

**MAE0326 - Aplicações de Processos Estocásticos**  
**Exercícios de revisão 1**

1. Sejam  $X_0, X_1$  v.a. independentes,  $X_0 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ ,  $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$ . Qual é a distribuição de probabilidade de  $Z = X_0 + X_1$ ?
2. Sejam  $T_1, T_2$  e  $T_3$  três v.a. independentes com distribuição exponencial com parâmetros, respectivamente,  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$ . a) Determine  $P(T_1 < \min\{T_2, T_3\})$ . b) Determine  $P(T_1 < T_2 | \min\{T_1, T_2\} \leq t)$ .
3. O tempo de funcionamento de um certo tipo de lâmpada segue uma distribuição exponencial de média 100 horas. Suponha também que os tempos de funcionamento de lâmpadas distintas sejam independentes. (lembre que, se  $T$  é uma variável aleatória com distribuição exponencial então sua função densidade de probabilidade é dada por  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ,  $x \geq 0$  e  $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ .) a) Uma lâmpada é acesa. Qual é a probabilidade de que ela funcione por mais de 100 horas? b) Três lâmpadas são acesas no mesmo instante. Qual é a probabilidade de que pelo menos uma delas funcione por mais de 100 horas? c) Numa caixa há 5 lâmpadas sendo que 2 estão queimadas e 3 estão funcionando normalmente. Escolho uma dessas lâmpadas ao acaso. Qual é a probabilidade de que esta lâmpada funcione por mais de 100 horas?
4. Após uma discussão política, três indivíduos, digamos, srs. A, B e C, decidem resolver sua desavença através de um “duelo triplo”. Sr. A acerta seu alvo com probabilidade  $\frac{3}{4}$  em cada tiro; sr. B acerta com probabilidade  $\frac{1}{2}$  e o sr. C acerta com probabilidade  $\frac{1}{4}$ . Assuma independência e que, em cada rodada deste duelo triplo, cada participante sobrevivente atira no melhor oponente vivo, ou seja, atira naquele que acerta seu alvo com maior probabilidade. Portanto, na primeira rodada, B e C atiram em A e A atira em B. Os tiros são simultâneos. Descreva a cadeia de Markov correspondente, com espaço de estados = “conjunto dos indivíduos sobreviventes numa dada rodada” (portanto, há 8 estados). Qual é a probabilidade de que o sr. C sobreviva o duelo?
5. Um sistema de comunicação é tal que, se um símbolo é transmitido corretamente, a probabilidade de que o símbolo seguinte seja correto é de 0,9. Se, no entanto, um símbolo for transmitido incorretamente, a probabilidade de o próximo também o seja é de 0,5. A transmissão pode ser modelada pela sequência markoviana,  $\{X_1, X_2, \dots\}$  onde  $X_i = 1$  se o  $i$ -ésimo símbolo for transmitido corretamente, e  $X_i = 0$  se o  $i$ -ésimo símbolo for incorreto. Suponha que a probabilidade de que o primeiro símbolo seja transmitido corretamente seja 0,7. a) Calcule a Matriz de transição. b) Calcule  $P(X_3 = 1 | \pi_0)$ , onde  $\pi_0$  é a distribuição inicial dada (a probabilidade de que o primeiro símbolo seja transmitido corretamente é 0,7). c) Após muito tempo qual é a proporção de símbolos transmitida corretamente?
6. Três bolas numeradas de 1 até 3 são distribuídas em duas urnas A e B. A cada instante, um dado honesto é lançado. Se o número que aparece na face de cima for de 1 até 3, a bola de número correspondente é trocada de urna; se, por outro lado, a face que sai para cima for 4, 5 ou 6, as urnas

permanecem como estão até o instante seguinte, quando o processo todo se repete. Seja  $X_n \in \{0, 1, 2, 3\}$  o número de bolas na urna A no instante n.

a) Determine a matriz de transição da cadeia de Markov  $\{X_n\}_{n \geq 0}$ . b) Seja  $\pi$  a distribuição de probabilidade em  $\{0, 1, 2, 3\}$  dada por  $\pi(k) = \binom{3}{k}(\frac{1}{2})^3$ . Essa distribuição é estacionária?

7. Certo aparelho pode estar em três estados: 0=funcionando, 1=quebrado e aguardando início de serviço de reparo e 2=quebrado e sendo consertado. Os tempos de permanência (em minutos) em cada estado têm distribuições geométricas independentes com médias  $\mu_a$  min,  $\mu_b$  min e  $\mu_c$  min, resp. Ao final do tempo de permanência num estado a escolha do estado seguinte se faz conforme a matriz de transição dada por  $Q(0, 1) = Q(1, 2) = Q(2, 0) = 1$  e  $Q(i, j) = 0$  caso contrário. Se  $X_n$  = estado do aparelho (“funcionando”, “quebrado e aguardando início de serviço de reparo” ou “quebrado e sendo consertado”), mostre que  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  é uma cadeia de Markov e determine sua matrix de transição.