(t)$ obedece à equação diferencial homogênea.

A equação homogênea somente admite duas soluções linearmente independentes

Mais ainda, podemos mostrar que qualquer solução da equação homogênea é combinação linear de $Q_1(t)$ e $Q_2(t)$. A demonstração é por redução ao absurdo.

Suponhamos que exista uma função $\bar{Q}(t)$ que obedeça a Eq. (10), mas não seja combinação linear de Q_1 e Q_2 . A função \bar{Q} representa uma carga que varia com o tempo. Ela define, portanto, uma carga inicial, e sua derivada é uma corrente inicial. Vamos chamar de \bar{q} e \bar{i} a carga e a corrente iniciais:

$$\bar{Q}(0) = \bar{q} \quad (14)$$

e

$$\left. \frac{d\bar{Q}}{dt} \right|_0 = \bar{i}. \quad (15)$$

De maneira análoga, vamos chamar de q_1 e i_1 a carga e a corrente iniciais da solução $Q_1(t)$ e vamos chamar de q_2 e i_2 a carga e a corrente iniciais da solução $Q_2(t)$.

Dadas essas cargas e correntes iniciais, poderemos sempre encontrar duas constantes a e b tais que

$$aq_1 + bq_2 = \bar{q} \quad (16)$$

e

$$ai_1 + bi_2 = \bar{i}. \quad (17)$$

De fato, as Eqs. (16) e (17) podem ser vistas como um sistema linear de duas equações com duas incógnitas (a e b). Resolvido esse sistema, encontraremos as duas constantes.

Uma vez que tenhamos encontrado as duas constantes, poderemos construir a combinação linear

$$f(t) = aQ_1(t) + bQ_2(t). \quad (18)$$

A Eq. (16) mostra que $f(0) = \bar{q}$, e a Eq. (17) mostra que $df/dt|_{t=0} = \bar{i}$. Vemos, portanto, que a função $f(t)$ obedece à equação homogênea (10) e satisfaz às condições iniciais nos lados direitos das Eqs. (14) e (15). Logo, $f(t)$ é idêntica a $\bar{Q}(t)$. Podemos, portanto, escrever a Eq. (18) na forma

$$\bar{Q}(t) = aQ_1(t) + bQ_2(t), \quad (19)$$

o que contradiz a hipótese inicial.

Concluimos que a equação homogênea tem apenas duas soluções linearmente independentes.

Como a figura 6 sugere, as soluções da equação homogênea formam um espaço vetorial com duas dimensões. Para resolver a equação homogênea, temos apenas de encontrar duas soluções **distintas**.¹

¹ A geometria analítica mostra que, num plano, há somente dois vetores linearmente independentes. Como consequência, todos os vetores de um plano podem ser escritos como combinação lineares de dois versores de base (\hat{x} e \hat{y} , por exemplo). Analogamente, mostramos que há somente duas soluções linearmente independentes da equação homogênea (10). Isso significa que, se encontrarmos duas soluções distintas, poderemos escrever qualquer outra como combinação linear das duas.

Solução da equação homogênea.

Antes de começar a resolver a Eq. (10), vale a pena simplificá-la. Para isso, dividimos os dois lados por L , para eliminar o fator no primeiro termo à esquerda, e definimos o *tempo de relaxação*

$$\tau \equiv \frac{2L}{R} \quad (20)$$

e a *frequência de oscilação*

$$\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (21)$$

que denotamos ω_0 para evitar confusão com a frequência ω da fonte de tensão na Eq. (1).

Conforme veremos mais abaixo, τ define a *escala de tempo*² em que a corrente decai num circuito RL (como o da figura 1, sem capacitor ou fonte tensão), e ω_0 é a frequência com que oscila a corrente num circuito LC (como o da figura 1, sem resistor ou fonte tensão). Por ora, τ e ω_0 são duas definições que abreviam a notação. Com essas definições, podemos reescrever a Eq. (10) na *forma*³

$$\frac{d^2\Delta Q}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{d\Delta Q}{dt} + \omega_0^2 \Delta Q = 0. \quad (22)$$

Para resolver a Eq. (22), procuramos uma solução da forma

$$\Delta Q(t) = \exp(st), \quad (23)$$

onde s é uma constante que deveremos determinar.

Substituímos em seguida o lado direito da Eq. (23) no lugar de ΔQ na Eq. (22). Uma vez que derivar a exponencial equivale a multiplicá-la por s , somos conduzidos à expressão

$$s^2 \exp(st) + \frac{2s}{\tau} \exp(st) + \omega_0^2 \exp(st) = 0. \quad (24)$$

Como o fator $\exp(st)$, que aparece em cada termo no lado esquerdo, nunca se anula, podemos dividir os dois lados por ele. Encontramos, então, a equação do segundo grau

$$s^2 + \frac{2s}{\tau} + \omega_0^2 = 0, \quad (25)$$

cujas soluções são

$$s = -\frac{1}{\tau} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 - \omega_0^2}. \quad (26)$$

Temos, assim, duas soluções distintas para a Eq. (22):

$$\Delta Q_+(t) = \exp(s_+ t), \quad (27)$$

² É fácil mostrar que τ tem dimensão de tempo. A lei de Ohm nos diz que

$$[R] = \frac{[V]}{[I]}, \quad (3.1)$$

onde $[G]$ significa *dimensão da grandeza G* e V denota o potencial. Por outro lado, já vimos que a diferença de potencial no indutor é $L \, dI/dt$; assim

$$[L] = \frac{[V][T]}{[I]}, \quad (3.2)$$

onde T denota a grandeza tempo.

Se dividirmos a Eq. (3.2) pela Eq. (3.1), veremos que

$$\frac{[L]}{[R]} = [T], \quad (3.3)$$

o que confirma que o lado direito da Eq. (20) tem dimensão de tempo. De forma análoga, podemos mostrar que ω_0 tem dimensão $1/[T]$, ou frequência.

³ Todos os termos no lado esquerdo da Eq. (22) têm a mesma dimensão. A dimensão do primeiro termo é $[Q]/[T]^2$. A do segundo é também $[Q]/[T]^2$, já que τ é um tempo. E a dimensão do terceiro termo à esquerda é $[Q]/[T]^2$ porque ω_0 é uma frequência.

onde

$$s_+ = -\frac{1}{\tau} + \sqrt{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 - \omega_0^2} \quad (28)$$

e

$$\Delta Q_-(t) = \exp(s_- t), \quad (29)$$

onde

$$s_- = -\frac{1}{\tau} - \sqrt{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 - \omega_0^2}. \quad (30)$$

Competição entre escalas de tempo

A Eq. (26) mostra que a frequência de oscilação compete com o inverso do tempo relaxação. Se $\omega_0 < 1/\tau$ (isto é, se $\omega_0\tau < 1$) o radicando à direita é positivo, e tanto s_+ como s_- são números reais. Já se $\omega_0 > 1/\tau$, o radicando é negativo, e a raiz quadrada é um número imaginário. No primeiro caso, os lados direitos das Eqs. (27) e (29) são reais; no segundo, eles são complexos. É bom discutirmos cada possibilidade separadamente.

Caso $\omega_0\tau > 1$: circuito subamortecido

Quando o radicando na Eq. (26) é negativo, é mais fácil definir a frequência positiva

$$\omega_1 \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{1}{\tau}\right)^2}, \quad (31)$$

que é menor do que ω_0 .

Com essa definição, a Eq. (30) fica abreviada:

$$s_{\pm} = -\frac{1}{\tau} \pm i\omega_1. \quad (32)$$

onde i é a unidade imaginária.

Nesse caso, como já notamos, os lados direitos das Eqs. (27) e (29) são complexos. Podemos, entretanto, trabalhar com funções reais. Para isso, recordamos que qualquer combinação linear de duas soluções da equação homogênea é também solução. Assim, em lugar de trabalhar com as funções definidas nas duas equações, é preferível trabalhar com a soma e com a diferença delas:

$$Q_+ \pm Q_- = \exp(-t/\tau) \left(\exp(i\omega_1 t) \pm \exp(-i\omega_1 t) \right). \quad (33)$$

Da expressão de Euler, $\exp(i\theta) = \cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)$, sabemos que a soma de exponenciais no lado direito da Eq. (33) é proporcional a $\cos(\omega_1 t)$ e que a diferença é proporcional a $\text{sen}(\omega_1 t)$:

$$Q_+ + Q_- = 2 \exp(-t/\tau) \cos(\omega_1 t), \quad (34)$$

e

$$Q_+ - Q_- = 2i \exp(-t/\tau) \text{sen}(\omega_1 t). \quad (35)$$

Os fatores 2 no lado direito da Eq. (34) e $2i$ no da Eq. (35) não são importantes, porque estaremos sempre interessados em combinações lineares das duas soluções. Como o lado direito da Eq. (34) tende a 2 quando $t \rightarrow 0$, é conveniente definir uma função igual ao lado direito dividido por 2, para que a solução tenda à unidade quando $t \rightarrow 0$. Chamaremos essa função de Q_x , para lembrar que ela funciona como um versor de base (\hat{x}) na geometria analítica:

$$Q_x(t) \equiv \exp(-t/\tau) \cos(\omega_1 t). \quad (36)$$

Vamos ver, agora, a Eq. (35). A função $\text{sen}(\omega_0 t)$ no lado direito tende a zero quando $t \rightarrow 0$. Por isso, é impossível dividi-la por um fator para fazer a função tender à unidade em $t = 0$. Entretanto, se derivarmos os dois lados em relação ao tempo, veremos que

$$\frac{d(Q_+ - Q_-)}{dt} = 2i \exp(-t/\tau) \left(-\frac{1}{\tau} \text{sen}(\omega_1 t) + \omega_1 \cos(\omega_1 t) \right). \quad (37)$$

O lado direito da Eq. (37) tende a $2i\omega_1$ quando $t \rightarrow 0$. Para obter um valor real e unitário, definimos uma função Q_y igual ao lado direito da Eq. (35) dividido por $2i\omega_1$, ou seja,

$$Q_y = \exp(-t/\tau) \frac{\text{sen}(\omega_1 t)}{\omega_1}, \quad (38)$$

de forma que a corrente $I_s = dQ_y/dt$ seja $I_y = 1$ em $t = 0$.

As duas funções reais $Q_x(t)$ e $Q_y(t)$ são soluções da equação diferencial homogênea (22). Sempre que $\omega_0 \tau > 1$, qualquer outra solução da homogênea poderá ser escrita como combinação linear das duas. Em outras palavras, as funções $Q_x(t)$ e $Q_y(t)$ equivalem aos versores \hat{x} e \hat{y} da geometria analítica. Aqui, não existe função equivalente a \hat{z} , porque o espaço vetorial, representado esquematicamente pelo plano da figura 6, tem **duas dimensões**.⁴

As figuras 7 e 8 mostram $Q_x(t)$ e $Q_y(t)$ para um mesmo circuito, com os valores indicados de R , L e C . A frequência $\omega_0 = 0.71 \text{ rad/s}$ é grande em comparação com o inverso $1/\tau = 1/40 \text{ s}^{-1}$ do tempo de relaxação.

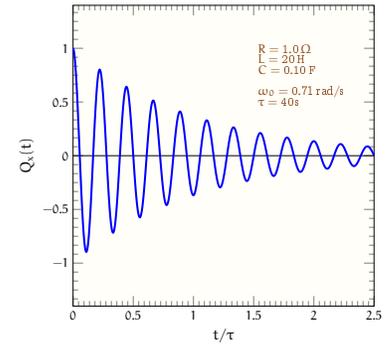


Figura 7: A função $Q_x(t)$, definida pela Eq. (36) para um circuito com os valores indicados de L , R e C . Em $t = 0$, a carga é unitária.

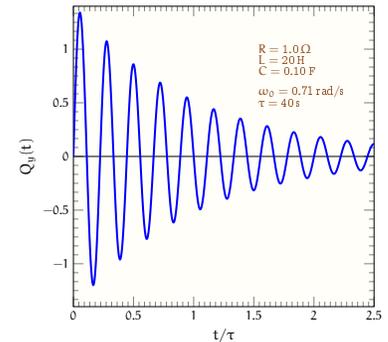


Figura 8: A função $Q_y(t)$, definida pela Eq. (38). Parâmetros idênticos aos da figura 7. No instante $t = 0$, a carga é nula, mas a corrente dQ_y/dt é unitária.

⁴ Sabemos que o espaço vetorial tem duas dimensões porque ele admite somente duas funções linearmente independentes.

Como os dois gráficos mostram, a carga decai na escala de tempo τ . Em cada figura, no extremo direito, quando o tempo t chega a 2.5τ , a carga já é bem menor do que no início. Entretanto, como a frequência ω_0 é bem maior do que $1/\tau$, o circuito tem tempo para oscilar mais de dez vezes no intervalo de tempo retratado pelos gráficos.

A carga decai em função do tempo porque a função exponencial nos lados direitos das Eqs. (36) e (38) vai a zero. As funções trigonométricas que multiplicam a exponencial fazem a carga oscilar à medida que decai. Dizemos que o circuito é *subamortecido*.

Como você deve ter aprendido em Física I, o um oscilador harmônico mecânico sujeito a pouco atrito viscoso exibe o mesmo comportamento e é também chamado de subamortecido. Não surpreende, porque a equação diferencial para um oscilador harmônico amortecido livre é equivalente à Eq. (22). Se houver mais amortecimento, isto é, mais atrito viscoso, o oscilador harmônico deixará de oscilar, como veremos nas próximas duas seções.

Caso $\omega_0\tau < 1$: circuito superamortecido

Para $\omega_0\tau < 1$, as duas raízes no lado direito da Eq. (30) são reais. As duas funções definidas nas Eqs. (27) e (29) são, portanto, reais. Podemos expressar qualquer solução da equação homogênea como combinação linear das duas. Apesar disso, é conveniente definir funções análogas às das Eqs. (36)(38). Com esse objetivo, em analogia com a frequência ω_1 , definimos um segundo tempo de relaxação τ_1 pela equação

$$\frac{1}{\tau_1} = \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2}. \quad (39)$$

A subtração no radicando no lado direito da Eq. (39) faz com que $1/\tau_1 < 1/\tau$, ou seja, que $\tau > \tau_1$.

Assim, podemos desdobrar a Eq. (26) nas igualdades

$$s_+ = -\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_1} \quad (40)$$

e

$$s_- = -\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_1}. \quad (41)$$

Em seguida, por analogia com a Eq. (33), podemos escrever duas combinações lineares das soluções nas Eqs. (27) e (29):

$$Q_+ \pm Q_- = \exp(-t/\tau) \left(\exp\left(\frac{t}{\tau_1}\right) \pm \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right) \right). \quad (42)$$

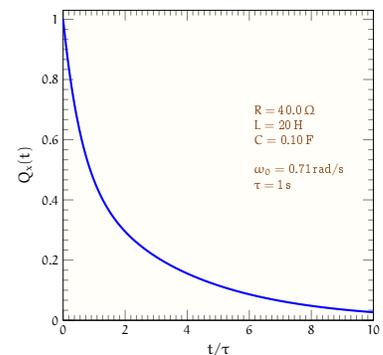


Figura 9: A função Q_x definida pela Eq. (43), para um circuito superamortecido. Em $t = 0$ a carga é unitária.

Como as exponenciais dentro dos parênteses à direita são reais, desta vez encontramos funções hiperbólicas, em lugar de funções trigonométricas. Como na Seção *Caso* $\omega_0\tau > 1$: *circuito subamortecido*, queremos que a função resultante da soma entre parênteses tenha valor unitário no instante $t = 0$ e que a função resultante da diferença tenha derivada unitária em $t = 0$. A álgebra é muito semelhante e nos leva às funções

$$Q_x(t) = \exp(-t/\tau) \cosh(t/\tau_1) \quad (43)$$

e

$$Q_y(t) = \tau_1 \exp(-t/\tau) \sinh(t/\tau_1). \quad (44)$$

Como há perfeita correspondência com as funções definidas pelas Eqs. (36) e (38), empregamos as mesmas letras para representar umas e outras.

As figuras 9 e 10 mostram as funções $Q_x(t)$ e $Q_y(t)$ para um circuito com $L = 20\text{H}$ e $C = 0.10\text{F}$, como nas figuras 7 e 8, mas com resistência maior, $R = 20\Omega$. A desigualdade $\omega_0\tau < 1$ classifica o circuito como superamortecido. Como a figura 9 mostra, a função $Q_x(t)$ decai monotonicamente a zero.

A função $Q_y(t)$ cresce, inicialmente, porque sua derivada em $t = 0$, por definição, é unitária. Logo depois, porém, ela alcança um máximo e **passa a decair**.⁵

Para $\omega_0\tau < 1$, qualquer solução da equação homogênea (22) pode ser escrita como combinação linear das funções $Q_x(t)$ e $Q_y(t)$ definidas pelas Eqs. (43) e (44).

Caso $\omega_0\tau = 1$: *circuito criticamente amortecido*.

A condição $\omega_0\tau = 1$ define o circuito *criticamente amortecido*, que separa o regime superamortecido ($\omega_0\tau < 1$) do subamortecido ($\omega_0\tau > 1$). O caso criticamente amortecido é especial porque o número de raízes no lado direito da Eq. (26) deixa de ser dois. Com $\omega_0\tau = 1$, a raiz quadrada no lado direito é nula e há apenas uma raiz,

$$s = -\frac{1}{\tau}. \quad (45)$$

Assim, a hipótese de que as soluções da Eq. (22) são da forma $\exp(st)$ parece conduzir a apenas um resultado,

$$\Delta Q(t) = \exp(-t/\tau). \quad (46)$$

Como precisamos de duas soluções, isso é insuficiente. Entretanto, podemos ver o amortecimento crítico como limite do **subamortecimento** quando $\omega_0\tau \rightarrow 1$.

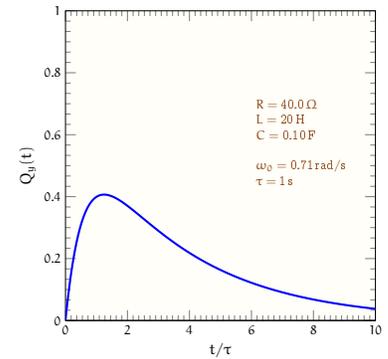


Figura 10: A função Q_y definida pela Eq. (44), para um circuito superamortecido. Em $t = 0$ a carga é nula, mas a corrente é unitária.

⁵ As duas funções hiperbólicas nos lados direitos das Eqs. (43) e (44) crescem exponencialmente para $t \rightarrow \infty$, mas como $1/\tau_1$ é menor do que $1/\tau$, a exponencial decrescente $\exp(-t/\tau)$ faz o produto decrescer à medida que t aumenta.

Em lugar de pensar no caso criticamente amortecido como limite do regime subamortecido, podemos encará-lo como limite do regime superamortecido. Para isso, temos de voltar à Eq. (39) para ver que, quando $\omega_0\tau \rightarrow 1$, o lado direito tende a zero. Quer dizer que $1/\tau_1 \rightarrow 0$. O argumento do seno hiperbólico no lado direito da Eq. (44) é, portanto, muito pequeno, e $\sinh(t/\tau_1)$ tende a t/τ_1 . Assim, a Eq. (44) se reduz à forma

$$Q_y = t \exp(-t/\tau) \quad (\omega\tau = 1),$$

exatamente como na Eq. (48).

Na prática, significa examinar as Eqs. (36) e (38) nesse limite. Com $\omega_0\tau = 1$, o lado direito da Eq. (31) se anula. Assim, $\omega_1 = 0$. A Eq. (36) mostra, imediatamente, que

$$Q_x(t) = \exp(-t/\tau) \quad (\omega_0\tau = 1). \quad (47)$$

Essa igualdade coincide com a Eq. (46) e não traz, portanto, nada de novo. Não nos ajuda a encontrar uma segunda solução.

A Eq. (38) é mais instrutiva. No limite $\omega_1\tau \rightarrow 0$, a razão $\sin(\omega_1 t)/\omega_1$ tende a t . Consequentemente, a Eq. (44) se reduz a

$$Q_y(t) = t \exp(-t/\tau) \quad (\omega_0\tau = 1). \quad (48)$$

Esta é a solução que procurávamos: ela obedece a equação homogênea (22) e é distinta da função na Eq. (47).

As figuras 11 e 12 mostram as funções $Q_x(t)$ e $Q_y(t)$ para um circuito criticamente amortecido. O gráfico na primeira figura é muito parecido com o da figura 9. Isso não é surpresa, porque o produto $\omega_0\tau$ nesta última vale 0.71, muito perto da unidade. Da mesma forma, o gráfico na figura 12 é semelhante ao da figura 10.

O decaimento nas figuras 11 e 12 é, porém, mais rápido do que nas figuras 9 e 10. Se começarmos com o circuito criticamente amortecido ($\omega_0\tau = 1$) e reduzirmos progressivamente $\omega\tau$, veremos que as funções $Q_x(t)$ e $Q_y(t)$ decaem mais e mais devagar à medida que o amortecimento cresce, porque as funções hiperbólicas que multiplicam $\exp(-t/\tau)$ no regime superamortecido parcialmente compensam o decaimento exponencial.

Quadro geral

Em resumo, encontramos as funções $Q_x(t)$ e $Q_y(t)$ para os regimes super- sub- e criticamente amortecidos. Para qualquer valor de $\omega_0\tau$, encontramos, assim, a solução da equação diferencial homogênea (22). A tabela 1 lista as funções $Q_x(t)$ e $Q_y(t)$ para cada regime.

Regime	$\omega_0\tau$	$\exp(t/\tau)Q_x$	$\exp(t/\tau)Q_y$
Subamortecido	> 1	$\cos(\omega_1 t)$	$\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1}$
Criticamente amortecido	1	1	t
Superamortecido	< 1	$\cosh(\omega_1 t)$	$\tau_1 \sinh\left(\frac{t}{\tau_1}\right)$

Como a tabela mostra, todas as soluções da equação diferencial homogênea decaem com tempo, em proporção a $\exp(-t/\tau)$ ou ainda mais rápido.

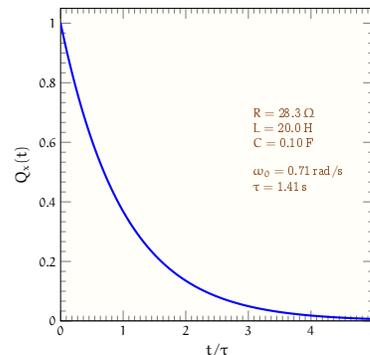


Figura 11: A função $Q_x(t)$ definida pela Eq. (47), para o caso circuito criticamente amortecido.

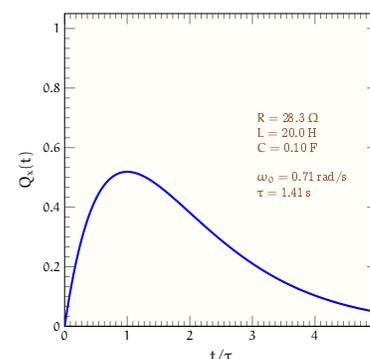


Figura 12: A função $Q_y(t)$ definida pela Eq. (48), para o caso circuito criticamente amortecido.

Tabela 1: Soluções Q_x e Q_y da equação diferencial homogênea. Em cada regime, todas as soluções da equação homogênea são combinações lineares das funções listadas. Para abreviar, como indicado, cada função aparece multiplicada por $\exp(t/\tau)$, o que equivale a dividi-la pelo fator exponencial que aparece no lado direito das equações que definem as funções $Q_x(t)$ e $Q_y(t)$.

O diagrama da figura 13, que tem a estrutura da figura 6, nos ajuda a visualizar a consequência desse decaimento. Já vimos, na Seção A EQUAÇÃO HOMOGÊNEA, que a diferença ΔQ entre duas soluções da equação não-homogênea (6) é uma solução da equação homogênea (10). Vemos agora que as soluções da equação homogênea tendem a zero para tempos grandes. Significa que todas as soluções da equação não-homogênea tendem para uma mesma solução $q(t)$ para tempos $t \gg \tau$.

A solução $q(t)$ é, portanto, especial. Ela varia com o tempo, mas a variação é periódica e, portanto, duradoura. Para tempos grandes, enquanto a fonte de tensão fornecer a força eletromotriz \mathcal{E} , a carga no capacitor da figura 1 será dada pela função $q(t)$. Chamamos $q(t)$ de *solução estacionária*. O circuito da figura 1 possui uma solução estacionária, que depende apenas de R , L , C e $\mathcal{E}(t)$.

Nosso único problema, agora, é encontrar a função $q(t)$. Uma vez que a encontramos, poderemos calcular a carga $Q(t)$ que resolve a Eq. (6).

Vale a pena recapitular o procedimento. Queremos calcular a carga num circuito dado, com condições iniciais especificadas pela carga inicial $Q(t = 0) = Q_0$ e pela corrente inicial $I(t = 0) = I_0$. Digamos as condições iniciais correspondam ao ponto Q_b na figura 13. Para encontrar Q_b , como a figura mostra, precisamos somar a $q(t)$ a diferença ΔQ_b . Esta última pode ser escrita como combinação linear das funções Q_x e Q_y , que podem ser encontradas na linha da tabela 1 correspondente ao circuito: se este for superamortecido, por exemplo, tomaremos as funções na última linha.

Teremos, então, que

$$\Delta Q_b(t) = \alpha Q_x(t) + \beta Q_y(t), \quad (49)$$

onde α e β são duas constantes a determinar.

Se $q(t)$ for conhecida, poderemos imediatamente escrever que

$$Q_b(t) = \alpha Q_x(t) + \beta Q_y(t) + q(t). \quad (50)$$

Com isso, o problema fica praticamente resolvido, restando apenas escolher as constantes α e β que satisfazem às condições iniciais:

$$Q_0 = \alpha Q_x(0) + \beta Q_y(0) + q(0) \quad (51)$$

e

$$I_0 = \alpha \left. \frac{dQ_x}{dt} \right|_0 + \beta \left. \frac{dQ_y}{dt} \right|_0 + \left. \frac{dq}{dt} \right|_0. \quad (52)$$

Temos, assim, duas equações com duas incógnitas (α e β). **Resolvido esse sistema**,⁶ encontraremos as duas constantes que faltavam para

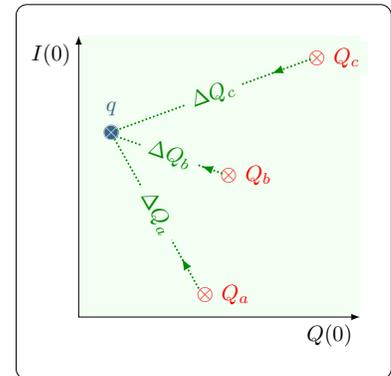


Figura 13: Evolução temporal das soluções da Eq. (6). A função $q(t)$ para a qual todas as demais convergem, é a solução estacionária.

⁶ Resolver o sistema é fácil, porque todas as funções Q_y na tabela 1 se anulam em $t = 0$. Assim, a Eq. (51), por si só, determina α . Uma vez que tenhamos encontrado α , a Eq. (52) determinará β .

completar o lado direito da Eq. (50) e determinaremos a solução $Q_b(t)$ da equação não-homogênea. Isso resolverá nosso problema.

Falta apenas determinar a solução especial $q(t)$, e esse é o assunto da próxima seção.

A SOLUÇÃO ESTACIONÁRIA