

Universidade de São Paulo Instituto de Física de São Carlos

Atividade de Laboratório de Física II à Distância

1. Rotações de corpos rígidos e Conservação do momentum angular

Roteiro adaptado do livro de prática de Laboratório de Física II do IFSC para uso com videoaulas

*(J. Schneider e E.R. de Azevedo. (compiladores), Laboratório de Física II, Livro de Práticas. Instituto de Física de São Carlos - USP, 2016. Disponível para download em:
http://granada.ifsc.usp.br/labApoio/index.php?option=com_content&view=article&id=8&Itemid=13)*

Vídeo aulas relacionadas a esse roteiro:

- Rotação de corpos rígidos e conservação de momentum angular ([link](#))
- Segunda Lei de Newton para rotação de corpos rígidos ([link](#))
- Rotação de corpos rígidos e conservação de momentum angular ([link](#))

1. Rotações de corpos rígidos e Conservação do momentum angular

1.1 Objetivos

Nesta prática será estudada a conservação do momentum angular e a dinâmica de rotações de corpos rígidos. Será determinado, experimentalmente, o momento de inércia de uma peça com simetria cilíndrica (roda de Maxwell) e será analisada a dinâmica de colisões rotacionais plásticas.

1.2 Introdução

1.2.1 Corpos rígidos

Em Mecânica se define como corpo rígido um sistema de massas cujas distâncias entre as massas são mantidas fixas durante o movimento. Os corpos rígidos de interesse prático são, geralmente, extensos e formados por uma distribuição contínua de massa. O movimento de corpos rígidos extensos é mais complicado que o movimento de uma massa pontual, pois além do movimento de translação, pode existir rotação ao redor de um ou mais eixos. A dinâmica de ambos os tipos de movimento pode ser claramente separada nos corpos rígidos.

1.2.2 Movimento de translação: quantidade de movimento

O movimento de translação do corpo rígido, de massa M , é completamente descrito fornecendo as coordenadas e a velocidade do centro de massa. De fato, pode-se assimilar a dinâmica de translação do corpo como se toda a massa M estivesse concentrada no centro de massa. A quantidade de movimento total \vec{p} do corpo é

$$\vec{p} = M \vec{v} \quad , \quad (1)$$

em que \vec{v} é a velocidade do centro de massa. A equação que determina a dinâmica da translação é a Segunda Lei de Newton

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad , \quad (2)$$

na qual \vec{F}_{ext} é a resultante da somatória de forças externas ao corpo. Quando não atuam forças externas, temos conservação da quantidade de movimento de translação do corpo rígido.

De modo análogo, as energias cinéticas de translação e potencial gravitacional do corpo rígido podem ser avaliadas simplesmente considerando, respectivamente, a velocidade e a altura H do centro de massa em relação ao nível de referência da energia potencial:

$$E_{CIN} = \frac{M v^2}{2} \quad ; \quad E_G = M g H . \quad (3)$$

1.2.3 Movimento de rotação: momentum angular

O corpo rígido pode efetuar, também, rotações, existindo energia cinética e quantidade de movimento puramente associados a esse movimento. A grandeza que representa a quantidade de movimento rotacional de um corpo rígido é o momentum angular \vec{L} de rotação. Por simplicidade, suporemos que a rotação é realizada ao redor de um eixo passando pelo centro de massa do corpo, e que o corpo é simétrico ao redor desse eixo. Nessa situação, o momentum angular resulta em

$$\vec{L} = I \vec{\omega} \quad , \quad (4)$$

no qual $\vec{\omega}$ é a velocidade angular e I é o momento de inércia do corpo rígido ao longo do eixo de rotação. O momento de inércia é obtido através da soma dos produtos entre os fragmentos elementares de massa δm_i e o quadrado de sua distância ao longo do eixo de rotação d_i^2 , como indicado na figura 1.1. A soma deve ser feita ao longo de todo o corpo.

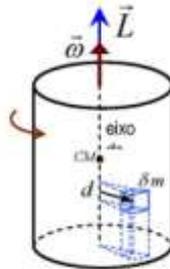
$$I = \sum_i d_i^2 \delta m_i \quad . \quad (5)$$

Para um corpo extenso, de volume V e densidade ρ , a soma em (5) se expressa como uma integral, ao longo dos elementos infinitesimais, de volume com massa $dm = \rho dV$

$$I = \int_V d^2 \rho dV \quad . \quad (6)$$

No Apêndice estão mostrados os valores calculados de I para corpos homogêneos (ρ constante) de geometrias simples em rotação ao redor de eixos de simetria, como aqueles que serão analisados na prática.

Figura 1.1 - Esquema de um corpo rígido em rotação em torno de um eixo passando pelo centro de massa (CM). d : distância entre um elemento de massa δm e o eixo de rotação. Observe a relação entre o sentido da rotação e o sentido dos vetores velocidade angular e momentum angular (“mão direita”).



Fonte elaborada pelos compiladores.

A Física e a Engenharia Aeronáutica: helicópteros coaxiais

Nos helicópteros convencionais, o motor exerce um torque sobre o conjunto do rotor, criando um momentum angular. Reciprocamente, pela terceira Lei de Newton, o rotor exerce forças de reação sobre o motor, transmitindo, assim, um torque sobre o resto do helicóptero. Quando a aeronave está em voo, não há agentes externos capazes de compensar esse torque e, o corpo do helicóptero, tenderia a rotar com o momentum angular oposto ao do rotor. É para suprimir esse movimento que existe o rotor estabilizador de cauda, o qual cria um torque adicional sobre a fuselagem do helicóptero, a fim de mantê-lo estável.

- Se o rotor principal gira em sentido anti-horário (visto de cima), em que sentido deve girar o rotor estabilizador? Como sua resposta depende do ângulo de ataque das asas do estabilizador?
- O rotor estabilizador mantém sempre a mesma velocidade angular durante o voo?
- O comprimento da cauda influencia no regime de rotação do estabilizador?

Os *helicópteros coaxiais* oferecem outra solução para compensar a tendência à rotação da fuselagem: dois conjuntos de rotores idênticos com velocidades angulares opostas. Dessa forma, o momentum angular dos rotores é mutuamente cancelado, dispensando o uso de rotor de cauda. Uma vantagem desse desenho é a eliminação da *assimetria de sustentação*; as velocidades das pás do rotor à esquerda e à direita da aeronave são diferentes com *referência ao ar*, o que causam forças de sustentação diferentes à esquerda e à direita da aeronave.

Questão: Qual é a diferença de momento de inércia entre um disco fino de massa M e um cilindro longo da mesma massa?

Questão: Por que, de acordo com o Apêndice, um cilindro oco tem maior momento de inércia que um cilindro maciço de mesma massa e raio?

A equação que determina a dinâmica da rotação é uma consequência da Segunda Lei de Newton e resulta em

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad , \quad (7)$$

na qual $\vec{\tau}_{ext}$ é o resultante dos torques de cada força externa atuando sobre o corpo

$$\vec{\tau}_{ext} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_{ext\ i} \quad (8)$$

Nessa expressão, \vec{r}_i é o vetor indicando o ponto de aplicação da força $\vec{F}_{ext\ i}$ sobre o corpo, medido em relação ao centro de massa. Quando o torque externo total é nulo, temos conservação do momentum angular de rotação do corpo rígido.

Questão: Pode existir uma força externa atuando sobre o corpo e não haver torque? Pode ter torque externo sem força?

Questão: Pode ocorrer que uma componente de \vec{L} se conserve e as outras não?

Questão: A força gravitacional atuando sobre um corpo rígido causa um torque?

Questão: A Terra possui momentum angular de rotação? Ele se conserva? Qual é a consequência mais importante desse fenômeno?

A energia cinética, associada à rotação do corpo rígido, é dada pela expressão

$$E_R = \frac{I \omega^2}{2}, \quad (9)$$

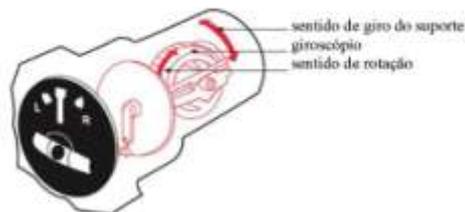
que é formalmente análoga à expressão da energia cinética de translação.

A Física e as Engenharias Mecatrônica, Aeronáutica e Civil: bússolas giroscópicas

Em sistemas de navegação autônomos, utilizados em pilotos automáticos de navios, aviões, foguetes ou em robótica, é necessária uma orientação de referência. As bússolas magnéticas ou magnetômetros não são aceitáveis para essas aplicações devido à distorção do campo magnético da Terra pelas estruturas metálicas e a distribuição geográfica não regular das linhas de campo. A orientação magnética é, também, inacessível nos casos de navegação e estabilização aeroespacial, submarina, projetos de escavação em obras de engenharia civil e mineração ou em prospecção petrolífera. Uma alternativa é o uso de sistemas com **giroscópios**, cujo momentum angular de uma peça girante define uma direção fixa no espaço, independente da orientação da plataforma, desde que seja minimizado o efeito dos torques externos. A **bússola giroscópica**, utilizada em navios e aeronaves, é capaz de indicar a direção da velocidade angular da Terra e, portanto, do norte geográfico verdadeiro. Esses sistemas possuem motores elétricos e servomecanismos para compensar os efeitos do atrito nos rolamentos de suporte.

Outra função dos giroscópios é indicar o estado de movimento rotacional de uma plataforma de navegação (aeronave, satélite ou foguete). Quando um giroscópio é rotado, existem torques exercidos sobre os suportes, que podem ser medidos e convertidos em sinais elétricos proporcionais à velocidade de rotação da plataforma. Um conjunto de três giroscópios, com momentos angulares mutuamente perpendiculares, é suficiente para determinar completamente o movimento de rotação de um sistema.

Além da navegação direcional, os giroscópios também são usados em outros dois instrumentos de navegação aeronáutica: o **horizonte artificial** e o **indicador de giro** (que fornece a direção e a intensidade da aceleração durante o giro da aeronave, mostrado na figura).



Fonte elaborada pelos compiladores.

Atualmente, para determinar o movimento de rotação de uma plataforma, os giroscópios mecânicos foram substituídos pelos giroscópios ópticos, baseados na **interferência** de ondas de luz, e pelos giroscópios piezelétricos de quartzo. Nesses últimos, os braços de um diapásio de quartzo, com forma de “H”, são forçados a vibrar através da aplicação de um potencial elétrico oscilante na frequência de ressonância da peça. Quando existe um movimento de rotação ao redor do eixo do diapásio com frequência Ω , a **força de Coriolis** perturba a oscilação ressonante, causando uma segunda oscilação perpendicular dos braços. O sinal piezelétrico, associado a esse movimento, é detectado nos braços inferiores do diapásio e permite determinar Ω .

1.2.4 Determinação experimental do momento de inércia de um disco (Roda de Maxwell)

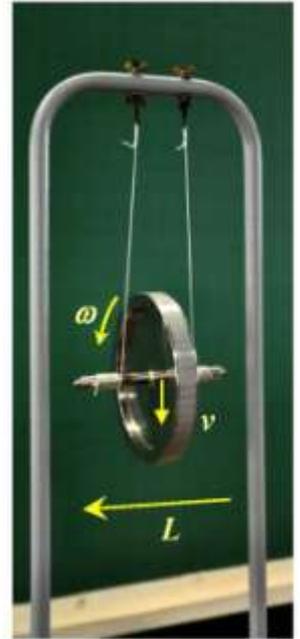
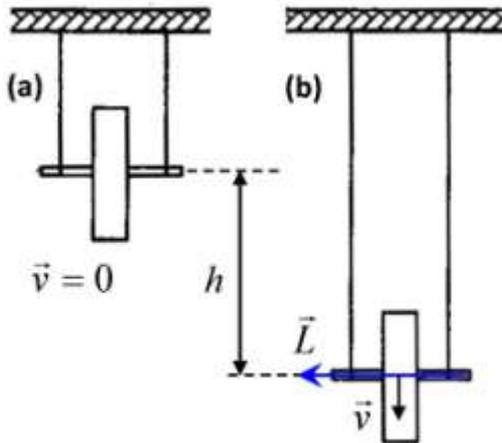
Nesta prática, o momento de inércia de uma peça cilíndrica complexa será medido experimentalmente utilizando o dispositivo conhecido como roda de Maxwell. O sistema, mostrado na figura 1.2, consta de um disco de raio R , sustentado por um eixo cilíndrico de raio r , tendo o conjunto massa m e momento de inércia I . O sistema é suspenso por dois fios que permitem o eixo rodar sobre eles sem deslizar. Inicialmente, escolhe-se uma posição a uma altura h , de onde a roda será solta, partindo do repouso. Subsequentemente, a roda ganhará velocidades de translação do centro de massa v e de rotação ω , à medida que desce rodando pelos fios. O movimento de descida da roda ocorre com aceleração constante e pode ser analisado considerando a conservação da energia mecânica total. No estado inicial a , a energia total é puramente potencial gravitacional.

$$E_a = mgh. \quad (10)$$

Em uma posição arbitrária b , durante a descida, o sistema possui energia cinética de translação e de rotação. Para simplificar, podemos considerar que a referência de energia potencial se encontra na altura do ponto b , resultando uma energia total

$$E_b = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad . \quad (11)$$

Figura 1.2 - Roda de Maxwell. (a) Estado inicial em repouso. (b) Estado para um tempo t_b de descida arbitrária.



Fonte elaborada pelos compiladores.

Se o eixo da roda gira sem escorregar sobre os fios de suspensão, então, as velocidades de translação e de rotação estão vinculadas pela condição de rodagem:

$$\omega = \frac{v}{r} \quad . \quad (12)$$

Colocando essa condição na energia E_b e, usando a conservação da energia para vincular com (10), resulta na condição

$$g h = \frac{v^2}{2} \left[1 + \frac{I}{m r^2} \right] \quad . \quad (13)$$

Nessa equação, a única incógnita de tipo dinâmico é a velocidade v . Podemos determinar esse parâmetro utilizando as equações para posição e velocidade do movimento uniformemente acelerado

$$h = \frac{a}{2} t_b^2 \quad \text{e} \quad v_b = a t_b, \quad (14)$$

no qual a é a aceleração do centro de massa e t_b é o tempo gasto para cair uma distância h . Combinando as equações (14), obtemos a velocidade do centro de massa

$$v = \frac{2h}{t_b}. \quad (15)$$

Substituindo essa equação em (13) encontramos o valor do momento de inércia da roda

$$I = \left(\frac{g t_b^2}{2 h} - 1 \right) m r^2. \quad (16)$$

Nessa expressão, o momento de inércia é função da altura do tempo de descida t_b , da distância h , do raio de giro sobre o barbante e da massa da roda.

Figura 1.3 - Choque rotacional entre dois discos girantes: (a) estado inicial, (b) estado final, após a colisão.

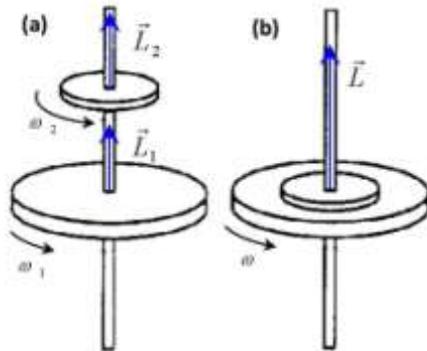
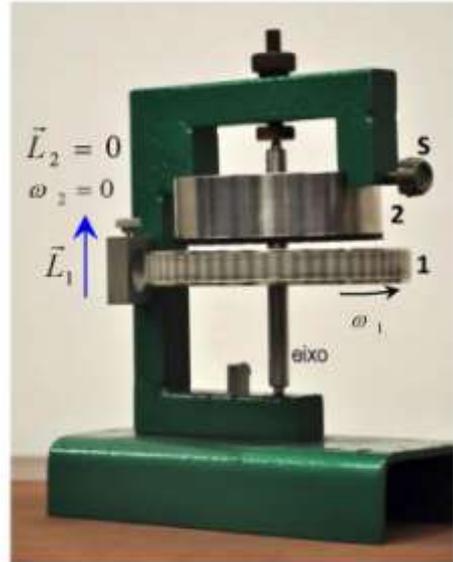


Figura 1.4 - Montagem experimental para analisar a colisão rotacional de duas peças cilíndricas.



Fonte elaborada pelos compiladores.

1.2.5 Choques rotacionais

Duas peças cilíndricas, com momentos de inércia I_1 e I_2 , giram com velocidades angulares ω_1 e ω_2 em torno do mesmo eixo de rotação, sem atrito, como indicado na figura 1.3.a. Em certo instante, a peça 2 cai sobre a peça 1. Devido ao atrito entre as superfícies das duas peças, o conjunto passa a girar a uma velocidade angular comum ω , como mostrado na figura 1.3.b. Considerando que as duas peças formam um sistema isolado de torques externos, o

momentum angular total é constante. Logo, podemos escrever a equação de conservação do momentum angular na forma

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega \quad . \quad (17)$$

Então, a velocidade angular final adquirida pelo conjunto será

$$\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2} \quad . \quad (18)$$

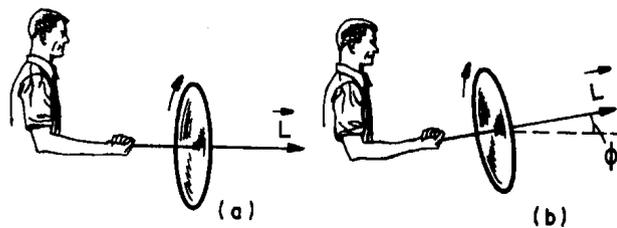
1.3 Exemplos de conservação do momentum angular

1.3.1 Roda de bicicleta

Um estudante fica sentado sobre um banco que pode girar livremente em torno do eixo vertical. Na mão, segura uma roda de bicicleta, cujo eixo é inicialmente mantido na horizontal, como mostrado na figura 1.5.a. Definimos, como sistema, o conjunto formado pelo banco giratório, estudante e a roda de bicicleta. Pode-se considerar que esse sistema está isolado de torques externos atuantes na direção vertical e, portanto, a componente vertical do momentum angular total do sistema se conserva. A roda gira em torno de seu eixo com velocidade angular $\vec{\omega}$, mas o estudante e a plataforma estão em repouso. O momentum angular inicial total do sistema, na direção vertical, é nulo. Em seguida, o estudante inclina o eixo de rotação da roda a um ângulo ϕ , em relação à horizontal, como mostrado na figura 1.5.b. Portanto, agora existe uma

componente de momentum angular na direção vertical, devido à rotação da roda. O momentum angular do sistema é constante na direção vertical, e nesse caso igual a zero; deve aparecer outra componente de momento que anule a componente vertical devido à roda. Portanto, o banco deve começar a girar junto com a pessoa.

Figura 1.5 - Exemplo de conservação do momentum angular na direção vertical.



Fonte elaborada pelos compiladores.

Questão: Considerando o sentido de giro da roda, mostrado na figura 1.5.a, em que sentido deveria rodar a pessoa com o banco na figura 1.5.b?

Questão: Existem forças externas atuando sobre o sistema (pessoa, banco e roda)? Por que se considera que não há torques atuando na direção vertical? Há torque em outras direções?

1.3.2 Momento de inércia e velocidade angular

Um estudante fica sentado sobre um banco que pode girar livremente em torno do eixo vertical. Ele segura dois pesos de massas iguais, m , um em cada mão. Inicialmente, o estudante, com os braços fechados sobre o torso, é colocado a girar em torno do

eixo vertical com uma velocidade angular ω_1 . O conjunto banco, estudante e pesos forma um sistema com momento de inércia em relação ao eixo de rotação dado por I_1 . De acordo com a discussão da seção anterior, o momentum angular na direção vertical é constante. Em seguida, o estudante estende os braços alterando o momento de inércia do conjunto para um novo valor I_2 , que será maior que I_1 . Experimentalmente, observa-se que o conjunto agora roda com uma nova velocidade angular ω_2 . Como o momentum angular total na vertical deve se conservar, devemos ter a condição

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \quad .$$

Questão: A pessoa roda mais rápido ou mais devagar com os braços estendidos?

1.4 Experimental

A figura 1.2 mostra a montagem da roda de Maxwell para determinar o momento de inércia da peça suspensa, usando a equação (16). O tempo de descida t_b , desde a posição em repouso, até uma certa altura h , será registrado com um cronômetro.

Na figura 1.4 é mostrado o sistema para realizar colisões rotacionais. A peça, identificada como 1, é a mesma utilizada no experimento da roda de Maxwell. A peça pode girar ao redor do eixo vertical e é colocada em rotação, aplicando um torque com um barbante enrolado no extremo superior do eixo. A peça, identificada como 2, na parte superior, está em repouso e é segurada mediante a porca S. Essa peça é um anel de aço com a base inferior coberta de

uma camada de borracha rugosa. Afrouxando a porca S, a peça 2 colide com 1. As velocidades de rotação inicial e final são medidas com um tacômetro com sensor óptico, que conta as franjas na lateral da peça 1.

1.5 Análises dos resultados

As videoaulas a serem utilizadas nas análises a serem realizadas podem ser encontradas no seguinte link:

<https://www.youtube.com/playlist?list=PLDre2jYH3njjMv8cYlDXmlZCO1qB5h9CU>. Procure pelas videoaulas com os títulos mencionados abaixo.

1.5.1 Determinação experimental do momento de inércia de um disco (Roda de Maxwell)

Videoaula correspondente: Conservação da energia mecânica no movimento de corpos rígidos.

- a) Na videoaula são apresentadas as características geométricas e massas das partes que constituem um disco maciço com eixo central usado no experimento da roda de Maxwell. Baseado nos valores fornecidos e usando as expressões de momento de inércia pertinentes, calcule o momento de inércia do disco. Estime a incerteza nesta determinação baseando-se na precisão dos instrumentos utilizados.

- b) Na videoaula o experimento da roda de Maxwell é realizado com três lançamentos do disco. A altura h entre os estados (a) e (b) da figura 1.2 é fornecida e a medida dos tempos de descida t_b é apresentada. Baseado nas medições do vídeo e

nas expressões matemáticas pertinentes, equação (16), determine o momento de inércia do disco.

- c) Estime a incerteza na medida do momento de inércia em cada lançamento baseado na precisão dos instrumentos utilizados. Faça também a estimativa da incerteza se baseando no desvio padrão das três medidas apresentadas. De acordo com os resultados obtidos use os critérios pertinentes e expresse a medida do momento de inércia com a incerteza experimental correspondente.
- d) Compare e discuta os resultados dos itens (b) e (c).

1.5.2 Choques rotacionais

Videoaula correspondente: Conservação do momentum angular no movimento de corpos rígidos.

- a) Na videoaula é apresentado um experimento de choque rotacional entre um disco maciço com eixo central (mesmo disco utilizado no experimento da roda de Maxwell e referido no vídeo como peça 1) e um cilindro oco (referido no disco como peça 2). Baseado nas características geométricas e massa do cilindro oco (peça 2) e nas expressões matemática pertinentes, determine o momento de inércia desta peça com a respectiva incerteza experimental.
- b) Antes de apresentar o experimento de choque rotacional na videoaula é mostrado uma medida quantitativa da diminuição da velocidade angular de rotação da peça 1 devido a torques

dissipativos. Baseado nesses resultados e usando o momento de inércia da peça 1 obtido no item 1.5.1 Faça um gráfico da energia de rotação da roda como função do tempo e a partir desse gráfico determine a energia média perdida pelo sistema em um ciclo de oscilação. Como esse comportamento afeta o experimento de colisão? É válido aplicar as equações (17) ou (18) nessas condições?

- c) Na videoaula são realizados 3 choques rotacionais soltando-se a peça 2 sobre a peça 1. Em cada um deles determine a velocidade angular imediatamente antes e depois da colisão.
- d) Assumindo a conservação do momentum angular durante a colisão, determine o momento de inércia I_1 da peça 1, utilizando a equação (18). Neste caso a incerteza experimental pode ser obtida pelo desvio padrão dos valores de I_1 nas três medidas (justifique). Faça essa estimativa.
- e) Calcule as energias cinéticas rotacionais, antes e depois da colisão, e sua variação relativa. Verifique se há conservação ou não da energia cinética e explique por quê.
- f) Compare o valor obtido para o momento de inércia da peça 1 com aqueles obtidos a partir das características geométrica e do experimento com a roda de Maxwell. Discuta a confiabilidade de cada método apontando as vantagens e desvantagens de cada um.
- g)

1.5.3 Demonstrações de conservação do momentum angular

Videoaula correspondente: Conservação do momentum angular no movimento de corpos rígidos.

- a) Baseado nos links fornecidos na videoaula, escreva uma resenha sobre como muitos dos saltos acrobáticos realizados por atletas de alto desempenho podem ser entendidos utilizando a conservação do momentum angular.
- b) Explique a demonstração do momento de inércia variável (banquinho giratório) apresentado na videoaula.
- c) Na videoaula é apresentado a famosa demonstração do banquinho giratório com a roda de bicicleta. Explique o que acontece. Nas duas situações apresentadas como A e B indique o sentido de rotação da roda de bicicleta, justificando a sua resposta.

1.5.4 Movimento de precessão de um giroscópio.

Video aula correspondente: Segunda Lei de Newton para rotação de corpos rígidos.

- a) Na videoaula é apresentado um experimento onde é necessário estimar o momento de inércia de um giroscópio para ser usado na estimativa de sua frequência de precessão. São apresentadas as dimensões das diferentes partes que constituem o giroscópio e a densidade do aço do qual ele é feito. Baseado nesses dados, estime a massa de cada parte do giroscópio e avalie o seu momento de inércia.

- b) Utilizando a expressão apresentada no vídeo, o momento de inércia estimado no item a), a frequência de rotação do volante mostrada nos experimentos e as massas e dimensões apresentadas, estime a frequência de precessão esperada para o giroscópio. São apresentadas quatro medições e, portanto, você deve realizar esse cálculo para cada uma delas independentemente.
- c) Baseados nas medições de tempo apresentadas no vídeo determine diretamente a frequência de precessão do giroscópio.
- d) Compare os resultados obtidos nos itens b) e c) e discuta a origem das incertezas experimentais em cada um deles.

Bibliografia

RESNICK, R.; HALLIDAY, D. **Física**. Rio de Janeiro: Livro Técnico S. A., 1973. v. 1.

TIPLER, P. A. **Física**. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois, 1978. v. 1

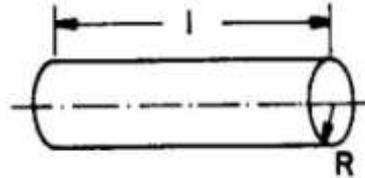
BONAGAMBA, T. J.; SANTONI, E.; LASSO, P. R. O.; BRETAS, C. B.; GENTIL, A.. Construção de um conjunto experimental destinado a execução de práticas de rotação e oscilação de corpos rígidos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 17, n. 2, p. 133-139, jun. 1995.

Apêndice 1: Momentos de inércia de corpos rígidos homogêneos

Eixo de rotação passando pelo centro de massa do corpo.

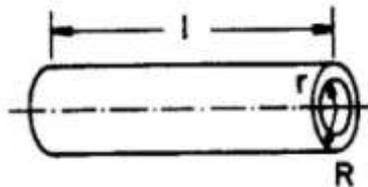
- Cilindro maciço, em relação ao eixo longitudinal:

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$



- Cilindro oco, em relação ao eixo longitudinal:

$$I = \frac{1}{2} M(R^2 + r^2)$$



No caso de momento de inércia para rotação ao redor de um eixo paralelo aos anteriores, mas que não passa pelo centro de massa do corpo, deve ser adicionado um termo MD^2 às expressões acima, em que D é a distância ente os eixos de rotação (teorema de Steiner).

Apêndice 2 Propagação de incertezas

Seja z uma grandeza física que depende de outras grandezas medidas com incerteza: $y \pm \Delta y$, $x \pm \Delta x$, ..., relacionada através da função $z = f(x, y, \dots)$. A incerteza Δz propagada para a grandeza z é:

$$\Delta z = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \dots$$

Aplicando essa equação para funções simples, obtêm-se os resultados de $z \pm \Delta z$ mostrados na tabela embaixo.

$z = f(x, y, \dots)$		Δz
Soma	$z = x + y$	$\Delta x + \Delta y$
Subtração	$z = x - y$	$\Delta x + \Delta y$
Produto	$z = x \cdot y$	$x \Delta y + y \Delta x$
Produto por uma constante a	$z = a \cdot x$	$a \Delta x$
Potência	$z = x^n$	$n x^{n-1} \Delta x$
Divisão	$z = \frac{x}{y}$	$\frac{x \Delta y + y \Delta x}{y^2}$
Cosseno	$z = \cos(x)$	$\sin(x) \Delta x$
Seno	$z = \sin(x)$	$\cos(x) \Delta x$
Logaritmo de base c $e = 2.7182\dots$	$z = \log_c(x)$	$\frac{\log_c e}{x} \Delta x$
Exponencial	$z = c^x$	$c^x \ln(c) \Delta x$

Apêndice 3 Expressões para o método de mínimos quadrados

Seja um conjunto de N pares de dados experimentais ($x_i; y_i$), no qual os valores x_i são atribuídos à variável independente e y_i à variável dependente. Supondo que a relação $y(x)$ seja considerada linear com $y = ax + b$, o método de mínimos quadrados fornece os valores para a inclinação a e o termo linear b para a reta que melhor se aproxima dos dados experimentais. As expressões dos coeficientes da reta e suas respectivas incertezas são:

$$a = \frac{N(\sum x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)}{N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\Delta a = \sqrt{\frac{N}{N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2}} \cdot \Delta y = \frac{\Delta y}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$$

$$b = \frac{(\sum y_i)(\sum x_i^2) - (\sum x_i y_i)(\sum x_i)}{N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} = \bar{y} - a\bar{x}$$

$$\Delta b = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2}} \cdot \Delta y = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N \sum (x_i - \bar{x})^2}} \cdot \Delta y$$

sendo Δy , o desvio padrão do ajuste:

$$\Delta y = \sqrt{\frac{\sum (ax_i + b - y_i)^2}{(N - 2)}}$$

e as quantidades \bar{x} e \bar{y} , as respectivas médias dos conjuntos de dados x_i e y_i :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{N}$$