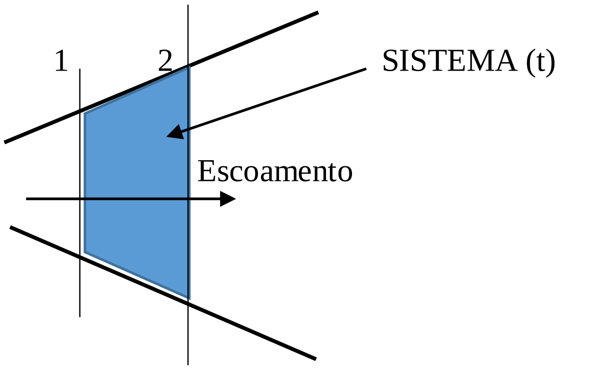
FENÔMENOS DE TRANSPORTE AULA 4

TEOREMA DE TRSNSPORTE DE REYNOLDS

No estudo da dinâmica de fluidos, o uso de volumes de controle para análise é mais simples para abordar o problema.
No entanto, há uma necessidade de se relacionar as variações que ocorrem num volume de controle com as variações num sistema de partículas.
A forma de se estabelecer tal relação é feita pela Equação de Transporte de Reynolds

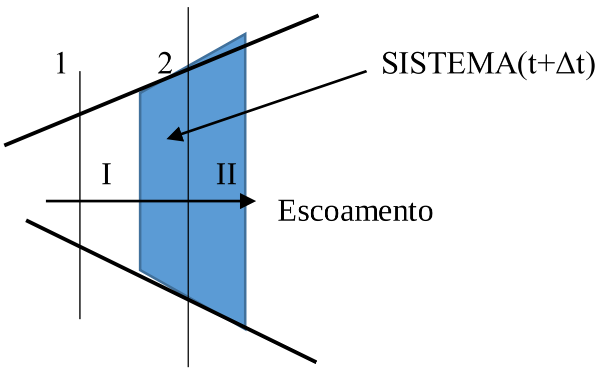
Consideração:

Escoamento num bocal divergente:



1 e 2 são duas superfícies de controle que definem um Volume de Controle (VC) para o campo de escoamento; essas duas superfícies são normais à direção do escoamento.
Considere que no instante t:

SISTEMA = VC



No instante t+Δt: o SISTEMA se move na direção do escoamento com velocidade vb1 na seção 1 e vb2 na seção 2. Por causa desse movimento, a região denominada de I no VC fica descoberta pelo SISTEMA e o SISTEMA cobre a região denominada de II , que não faz parte do VC. Assim, em t+Δt, tem-se:

SISTEMA = VC - I + II

Considere-se, agora, uma propriedade B que seja extensiva (massa, energia, quantidade de movimento...) e sua correspondente intensiva b = B/M (M = massa do sistema).
Toda propriedade extensiva é aditiva, portanto, pode-se aplicar as conclusões geométricas anteriores a essa propriedade:

Instante t:

$B_{SIST,t} = B_{VC,t}$ (eq1)

Instante t+Δt:

$B_{SIST,t+\Delta t} = B_{VC,t+\Delta t} - B_{I,t+\Delta t} + B_{II,t+\Delta t}$ (eq 2)

Subtraindo-se a eq 2 da eq 1 e dividindo-se por Δt:

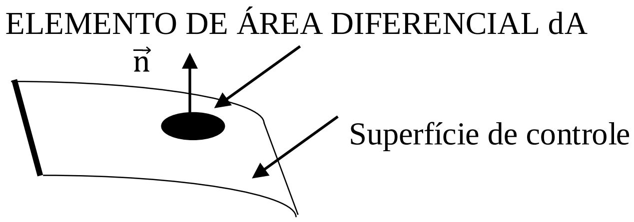
$$\frac{B_{SIST,t+\Delta t} - B_{SIST,T}}{\Delta t} = \frac{B_{VC,t+\Delta t} - B_{VC,t}}{\Delta t} - \frac{B_{I,t+\Delta t}}{\Delta t} + \frac{B_{II,t+\Delta t}}{\Delta t}$$

Tomando-se o limite dessa equação para Δt → 0:

$$\frac{dB_{SIST}}{dt} = \frac{dB_{VC}}{dt} - \dot{B}_I + \dot{B}_{II}$$

$\dot{B}_I$ é a taxa de entrada de B no VC
B_{II} é a taxa de saída de B do VC

A equação indica que a taxa de variação de B no sistema é a taxa de variação de B no volume de controle, considerando-se as entradas e saídas de B pela massa que atravessa o volume de controle. Em geral, podem-se ter várias entradas e várias saídas no VC e as velocidade podem não ser normais às superfícies de controle.
Assim, pode-se generalizar da seguinte forma:



$\vec{n}$ é a normal ao elemento de área dA

A vazão de b através do elemento de área dA será:

$$\rho b \vec{v}.\vec{n} dA$$

$\vec{v}.\vec{n}$ representa a componente normal da velocidade

$$\vec{v}.\vec{n} = v\cos\theta$$

A vazão total de B por toda a superfície de controle:

$$\dot{B} = \dot{B}_{saída} - \dot{B}_{entrada} = \iint \rho b\vec{v}.\vec{n}dA$$

Observação:

$$\vec{v}.\vec{n} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta A}$$

Analisando o termo:

$$\vec{v}.\vec{n} = |\vec{v}|.|\vec{n}|.\cos\theta = v\cos\theta$$

$\theta < 90^0$ → cosθ>0; escoamento para dentro da superfície (entrada).
$\theta > 90^0$ → cosθ<0; escoamento para fora da superfície (saída).
$\theta = 90^0$ → cosθ=0; sem escoamento.

Um aspecto importante da relação apresentada é que a integral sobre a área já fornece diretamente a relação $\dot{B}_{saída} - \dot{B}_{entrada}$ em toda a superfície.

Dentro do volume de controle, a propriedade B pode variar com a posição:

$$B_{VC} = \iiint \rho b dV$$

Assim ficamos com:

$$\frac{dB_{VC}}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint \rho b dV$$

Que é a taxa de variação da propriedade B no VC. Se positivo, aumenta; se negativo, diminui; se igual a zero, não varia.

Assim, ficamos com:

$$\frac{dB_{SIST}}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint \rho b dV + \iint \rho b\vec{v}.\vec{n}dA$$

Se o volume de controle é fixo no espaço:

$$\frac{dB_{SIST}}{dt} = \iiint \frac{\partial}{\partial t}(\rho b)dV + \iint \rho b\vec{v}.\vec{n}dA$$

Se a quantidade de b permanece constante no VC:

$$\frac{dB_{SIST}}{dt} = \iint \rho b\vec{v}.\vec{n}dA$$

Em engenharia, o fluido cruza a fronteira num número definido de entradas e saídas. Empregam-se expressões algébricas aproximadas em cada entrada e saída com base em valores médios.

$$\dot{B} = \dot{B}_{saída} - \dot{B}_{entrada} = \iint \rho b\vec{v}.\vec{n}dA = \sum_{saidas} \dot{m}b_{médio} - \sum_{entradas} \dot{m}b_{médio}$$

m é a vazão mássica

A aproximação pelas somatórias é exata quando b é uniforme na superfície considerada. Portanto:

$$\frac{dB_{SIST}}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint \rho bdV + \sum_{saidas} \dot{m}b_{médio} - \sum_{entradas} \dot{m}b_{médio}$$

Ou ainda:

$$\frac{dB_{SIST}}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint \rho bdV + \sum_{saidas} \rho v_b Ab_{médio} - \sum_{entradas} \rho v_b Ab_{médio}$$

Aplicação do TTR ao Balanço de Massa:

$$\frac{dB_{SIST}}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint \rho bdV + \sum_{saidas} \rho v_b Ab_{médio} - \sum_{entradas} \rho v_b Ab_{médio}$$

A propriedade a ser balanceada é a massa:
B = M (massa)
Assim sendo:
$b = \frac{B}{M} = 1$

$$\frac{dM_{SIST}}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint \rho dV + \sum_{saidas} \rho v_b A - \sum_{entradas} \rho v_b A$$

Como M_{SIST} é constante:

$$\frac{dM_{SIST}}{dt} = 0$$

Assim:

$$\frac{d}{dt}\iiint \rho dV = \sum_{\text{entradas}} \rho v_b A - \sum_{\text{saidas}} \rho v_b A$$

$$\rho v_b A = \dot{m} = \text{vazão mássica}$$

$$\iiint \rho dV = M$$

Assim:

$$\frac{dM}{dt} = \sum_{\text{entradas}} \dot{m}_i - \sum_{\text{saídas}} \dot{m}_j$$

Que é a equação do balanço de massa global sem reação.
O balanço para um componente k:

$$M_k = Mx_k$$

M_k é a massa do componente k no VC; M é a massa total no VC, x_k é a fração mássica de k no VC.

$$\frac{dM_k}{dt} = \sum_{\text{entradas}} \dot{m}_{ik} - \sum_{\text{saídas}} \dot{m}_{jk}$$

Ou:

$$\frac{dMx_k}{dt} = \sum_{\text{entradas}} \dot{m}_i x_{ik} - \sum_{\text{saídas}} \dot{m}_j x_{jk}$$

$\dot{m}_i x_{ik}$ = vazão mássica de k nas correntes de entrada
$\dot{m}_j x_{jk}$ = vazão mássica de k nas correntes de saída

Se houver reação, devemos considerar os termos de produção e consumo do componente k:

$$\frac{dM_k}{dt} = \sum_{\text{entradas}} \dot{m}_{ik} - \sum_{\text{saídas}} \dot{m}_{jk} + R_{gk} - R_{ck}$$

R_{gk} = taxa de geração do componente k.
R_{ck} = taxa de consumo do componente k.

Aplicação do TTR ao balanço de energia:

Formas de energia:

ENERGIA	EM TRÂNSITO	CALOR (Q)	
		TRABALHO (W)	
	ACUMULADA	PONTECIAL	$E_p = mg\Delta z \rightarrow E_p/m = e_p = g\Delta z$
		CINÉTICA	$E_c = ½\ mv2 \rightarrow E_c/m = e_c = ½\ v^2$
		INTERNA	$U = mcv\Delta T \rightarrow U/m = u = cv\Delta T$

Quando se tem um fluido em escoamento, é necessário se considerar um trabalho para que ocorra o movimento desse fluido. Esse é o **trabalho de fluxo**:

$$p\hat{V} = \frac{p}{\rho} = \text{trabalho de fluxo}$$

p=pressão
$\hat{V}$ = volume específico
P=densidade

Da termodinâmica:

$$H = U + pV$$

H = entalpia

A equação escrita para propriedades intensivas:

$$h = u + \frac{p}{\rho} = c_p \Delta T$$

Retomando-se a equação de balanço da propriedade B:

$$\frac{dB_{SIST}}{dt} = \frac{dB_{VC}}{dt} - \dot{B}_{entrada} + \dot{B}_{saída}$$

B = energia total = E

$$e = \frac{B}{M} = \frac{E_{TOTAL}}{M}$$

$$\frac{dE_{SIST}}{dt} = \frac{dE_{VC}}{dt} - \dot{E}_{entrada} + \dot{E}_{saída}$$

Inicialmente, analisando-se o termo $\frac{dE_{SIST}}{dt}$:

-só se pode variar o conteúdo de energia de um sistema (sistema fechado) com energia em trânsito (calor e trabalho). Assim:

$$\frac{dE_{SIST}}{dt} = \dot{Q}_{Total} + \dot{W}_{Total}$$

Convenção:
Sistema recebe trabalho/calor: positivo.
Sistema executa doa trabalho/calor: negativo

$\dot{Q}_{Total} =$ devido a difernças de tmperatura entre o sistema e a vizinhança.
$\dot{Q}_{Total} = 0$ para um sistema adiabáico

$$\dot{W}_{Total} = \dot{W}_{eixo} + \dot{W}_{forças\ viscosas} + \dot{W}_{forças\ de\ pressão} + \dot{W}_{outros}$$

$\dot{W}_{eixo}$
$=$ devido a um eixo giratório (bomba, turbina, compressor, soprador, ventilador ...)

$\dot{W}_{forças\ viscosas}$
$=$ trabalho realizado por componentes normais de cisalhamento de forças viscosas na superfície de controle

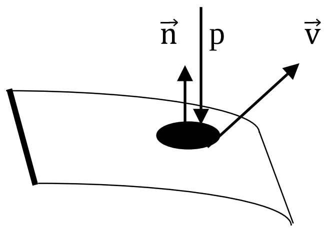
$\dot{W}_{forças\ de\ pressão} =$ forças de presão que atuam sobre a superfície

$\dot{W}_{outros} =$ devido a forças elétricas, magnéticas, tensão superficial ...

Serão consideradas componentes importantes e significativas: o trabalho devido ao eixo e devido às pressões. As demais contribuições são pequenas o suficiente para não serem consideradas num escoamento de um fluido. Assim:

$$\dot{W}_{Total} = \dot{W}_{eixo} + \dot{W}_{forças\ de\ pressão}$$

Com relação ao trabalho de pressão:



No elemento de área tem-se o vetor $\vec{n}$ normal superfície, a pressão p sempre normal à superfície e a velocidade $\vec{v}$ que faz um ângulo θ com a normal à superfície. A pressão pode ser exercida para dentro ou para fora do elemento de área. O trabalho relativo à força de pressão que atua numa área A é:

$$dw = -pAds = -pdV$$

por unidade de tempo:

$$\frac{dw}{dt} = -pA\frac{ds}{dt} = -pdq$$

$$dq = \vec{v}.\vec{n}dA = |\vec{v}|.|\vec{n}|\cos\theta$$

e assim:

$$d\dot{w} = -p(\vec{v}.\vec{n})dA = -p|\vec{v}|.|\vec{n}|\cos\theta dA$$

se:

$\theta<90º$: $\cos\theta>0$, a velocidade é para fora e o trabalho é de expansão (negativo).
$\theta>90º$: $\cos\theta<0$, a velocidade é para dentro e o trabalho é de compressão (positivo).

O trabalho de pressão total então será:

$$\dot{w} = -\iint p(\vec{v}.\vec{n})dA = -\iint \frac{p}{\rho}\rho(\vec{v}.\vec{n})dA$$

Assim, o trabalho total fica como:

$$\dot{W}_{\text{Total}} = \dot{W}_{\text{eixo}} + \dot{W}_{\text{forças de pressão}}$$

$$\dot{W}_{\text{Total}} = \dot{W}_{\text{eixo}} - \iint \frac{p}{\rho}\rho(\vec{v}.\vec{n})dA$$

Retomando-se a equação de transporte de Reynolds para a energia:

$$\frac{dE_{SIST}}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint \rho e dV + \iint \rho e\vec{v}.\vec{n}dA$$

$$\dot{Q}_{\text{Total}} + \dot{W}_{\text{Total}} = \dot{Q}_{\text{Total}} + \dot{W}_{\text{eixo}} - \iint \frac{p}{\rho}\rho(\vec{v}.\vec{n})dA = \frac{d}{dt}\iiint \rho e dV + \iint \rho e\vec{v}.\vec{n}dA$$

Rearranjando-se os termos dessa equação:

$$\dot{Q}_{\text{Total}} + \dot{W}_{\text{eixo}} = \iint \frac{p}{\rho}\rho(\vec{v}.\vec{n})dA + \frac{d}{dt}\iiint \rho e dV + \iint \rho e\vec{v}.\vec{n}dA$$

Ou, para um VC fixo no espaço:

$$\dot{Q}_{Total} + \dot{W}_{eixo} = \frac{d}{dt}\iiint \rho e dV + \iint \rho\left(e + \frac{p}{\rho}\right)\vec{v}.\vec{n}dA$$

Para valores médios no escoamento (e + p/ρ) pode ser considerado uniforme e este termo pode sair da integral dupla:

$$\dot{Q}_{Total} + \dot{W}_{eixo} = \frac{d}{dt}\iiint \rho e dV + \left(e + \frac{p}{\rho}\right)\iint \rho(\vec{v}.\vec{n})dA$$

O termo:

$$\iint \rho(\vec{v}.\vec{n})dA = \text{vazão mássica}$$

E aproximando-se pelas somatórias pelo fato de se ter propriedades uniformes:

$$\dot{Q}_{Total} + \dot{W}_{eixo} = \frac{d}{dt}\iiint \rho e dV + \sum_{\text{saídas}} \dot{m}\left(\frac{p}{\rho} + u + \frac{v_b^2}{2} + gz\right) - \sum_{\text{entradas}} \dot{m}\left(\frac{p}{\rho} + u + \frac{v_b^2}{2} + gz\right)$$

Que é a equação mais geral para balanço de energia de um sistema. Como pela termodinâmica:

h = u + p/ρ

$$\dot{Q}_{Total} + \dot{W}_{eixo} = \frac{d}{dt}\iiint \rho e dV + \sum_{\text{saídas}} \dot{m}\left(h + \frac{v_b^2}{2} + gz\right) - \sum_{\text{entradas}} \dot{m}\left(h + \frac{v_b^2}{2} + gz\right)$$

Que é outra forma de se presentar o balanço de energia.

As duas equações representam a conservação de energia para um VC fixo no espaço, escoamento uniforme nas entradas e saídas, trabalhos devidos a forças viscosas e outros efeitos desprezíveis.
Se for considerado regime permanente:

$$\dot{Q}_{Total} + \dot{W}_{eixo} = \sum_{saídas} \dot{m}\left(\frac{p}{\rho} + u + \frac{v_b^2}{2} + gz\right) - \sum_{entradas} \dot{m}\left(\frac{p}{\rho} + u + \frac{v_b^2}{2} + gz\right)$$

Ou

$$\dot{Q}_{Total} + \dot{W}_{eixo} = \sum_{saídas} \dot{m}\left(h + \frac{v_b^2}{2} + gz\right) - \sum_{entradas} \dot{m}\left(h + \frac{v_b^2}{2} + gz\right)$$

Se for considerada um VC com uma entrada (1) e uma saída (2):

(1) (2)

m_1 → m_2 →

m_1=m_2=m=vazão mássica

$$\dot{Q}_{Total} + \dot{W}_{eixo} = \dot{m}\left(\frac{p_2 - p_1}{\rho} + u_2 - u_1 + \frac{v_{b2}^2 - v_{b1}^2}{2} + gz_2 - gz_1\right)$$

Para densidade constante:

$$\dot{Q}_{Total} + \dot{W}_{eixo} = \dot{m}\left(\frac{\Delta p}{\rho} + \Delta u + \frac{\Delta v_b^2}{2} + g\Delta z\right)$$

Ou:

$$\dot{Q}_{Total} + \dot{W}_{eixo} = \dot{m}\left(h_2 - h_1 + \frac{v_{b2}^2 - v_{b1}^2}{2} + gz_2 - gz_1\right)$$

Ou:

$$\dot{Q}_{Total} + \dot{W}_{eixo} = \dot{m}\left(\Delta h + \frac{\Delta v_b^2}{2} + g\Delta z\right)$$

Odos os termos dessas equações estão na unidade (Energia/tempo). Como a vazão mássica é constante, se dividirmos a equação pela vazão mássica, todos os termos ficam na unidade de (Energia/Massa):

$$q_{Total} + w_{eixo} = \left(\frac{\Delta p}{\rho} + \Delta u + \frac{\Delta v_b^2}{2} + g\Delta z\right)$$

$$q_{Total} + w_{eixo} = \left(\Delta h + \frac{\Delta v_b^2}{2} + g\Delta z\right)$$

Analisando-se a equação em função da energia interna e reagrupando-se os termos:

$$w_{eixo} + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_{b1}^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_{b2}^2}{2} + gz_2 + (u_2 - u_1 - q_{Total})$$

O termo $(u_2 - u_1 - q_{Total})$:

-na situação ideal deve ser nulo, uma vez que a energia interna na saída será alterada pela quantidade de calor adicionada/retirada da energia interna na entrada, fechando o balanço.
-na situação real, sabe-se que há uma dissipação por atrito do fluido com as paredes da tubulação. Desta forma, a equação fica como:

$$(u_2 - u_1 - q_{Total}) > 0$$

E esse termo representa a quantidade de energia mecânica perdida por atrito no escoamento: lwf.
De forma genérica, pode-se então escreve que:

$$w_{eixo} + \frac{v_{b1}^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_{b2}^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + e_{mec\ predida}$$

Ou

$$w_{bomba} + \frac{v_{b1}^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_{b2}^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + w_{turbina} + lwf$$

Ou ainda de forma compacta:

$$\frac{\Delta v_b^2}{2} + g\Delta z + \frac{\Delta p}{\rho} + w_s + lwf = 0$$

Essa é a equação de Bernoulli para o balanço de energia mecânica num fluido. Se for considerado o Sistema Internacional de Unidades, todos os termos estão na unidade j/kg ou m^2/s^2. Se todos os termos da equação forem divididos pela aceleração da gravidade:

$$\frac{\Delta v_b^2}{2g} + \Delta z + \frac{\Delta p}{\rho g} + \frac{w_s}{g} + \frac{lwf}{g} = 0$$

Obtém-se a equação de carga de Bernoulli em que cada termo está na unidade de comprimento. Usando-se o SI, todos os termos estão em metros.
Se todos os termos da equação foram multiplicados pela densidade do fluido que escoa:

$$\frac{\rho\Delta v_b^2}{2} + \rho g\Delta z + \Delta p + \rho w_s + \rho lwf = 0$$

Todos os termos estarão na unidade Pascal (Pa), para o SI.

Analisando-se o termo de trabalho de eixo w_s:

-para uma bomba:

$$\frac{\Delta v_b^2}{2} + g\Delta z + \frac{\Delta p}{\rho} + w_s + lwf = 0$$

Observa-se nessa equação que todos os termos que correspondem à entrada de energia estão negativos. Como uma bomba fornece trabalho ao sistema, tal termos deverá ser negativo também. Considerando-se:

ws (<0) como o trabalho total que a bomba pode fornecer ao fluido e lwp (>0) como as perdas que podem ocorrer no fornecimento de energia pela bomba ao fluido:

$$\eta_p = \frac{w_s + lwp}{w_s} = \text{rendimento da bomba}$$

Assim, a quantidade de energia efetivamente fornecida ao fluido pela bomba será:

$$\eta_p w_s$$

E a equação de Bernoulli fica como:

$$\frac{\Delta v_b^2}{2} + g\Delta z + \frac{\Delta p}{\rho} + \eta_p w_s + lwf = 0$$

No caso de uma turbina, esta retira energia do fluido: $w_t>0$. As perdas apresentadas pelo fluido no escoamento até a turbina são lwt>0. Desta forma, como está se fazendo o balanço de energia mecânica para o fluido, tem-se que:

$$\eta_t = \frac{w_t}{w_t + lwt}$$

E na equação de Bernoulli, tem-se:

$$\frac{\Delta v_b^2}{2} + g\Delta z + \frac{\Delta p}{\rho} + \frac{w_t}{\eta_t} + lwf = 0$$

Considerando-se o trabalho de eixo para bomba, deve-se observar que o resultado da equação será $[w_s]$ = j/kg (ou m^2/s^2).
Normalmente, o que se deseja é a potência da bomba em watt (j/s). Para se converter o resultado da equação (em j/kg) na potência da bomba (j/s):

$$\dot{w}_s = w_s . \dot{m}$$

Em que:

$\dot{w}_s$ é a potência da bomba em $\frac{j}{s}$ ou w
w_s é o trabalho fornecido em j/kg
$\dot{m}$ é a vazão mássica no escoamento