Cadeias de Markov e Programação Dinâmica com Incerteza

Mauro Rodrigues (USP)

2020

Propriedade de Markov

- Para todo $k \geq 1$ e para todo t, temos:

$$Prob(x_{t+1} | x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_{t-k}) = Prob(x_{t+1} | x_t)$$

- Única informação relevante para definir a distribuição condicional no futuro é a realização de x hoje
- Propriedade Recursiva

Cadeia de Markov

- n possíveis estados (valores que a variável x pode assumir): $e_1, e_2, \cdots, e_n$

- P: Matriz de transição. Informa as probabilidades condicionais:
  - Dado que o estado hoje é e_i qual a probabilidade de amanhã transitar para e_j
  - $P_{ij} = Prob(x_{t+1} = e_j | x_t = e_i)$: elemento da linha i e coluna j da matriz P
  - A soma dos elementos de cada linha é igual a 1:

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1$$

Exemplo

- Há dois possíveis estados: $x_t \in \{e_1, e_2\}$
- Matriz de transição é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} Prob(x_{t+1} = e_1 | x_t = e_1) = 0.7 \\ Prob(x_{t+1} = e_2 | x_t = e_1) = 0.3 \\ Prob(x_{t+1} = e_1 | x_t = e_2) = 0.4 \\ Prob(x_{t+1} = e_2 | x_t = e_2) = 0.6 \end{aligned}$$

Distribuição Não Condicional

- Distribuição não condicional em t:

$$\pi_{ti} = Prob(x_t = e_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_{ti} = 1$$

$$\Pi_t = \begin{bmatrix} \pi_{t1} \\ \pi_{t2} \\ \vdots \\ \pi_{tn} \end{bmatrix}$$

- Dada uma distribuição não condicional inicial Π_0, é possível obter toda a sequência de distribuições não condicionais ao longo do tempo:

$$\begin{aligned} \Pi_1' &= \Pi_0' P \\ \Pi_2' &= \Pi_1' P = \Pi_0' P^2 \\ &\vdots \\ \Pi_k' &= \Pi_{k-1}' P = \Pi_0' P^k \end{aligned}$$

Exemplo

- Dois estados: $x_t \in \{e_1, e_2\}$

$$\begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{01} & \pi_{02} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

$$\pi_{11} = Prob(x_1 = e_1) = \pi_{01} P_{11} + \pi_{02} P_{21}$$
$$\pi_{12} = Prob(x_1 = e_2) = \pi_{01} P_{12} + \pi_{02} P_{22}$$

- Podemos obter as distribuições condicionais para mais de um período:

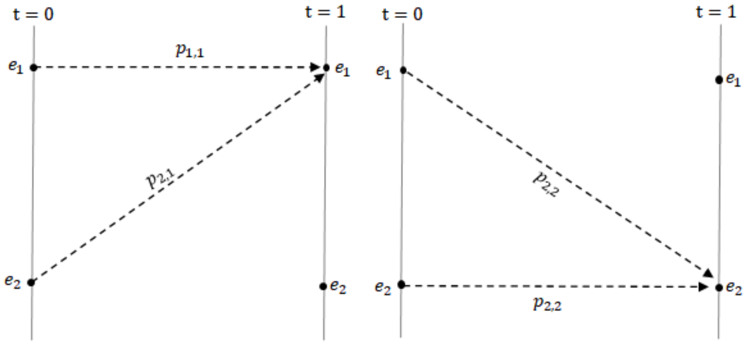
$$P_{ij}^2 = Prob(x_{t+2} = e_j | x_t = e_i) =$$
$$\sum_{h=1}^{\infty} Prob(x_{t+2} = e_j | x_{t+1} = e_h) \cdot Prob(x_{t+1} = e_h | x_t = e_i)$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}P_{11} + P_{12}P_{21} & P_{11}P_{12} + P_{12}P_{22} \\ P_{21}P_{11} + P_{22}P_{21} & P_{21}P_{12} + P_{22}P_{22} \end{bmatrix}$$

$$Prob(x_{t+2} = e_2 | x_t = e_1) = P_{12}^2 = P_{11}P_{12} + P_{12}P_{22}$$

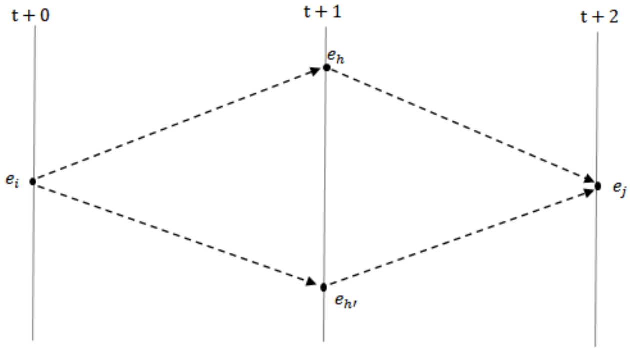
Exemplo

Figure: Mudança de estado



Exemplo

Figure: Mudança de estado em dois períodos



Distribuição Invariante

- A distribuição invariante é dada por $\Pi_{t+1} = \Pi_t$. Definida de forma implicita por:

$$\begin{aligned} \Pi_{t+1} = \Pi_t = \Pi &\Rightarrow \\ \Pi'_{t+1} = \Pi'_t P &\Rightarrow \\ \Pi'(\mathrm{I} - P) = \mathbf{0} &\Rightarrow \\ (\mathrm{I} - P')\Pi = \mathbf{0} & \end{aligned}$$

- Exemplo: Seja $p \in (0,1)$ e $P = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix}$
- A distribuição invariante é dada por:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-p & -(1-p) \\ -(1-p) & (1-p) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}$$

Exemplo 1

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}$$

- Determinando a distribuição invariante: $(\mathrm{I} - P')\Pi = \mathbf{0}$

$$(\mathrm{I} - P') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.5 & 0.9 \\ 0 & 0.5 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0 \\ -0.3 & 0.5 & -0.9 \\ 0 & -0.5 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$(\mathrm{I} - P')\Pi = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0 \\ -0.3 & 0.5 & -0.9 \\ 0 & -0.5 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} 0.3\pi_1 &= 0 \\ -0.3\pi_1 + 0.5\pi_2 - 0.9\pi_3 &= 0 \\ -0.5\pi_2 + 0.9\pi_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \pi_1 &= 0 \\ 5\pi_2 &= 9\pi_3 \\ \pi_2 + \pi_3 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Pi = \begin{bmatrix} 0 \\ 9/14 \\ 5/14 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathrm{I} - P') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & -0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\mathrm{I} - P')\Pi = \begin{bmatrix} 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & -0.3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} -0.2\pi_2 &= 0 \\ 0.5\pi_2 &= 0 \\ -0.3\pi_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \pi_2 &= 0 \\ \pi_1 + \pi_3 &= 1 \end{aligned}$$

- A distribuição invariante (não única) é dada por: $\Pi' = \begin{bmatrix} p & 0 & 1-p \end{bmatrix}$, $\forall p \in [0, 1]$

Modelo neoclássico de crescimento (com incerteza)

- Modelo RBC padrão: Há incerteza quanto ao estado da tecnologia
- Economia sujeita a choques tecnológicos exógenos
- $y_t = z_t F(k_t, n_t)$
- $z_t \in Z$: Segue um processo de Markov com matriz de transição P
- $Z = \{z_1, z_2, ..., z_n\}$: Possíveis realizações do choque tecnológico
- Restrições de recursos:

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t \leq z_t F(k_t, n_t)$$

- Em dado instante t, o choque é conhecido; porém não são conhecidos os choques futuros
- Realização de z_t informa sobre a distribuição de choques futuros (Processo de Markov)

Modelo neoclássico de crescimento (com incerteza)

- É a única informação necessária para inferir a distribuição futura $\rightarrow$ Estrutura recursiva
- Preferências
$$\mathbb{E}_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1 - n_t) \right\}$$
- $\mathbb{E}_0$ é o operador esperança, condicional na informação disponível em $t = 0$ (i.e. realização do choque em $t = 0$, z_0)

Forma sequencial (Planejador Central)

$$\max_{\{c_t, n_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \mathbb{E}_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1 - n_t) \right\}$$

$$s.a: c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t \leq z_t F(k_t, n_t) \; \forall t, z_t \in Z$$

$k_0 > 0$, z_0 dados

Forma recursiva

- Variáveis de estado: k, z

$$V(k,z) = \max_{\{c,n,k'\}} \left\{u(c,1-n) + \beta \mathbb{E}\left[V(k',z')|z)\right]\right\}$$
$$s.a: c + k' - (1-\delta)k \leq zF(k,n)$$

$$V(k,z) = \max_{\{c,n,k'\}} \left\{u(c,1-n) + \beta \sum_{z' \in Z} V(k',z')f(z'|z)\right\}$$
$$s.a: c + k' - (1-\delta)k \leq zF(k,n)$$

- Em que $f(z'|z)$ é a função densidade de probabilidade condicional (obtida da matriz de transição). Assim, $V(k,z)$ equivale a

$$\max_{\{c,n,k'\}} \left\{u(zF(k,n) - k' + (1-\delta)k, 1-n) + \beta \sum_{z' \in Z} V(k',z')f(z'|z)\right\}$$

Forma recursiva

$$
\begin{aligned}
n: &\qquad u_c z F_n - u_l = 0 \\
k': &\qquad -u_c + \beta \sum_{z' \in Z} V_k(k', z') f(z'|z) = 0 \\
Envelope: &\qquad V_k(k, z) = u_c(zF_k + 1 - \delta) \\
Envelope: &\qquad V_k(k', z') = u_{c'}(z' F_{k'} + 1 - \delta)
\end{aligned}
$$

Forma recursiva

- Equação de Euler

$$u_c = \beta \sum u_{c'}(z' F_{k'} + 1 - \delta) f(z'|z)$$

$$u_c = \beta \mathbb{E}\{u_{c'}(z' F_{k'} + 1 - \delta)|z)\}$$

$$u_c = \beta \mathbb{E}_t\{u_{c,t+1}(z_{t+1} F_{k,t+1} + 1 - \delta)\}$$

- $\mathbb{E}_t(\cdot)$ Esperança condicional na informação em t (choque z_t)

Exemplo numérico

- $z_t \in \{z_l, z_h\}$: Dois estados
- Seja $p \in (0,1)$ e a matriz de transição dada por $P = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix}$
- Sem utilidade do lazer
  - Cobb Douglas: $F(k,n) = k^{\alpha} n^{1-\alpha}$

$$V(k,z) = \max_{\{c,k'\}} \left\{ u(c) + \beta \mathbb{E}\left[V(k',z') | z) \right] \right\}$$
$$s.a : c + k' - (1-\delta)k \leq zk^{\alpha}$$

- Defina

$$V_h(k) = V(k; z = z_h)$$
$$V_l(k) = V(k; z = z_l)$$

Exemplo numérico

$$V_l(k) = \max_{\{c,k'\}} \left\{ u(c) + \beta \left[pV_l(k') + (1-p)V_h(k') \right] \right\}$$
$$s.a: c + k' - (1-\delta)k \leq z_l k^{\alpha}$$

$$V_h(k) = \max_{\{c,k'\}} \left\{ u(c) + \beta \left[(1-p)V_l(k') + pV_h(k') \right] \right\}$$
$$s.a: c + k' - (1-\delta)k \leq z_h k^{\alpha}$$

Exemplo numérico

1. Formar grid para capital: $k_{grid} = \left\{\underline{k}, \underline{k}+\varepsilon, \underline{k}+2\varepsilon, ..., \overline{k}\right\} = K$

2. Construir matrizes de utilidade instantânea (uma para cada z). Para cada combinação de $(k,\ k') \in K \times K$

$$c_l(k,k') = z_l k^{\alpha} - k' + (1-\delta)k$$

$$u(c_l(k,k')) = \begin{cases} \ln c_l(k,k'), & \text{se } c_l(k,k') > 0 \\ -\infty, & \text{se } c_l(k,k') \leq 0 \end{cases}$$

$$c_h(k,k') = z_h k^{\alpha} - k' + (1-\delta)k$$

$$u(c_h(k,k')) = \begin{cases} \ln c_h(k,k'), & \text{se } c_h(k,k') > 0 \\ -\infty, & \text{se } c_h(k,k') \leq 0 \end{cases}$$

Exemplo numérico

3. Chutar $V_l^0(k)$ e $V_h^0(k)$

4. Computar

$$\overline{W}_l(k,k') = u(c_l(k,k')) + \beta[pV_l^0(k') + (1-p)V_h^0(k')]$$

$$\overline{W}_h(k,k') = u(c_h(k,k')) + \beta[(1-p)V_l^0(k') + pV_h^0(k')]$$

5. Maximizar e atualizar chute

$$V_l^1(k) = \max_{k'} \overline{W}_l(k,k')$$

$$V_h^1(k) = \max_{k'} \overline{W}_h(k,k')$$

Exemplo numérico

6. Checar convergência. Seja:

$$V^1(k,z) = \begin{cases} V_l^1(k), \text{se } z = z_l \\ V_h^1(k), \text{se } z = z_h \end{cases}$$

$$V^0(k,z) = \begin{cases} V_l^0(k), \text{se } z = z_l \\ V_h^0(k), \text{se } z = z_h \end{cases}$$

7. Se $d[V^1(k,z) - V^0(k,z)] \leq \lambda$, em que λ é um número muito pequeno, parar. Caso contrário, repetir 4, 5 e 6, com chute atualizado

Regra de decisão

$$k' = \phi_l(k) = \phi(k, z = z_l)$$

$$k' = \phi_h(k) = \phi(k, z = z_h)$$

Figure: Lei de movimento