

PERTENCE, CONTIDO E CONJUNTO DAS PARTES

I. Definições básicas:

1. Se a é um membro de um conjunto x dizemos que a é um *elemento* de x e escrevemos $a \in x$. Se a não é um elemento de x escrevemos $a \notin x$.

2. Sejam x e y dois conjuntos.

(i) Dizemos que x é um *subconjunto* de y ou que x está contido em y se todo elemento de x é também um elemento de y , ou seja, se $\forall a(a \in x \rightarrow a \in y)$. Notação: $x \subset y$. (Usaremos também as notações $x \not\subset y$ e $x \subsetneq y$.)

(ii) Dizemos que x e y são *iguais*, $x = y$, se possuem os mesmos elementos, isto é, $x = y \leftrightarrow \forall a(a \in x \leftrightarrow a \in y)$. Note que isso é equivalente a dizer que $x = y$ se e só se $x \subset y$ e $y \subset x$.

3. O *conjunto vazio* é o (único) conjunto sem nenhum elemento e é denotado por $\emptyset$.

4. Se X é um conjunto, o conjunto de todos os subconjuntos de X é chamado *conjunto das partes* de X e será denotado por $\mathcal{P}(X)$.

II. Exercícios (propriedades básicas e exemplos):

1. Escreva exemplos de conjuntos x e y tais que $x = y$, $x \neq y$, $x \subset y$, $x \not\subset y$ e $x \subsetneq y$.

2. Diga precisamente o que significa dois conjuntos serem diferentes, $x \not\subset y$ e $x \subsetneq y$.

3. Mostre que o conjunto vazio é único.

4. Mostre que, para todo conjunto A vale:

(i) $\emptyset \subset A$;

(ii) $A \subset A$;

(iii) $A \subset \{a\}$ se e somente se $A = \{a\}$ ou $A = \emptyset$.

5. Escreva explicitamente os conjuntos:

(i) $\{x \in A : x \neq 3\}$, $\{B \subset A : 1 \in B\}$ e $\{B \subset A : 2 \notin B\}$, onde $A = \{1, 2, 3\}$;

(ii) $\{x \subset A : 3 \notin x \text{ e } 1 \in x\}$ e $\{x \in A : x \neq 3 \text{ e } x \neq 1\}$, onde $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

6. Escreva usando a notação de conjuntos:

(i) o conjunto dos números naturais que são múltiplos de 3;

(ii) o conjunto dos subconjuntos de $\mathbb{N}$ que tem o 5 como elemento;

(iii) o conjunto dos subconjuntos de $\mathbb{N}$ que tem o 5 como elemento e que não tem o 3 como elemento.

7. Diga se é V ou F:

(i) $3 = \{3\}$; (ii) $3 \in \{3\}$; (iii) $3 \subset \{3\}$;

(iv) $\emptyset \in \{3\}$; (v) $5 \in \{\{5\}\}$; (vi) $\{4\} \in \{4, \{4\}\}$;

(vii) $\{4\} \subset \{4, \{4\}\}$; (viii) $\{3, 4\} \subset \{\{3, 4\}, \{5, 6\}\}$; (ix) $\{2, 8\} \subset \{2, 8, 9\}$.

8. Diga se é V ou F e justifique:

(a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$; (b) $\emptyset \in \emptyset$;

(c) $\emptyset \subset \emptyset$; (d) $\{a\} \in \{\{a\}\}$;

(e) $a \in \{b\}$ se e só se $a = b$;

(f) se $A = \{0, \{7\}\}$:

(i) $\emptyset \in A$; (ii) $0 \in A$; (iii) $\emptyset \subset A$.

9. Como é o conjunto $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$? E $\mathcal{P}(\emptyset)$? E $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$?
10. Ache $\mathcal{P}(\{1\})$, $\mathcal{P}(\{1, 2\})$ e $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$. Quantos elementos você acha que tem o conjunto $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$? E o conjunto $\mathcal{P}(\{1, 2, \dots, n\})$, onde n é um número inteiro?
11. Diga se é V ou F, para E um conjunto qualquer:
- (i) $E \in \mathcal{P}(E)$;
 - (ii) $E \subset \mathcal{P}(E)$;
 - (iii) $\{E\} \subset \mathcal{P}(E)$;
 - (iv) $\{E\} \in \mathcal{P}(E)$.
12. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa e justifique:
- (a) $x \in X$ se e só se $\{x\} \in \mathcal{P}(X)$.
 - (b) $\{x\} \in \mathcal{P}(X)$ se e só se $\{x\} \subset X$.
 - (c) $\{x\} \subset \mathcal{P}(X)$ se e só se $x \subset X$.
13. Mostre que $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$, para todo conjunto X .
14. Mostre que para quaisquer conjuntos A , B e C temos:
- (a) se $A \subset \emptyset$, então $A = \emptyset$;
 - (b) se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$;
 - (c) se $A \subset B$, então $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.