Introdução

- O conceito central do nosso curso é "conjunto". Assim, a primeira pergunta que é natural fazer é:

Pergunta: O que é um conjunto? Como definir?

- O conceito parece simples e acho que todos nós temos uma ideia intuitiva do que é um conjunto!

  ⤷ será? têm?

Conjuntos: • informalmente: é uma coleção de objetos com "alguma propriedade em comum".

- são objetos abstratos, criados pela nossa mente, nós que pensamos em uma variedade de objetos diferentes como estando ligados por alguma propriedade em comum. Esta propriedade pode ser simplesmente pensarmos nesses objetos juntos.

  Exemplos: {2, 7, 48, 105, 2020}
  {maçã, pera, laranja}
  conjunto de pontos, conjunto de retas
  conjunto dos números pares

- Uma primeira "definição" de conjunto foi dada por G. Cantor no século XIX:

. Georg Cantor : . considerado o fundador da Teoria dos Conjuntos
(1845 - 1918) (em uma série de artigos publicados nos últimos
3 décadas do século 19).

. definiu "conjuntos" e "elementos" (= objetos dos quais um conjunto é composto).

. trabalhou com os "diferentes infinitos", formulou a Hipótese do Contínuo;

. mas a sua definição de conjunto tinha um problema. (apesar de ser "suficiente" para ~~o trabalho da maioria dos~~ os conjuntos com os quais trabalhamos "normalmente")

. Definição de conjunto dada por Cantor:

Se $\emptyset(x)$ é uma fórmula (propriedade), então $\{x : \emptyset(x)\}$ é um conjunto.

. O problema:

O problema surgiu no início do século $\boxed{XX}$, formulado por Bertrand Russel:

. Paradoxo de Russel (1902):

Considere $\emptyset(x)$: "$x \notin x$"

Daí, segundo a definição de Cantor, temos o conjunto:

$$R = \{x : x \notin x\}$$

Pergunta: $R \in R$? Note que $R \in R \leftrightarrow R \notin R$!!

(Obs: o problema não está em $\emptyset(x)$ ou em perguntar se um conjunto pertence a outro conjunto)

⌈ Vou abrir um pararêntesis aqui, e antes de continuar falando do paradoxo de Russel, vou falar um pouco sobre os paradoxos (lógicos); importantes no início do século $\overline{XX}$.

<u>Obs</u>: Paradóxos (lógicos) que apareceram no início do séc $\overline{XX}$:

- dois tipos de paradóxos:
  - semântico: mostra que precisa usar uma linguagem formal.
  - lógicos: - é o caso do paradoxo de Russel
    - pode ser escrito na liguagem formal, o problema não está aí.

- Tem outros exemplos de paradoxos que surgiram no início do século $\overline{XX}$, todo com "auto-referência"

Alguns exemplos:

- <u>paradoxo do mentiroso</u>: "estou mentindo agora" ou (V ou F?) "esta sentença é falsa"
- <u>paradoxo do cartão</u>: suponha que haja um cartão onde está escrito:
  - <u>frente</u>: a sentensa do outro lado do cartão é V
  - <u>verso</u>: a sentensa do outro lado do cartão é F.

  Pode-se concluir que o que é dito em um dos lados é V ou F? Não, leva a um paradoxo.

- <u>paradoxo</u> <u>do</u> <u>médico</u>: Tem uma epidemia na cidade e só tem um medico, todos tem que tomar uma vacina para sobreviverem. O prefeito determina a seguinte regra: o medico só pode dar a vacina em que não pode dar em si mesmo. O que acontece com o médico? Note que ele pode a aplicar a vacina nele $\Longleftrightarrow$ ele não pode aplicar

  Ele morre pois não consegue decidir se pode aplicar a vacina ou não.

- Esses paradoxos mostram que nem sempre pode-se atribuir um valor verdade à afirmação, ou seja, nem sempre uma afirmação é V ou F. Mas esse é um assunto para um curso de lógica. Estas questões apareceram no início do século $\overline{XX}$ e levaram ao desenvolvimento da lógica e de uma fundamentação matemática.

- Voltando ao paradoxo de Russel, como resolver? Ele não está na definição de R (na propriedade ϕ), nem na pergunta.
O problema está em assumir que existe um conjunto satisfazendo a definição de R. O fato de podermos definir R não garante que ele existe (como conjunto), ou seja, que ele é um conjunto.

- O paradoxo de Russel mostrou que nem tudo que pode ser definido por uma propriedade será um conjunto, mostrou que a definição de Cantor estava errada.

- Surgiu então o problema: quais propriedades definem um conjunto? Ou, como definir um conjunto?
Não parece ser possível resolver o problema desta forma, com uma definição do tipo "um conjunto é __".
A saída foi axiomática: um sistema de axiomas deveria ser usado para garantir a existência de conjuntos e decidir se um certo "objeto" é um conjunto ou não.
Voltaremos a isso, quando formos estudar ZF, que é o principal sistema de axiomas. → Zermelo-Frenkel.

Sobre o curso

. Não seguirei a ordem natural e usual para esse curso, que é começar com os axiomas de ZF e depois estudar os vários tópicos envolvendo conjuntos. Vou fazer ao contrário, acho melhor primeiro vocês aprenderem saber os conjuntos, aprenderem a trabalhar com eles, ir motivando os axiomas, para depois ver os axiomas de ZF

. Estudaremos:

. Começaremos com a "Teoria Ingênua dos Conjuntos", assumindo a noção intuitiva de conjuntos, onde estudaremos as definições e propriedades principais

Veremos:
- pertence, contido, operações de conjuntos;
- relação, função, ordem relação de equivalência;
- construção dos naturais e tópicos relacionados;
- conjuntos finitos e infinitos, enumeráveis e não enumeráveis;
- "cardinalidade" e um pouco sobre ordinais e cardinais (se der tempo)
- ... algo mais? (dependendo do andamento do curso)

. Depois veremos ZF (teoria axiomáticas dos conjuntos) e o Axioma da Escolha.

. Durante todo o curso: vamos trabalhar bastante escrever demonstração.