

## **PMR3409 - Controle II**

### **Apostila EXPERIÊNCIA 1**

#### **Aquisição de sinais e algoritmo FFT**

#### **INTRODUÇÃO**

A apostila referente a Experiência 1 está dividida em duas partes. A parte I apresenta um resumo sobre sistemas de aquisição de dados e sua utilização em sistemas de controle, na parte II apresenta-se um resumo teórico sobre Série e Transformada de Fourier.

O arquivo TutorialFFT.html contém um tutorial sobre cálculo de espectros de sinais discretos utilizando o algoritmo FFT (Transformada Rápida de Fourier) do MATLAB representado pela função `fft()`.

# PMR 3409 Controle II

## PARTE I - Sistemas de Aquisição de Dados e Controle Digital

### 1 Introdução

Os sistemas de aquisição de dados e controle digital usualmente possuem os seguintes elementos: entradas analógicas, saídas analógicas, entradas digitais, saídas digitais, e contadores/timers.

### 2 Aquisição de dados - entradas analógicas

Os sistemas de controle de tempo discreto e de processamento digital de sinais requerem que sinais analógicos, por exemplo  $x(t)$ , sejam amostrados de uma maneira uniforme no domínio do tempo:  $x(kT_a)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , onde  $T_a$  é uma constante denominada intervalo de amostragem.  $f_a = 1/T_a$  é denominada frequência de amostragem (Muitas vezes na descrição dos sistemas de aquisição de dados se utiliza o termo taxa de amostragem cuja unidade é  $S/s$ , i.e., *Samples per second*).

Dentro do contexto tecnológico, a utilização de conversores A/D não permite que se obtenha o valor  $x(kT_a)$  mas sim de um valor aproximado aqui representado por  $\hat{x}(kT_a)$  que depende da resolução e do intervalo de quantização do sistema de aquisição.

Na prática a amostragem é realizada através de um circuito eletrônico denominado conversor analógico digital que transforma um valor de tensão analógica em um valor correspondente representado por um número inteiro. Dessa forma, um valor do domínio contínuo passa a ser aproximado por um número inteiro  $D(x(kT_a))$ .

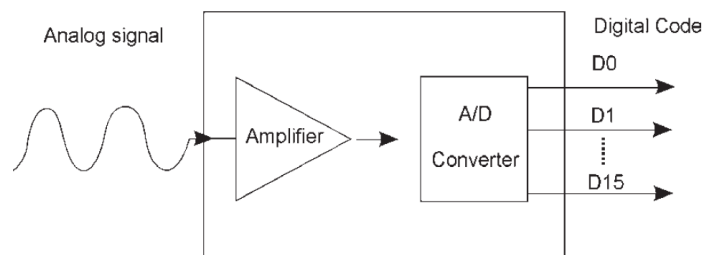


Figura 1: Conversão A/D.

Usualmente o software do sistema de aquisição de dados converte o valor  $D(x(kT_a))$  em um valor em ponto flutuante  $\hat{x}(kT_a)$ . A precisão da representação dada por  $\hat{x}(kT_a)$  depende principalmente de dois fatores:

1. resolução: número de bits *nbits* utilizado na representação,
2. intervalo de quantização: faixa de tensão que o conversor A/D pode operar.

Como será observado claramente na parte experimental, quanto maior as frequências das componentes de um sinal maior deve ser a frequência de amostragem  $f_a$  utilizada para que a informação contida no sinal analógico não seja suprimida.

A figura 2 ilustra um mesmo sinal amostrado com frequências distintas.

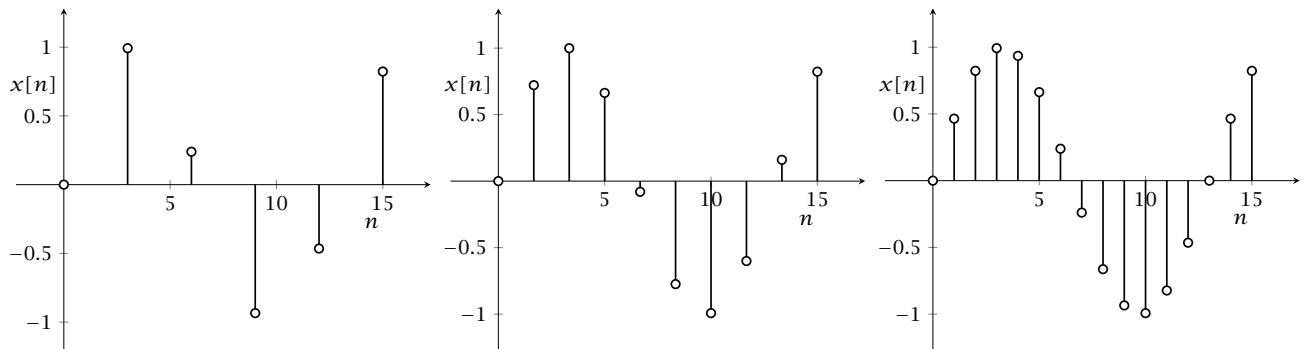


Figura 2: Senoide  $x(t)$  amostrada com diferentes frequências de amostragem  $f_a$

O número inteiro  $D(x(kT_a))$  é uma representação aproximada onde possivelmente existem erros de truncamento ou arredondamento. Quanto maior a resolução, maior é o número de divisões que a faixa medida é dividida e desta maneira, menor é a variação de tensão que pode ser detectada. A figura 3 apresenta uma onda senoidal e sua representação digital correspondente obtida por um conversor A/D de 3 bits. Um conversor de 3 bits divide a faixa analógica em  $2^3$ , ou 8 divisões. Cada divisão é representada pelo código binário entre 000 e 111. Claramente, a representação digital não é a melhor representação do sinal analógico original, pois parte da informação é perdida durante a conversão. Aumentando-se a resolução para 16 bits, faz com que o número de códigos gerados a partir do conversor A/D aumente de 8 para 65.536 e desta maneira é possível obter uma representação digital do sinal analógico de uma maneira mais precisa.

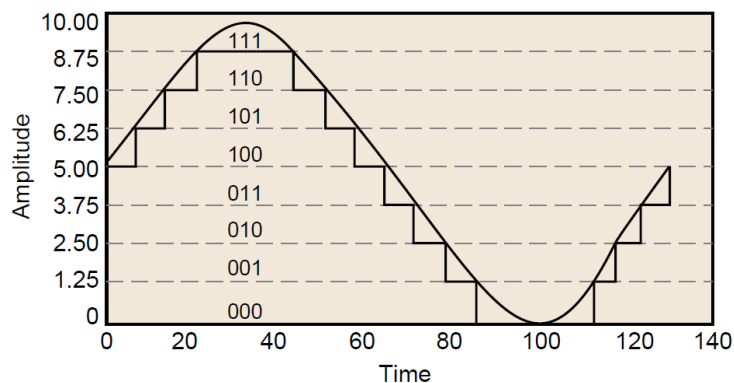


Figura 3: Onda senoidal representada com três bits.

Atualmente, muito embora ainda existam sistemas de conversão A/D de apenas 8 bits o baixo custo dos sistemas eletrônicos, permite a utilização de um número muito maior de bits. A maioria dos sistemas utiliza 10, 12, 14 ou 16 bits mas algumas aplicações requerem  $nbits$  maior. Por exemplo, o circuito integrado PCM1802 da Texas Instruments utiliza  $nbits = 24$  e  $f_a = 96kHz$  para amostrar sinais de áudio.

O intervalo de quantização se refere à faixa que varia entre os níveis de tensão mínimo e máximo que o conversor A/D pode amostrar. Placas de aquisição oferecem intervalos selecionáveis de maneira que a placa seja configurada para manusear diferentes níveis de tensão.

Com esta flexibilidade, pode-se adequar a faixa do sinal à faixa do conversor A/D para melhor vantagem da resolução disponível, medindo com precisão o sinal desejado. A frequência de amostragem, resolução e ganho disponíveis numa placa de aquisição determinam qual a menor variação de tensão que pode ser detectada. Esta variação representa o bit menos significativo (LSB) do valor digital do sinal e é normalmente chamado de largura do código.

A largura do código ideal é encontrada tomando-se a faixa de tensão multiplicada pelo ganho e dividindo-a pelo número dois elevado à potência do número de bits da resolução do conversor AD. Por exemplo, a placa modelo AT-MIO-16X da National Instruments utiliza 16 bits e possui intervalos de quantização selecionáveis entre 0 a 10V e -10V a +10V, além de ganhos selecionáveis de 1, 2, 5, 10, 20, 50 a 100. Com uma tensão no intervalo de 0 a 10V e um ganho de 100, a largura ideal é dada por:

$$\frac{10}{100 \times 2^{16}} = 1.5\mu V \quad (1)$$

Portanto, a resolução teórica para 1 bit é dada pelo valor  $1.5\mu V$ .

### 3 Controle - saídas analógicas

Como observado na seção anterior o número inteiro obtido pelo conversor A/D é convertido em um valor em ponto flutuante equivalente. Internamente ao computador o algoritmo de controle é realizado com operações em ponto flutuante. A ação de controle calculada  $u(kT_a)$  deve ser transformada em um valor analógico  $u(t)$ . O valor de  $u(t)$  depende da resolução e do intervalo de quantização do conversor D/A.

As saídas analógicas possuem conversores D/A (Digital-Analógico) que transformam números inteiros em valores de tensão analógicos como ilustrado no diagrama esquemático da figura 4.

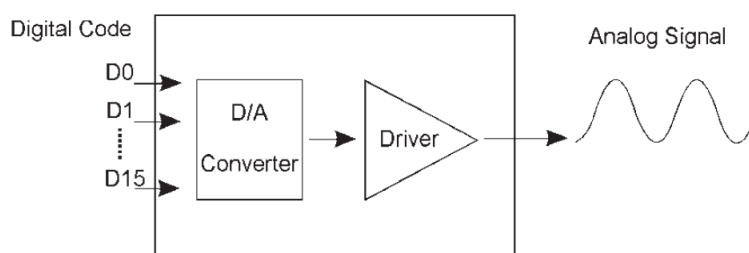


Figura 4: Conversão D/A.

A utilização de saídas analógicas é necessária quando se deseja gerar sinais para atuadores como é o caso da arquitetura de sistemas de controle discretos ilustrado na figura 5. Nessa figura o sinal  $y(t)$  é amostrado gerando  $y(k)$  que é utilizado no algoritmo de controle. O algoritmo de controle calcula o valor  $u(k)$  e o coloca na saída analógica cujo conversor D/A gera o sinal  $u(t)$  que então se torna a entrada do processo a ser controlado.

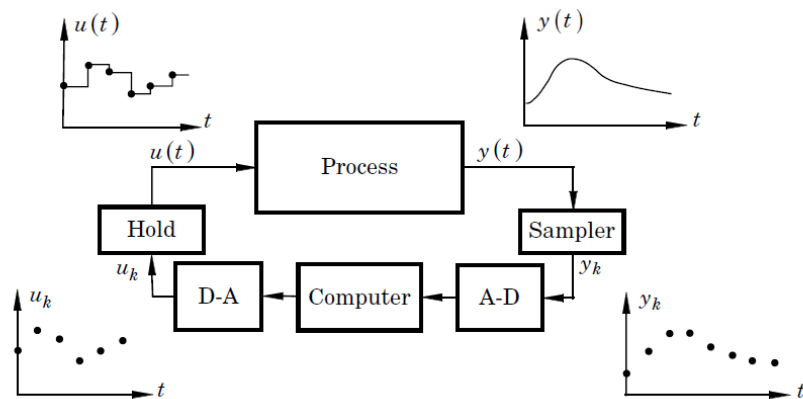


Figura 5: Controle de tempo discreto.

Deve-se notar que o sinal de saída do controlador  $u(t)$  é gerado através de um circuito eletrônico denominado segurador de ordem zero (zero order hold) que mantém constante o valor de  $u(t)$  durante um período de amostragem  $T_a$ .

## 4 Placas de aquisição

No laboratório existem dois modelos de placas de aquisição sendo utilizados ambos da National Instruments: PCI-6024E (barramento PCI) e PCIe-6321 (Veja figura 6 (barramento PCI express)).

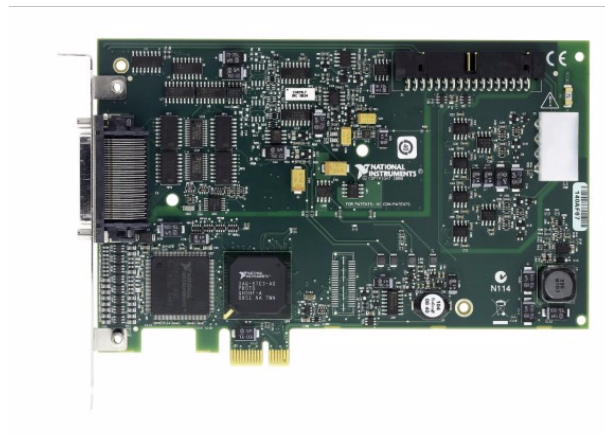


Figura 6: Placa de aquisição multifuncional PCIe-6321 da National Instruments.

Sob o ponto de vista dos experimentos que serão realizados as duas placas são equivalentes somente algumas características técnicas são diferentes mas isso não afetará os resultados experimentais.

A placa de aquisição de dados PCI-6024E possui os seguintes recursos:

- 16 canais de entradas analógicas (8 no modo diferencial),
- resolução de 12 bits,
- 2 canais de saídas analógicas,
- 8 pinos de E/S digital,,
- taxa de amostragem máxima  $250kS/s$  (na utilização de 1 canal),
- conector externo de 68 pinos.

A placa PCIe-6321 possui as mesmas especificações mas possui resolução de 16 bits.

Através de um conector de 68 pinos é possível ligar os recursos da placa de aquisição ao bloco de conectores externo denominado SCB-68 (Veja figura 7), que possui uma área para a inclusão de filtros e circuitos atenuadores além de bornes de fixação.



Figura 7: Bloco de conectores SCB-68.

## PARTE II TRANSFORMADA DE FOURIER

### 2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

#### 2.1 Série de Fourier

Qualquer função periódica no tempo, por exemplo, a função  $f(t)$  com período  $T_0$ , tal que  $f(t) = f(t+T_0)$ , como a apresentada na Figura 2.1, pode ser decomposta em uma série de *senos* e *cosenos* da seguinte forma:

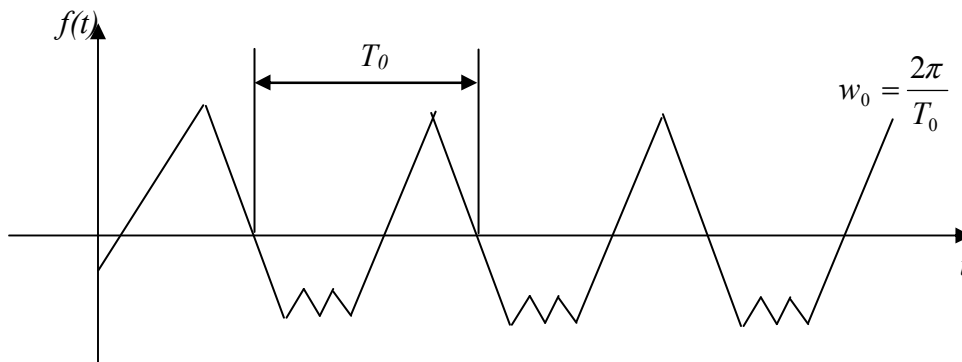
$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nw_0 t) + b_n \sin(nw_0 t)], \quad \dots(1)$$

onde  $w_0 = 2\pi/T_0$  é a chamada frequência fundamental. Os coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$  da Série de Fourier são calculados através das propriedades das funções ortogonais, como se segue:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) dt; \quad \dots(2)$$

$$a_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \cos(nw_0 t) dt; \quad \dots(3)$$

$$b_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \sin(nw_0 t) dt. \quad (4)$$



**Figura 2.1: Exemplo de uma função periódica no tempo.**

A prova matemática da representação em Série de Fourier pode ser vista em qualquer livro de processamento de sinais, tal qual Oppenheim (1997).

Uma alternativa para a equação (1) é a seguinte:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n), \quad (5)$$

onde  $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  é a magnitude da componente de frequência  $n\omega_0$  e  $\phi_n$  é a fase correspondente. Observa-se que esta série apresenta a mesma informação que a série da equação (1), pois as funções *seno* e *cosseno* são idênticas, a menos de uma diferença de fase. Neste caso o coeficiente  $A_n$  e a fase  $\phi_n$  representam o espectro de frequência da função  $f(t)$ . Portanto, a função temporal  $f(t)$  é unicamente definida por sua amplitude e fase.

A Série de Fourier pode ser ainda descrita usando-se uma representação complexa dos componentes da equação (1). As funções seno e cosseno podem ser representadas por funções exponenciais complexas da seguinte forma:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad (6)$$

e

$$\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}. \quad (7)$$

Substituindo estas expressões na equação (1) e rearranjando, resulta na Série de Fourier descrita em termos de exponenciais complexas, da seguinte forma:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}, \quad (8)$$

onde os coeficientes  $C_n$  são complexos e

$$a_n = C_n + C_{-n}; \quad (9)$$

$$b_n = j(C_n - C_{-n}). \quad (10)$$

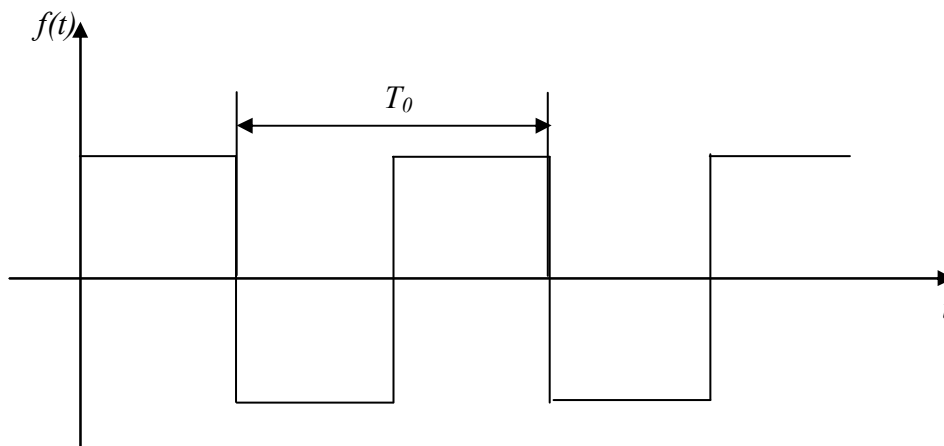
Os coeficientes  $C_n$  podem ser calculados através dos coeficientes  $a_n$  e  $b_n$ , da expansão em série da equação (1), bastando para isso rearranjar as equações (9) e (10). Contudo, estes coeficientes também podem ser calculados através das propriedades de ortogonalidade das funções exponenciais complexas, da seguinte forma:

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (11)$$

Observa-se que neste caso a série é para  $n$  variando de  $-\infty$  a  $+\infty$ . Note que nas expressões (1) e (5) tem-se  $n$  variando de 0 a  $+\infty$ , ou seja, existem somente frequências positivas. No caso da representação da equação (8) tem-se um conjunto de coeficientes que correspondem a frequências positivas e negativas. O conceito de frequência negativa geralmente causa confusão, contudo basta simplesmente lembrar que isto resulta diretamente das equações (6) e (7), e do uso de exponenciais complexas para representar componentes de frequência real, ou seja, é somente um artifício matemático.



♦ **Exemplo 1:** A expansão em série de Fourier de uma função quadrada com frequência  $w_0$ , apresentada na Figura 2.2, pode ser calculada segundo as expressões (1) e (8).



**Figura 2.2: Função quadrada com frequência  $w_0$ .**

A Série de Fourier desta função quadrada segundo a expressão (1) é dada por:

$$f_p(t) = \frac{4}{\pi} \sin(w_0 t) + \frac{4}{3\pi} \sin(3w_0 t) + \frac{4}{5\pi} \sin(5w_0 t) + \dots$$

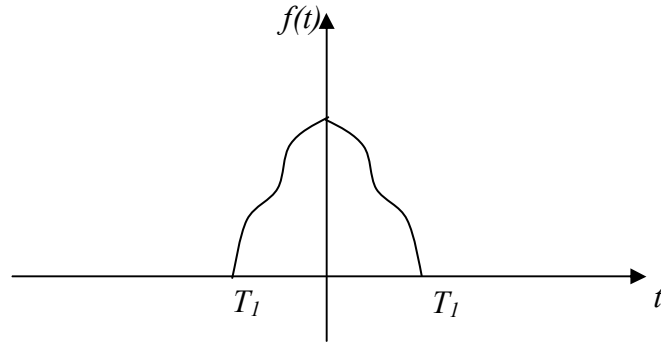
A série de Fourier desta função quadrada em termos de exponenciais complexas, de acordo com a expressão (8), é dada por:

$$f_p(t) = \dots \frac{2j}{5\pi} e^{-j5w_0 t} + \frac{2j}{3\pi} e^{-j3w_0 t} + \frac{2j}{\pi} e^{-jw_0 t} - \frac{2j}{\pi} e^{jw_0 t} - \frac{2j}{3\pi} e^{j3w_0 t} - \frac{2j}{5\pi} e^{j5w_0 t} + \dots$$

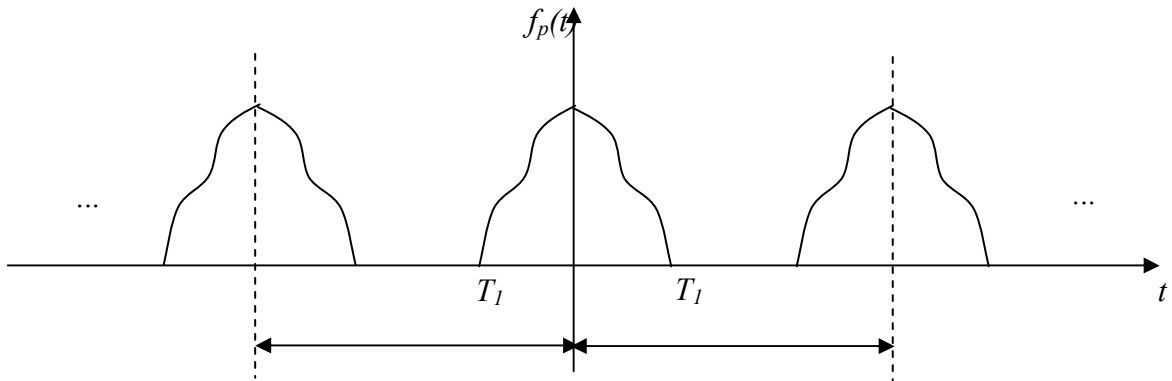
## 2.2 Transformada de Fourier - representação no domínio da frequência de uma função temporal não periódica

Obviamente que o mundo real não é feito de somente funções periódicas, portanto são necessários métodos para descrever no domínio da frequência funções não periódicas. O propósito de se ter introduzido anteriormente a Série de Fourier é somente fornecer um ponto de partida para descrever o método mais geral da Transformada de Fourier.

Considere a função de duração finita no tempo mostrada na Figura 2.3. Claramente que esta função não é periódica e observe que, a função  $f(t) = 0$  para  $|t| > T_1/2$ . Contudo, pode ser usado um truque para tornar a função  $f(t)$  periódica, este truque consiste em imaginar que se observa somente um período de uma função periódica com período  $T_0 > T_1$ , como mostra a Figura 2.4.



**Figura 2.3: Exemplo de função temporal não periódica limitada no tempo.**



**Figura 2.4: Tornando uma função temporal não periódica limitada no tempo em periódica com período  $T_0$ .**

A nova função  $f_p(t)$ , que é periódica com período  $T_0$ , pode ser representada por uma Série de Fourier, como a da expressão (8), repetida a seguir:

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t},$$

onde  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ , como anteriormente. Substituindo na equação anterior a expressão para os coeficientes  $C_n$ , dada pela equação (11), tem-se:

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right\} e^{jn\omega_0 t}. \quad (12)$$

Fazendo com que  $T_0$ , o período assumido da função periódica, se torne arbitrariamente grande, de forma que  $\omega_0$  se torne pequeno, escrevendo  $\omega_0 = \Delta\omega$  e  $n\omega_0 = \omega_n$ , tem-se que:

$$f_p(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-j\omega_n t} dt \right\} \Delta\omega e^{j\omega_n t}. \quad (13)$$

Finalmente, tomando o limite de  $T_0 \rightarrow \infty$  e notando que no limite a função periódica tende à função original, ou seja,

$$f(t) = \lim_{\substack{T_0 \rightarrow \infty \\ \text{ou} \\ \Delta w \rightarrow 0}} f_p(t). \quad (14)$$

Então, se for definida a seguinte função,

$$F(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jw t} dt, \quad (15)$$

a equação (13), no limite de  $T_0 \rightarrow \infty$  fica,

$$f_p(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{F(jw_n)\} \Delta w e^{jw_n t}. \quad (16)$$

Note que para funções periódicas o conteúdo de frequências é discreto. Pode-se imaginar que funções não periódicas possuem infinitas frequências em um dado intervalo de frequências. Assim, as componentes de frequências de uma função não periódica vão se juntando até não mais existir uma separação entre elas. Matematicamente, esta transformação pode ser feita tomando-se o limite da equação (16) para o intervalo de frequência,  $\Delta w$ , tendendo a zero. Quando  $\Delta w$  tende a zero, tem-se infinitas componentes de frequência e a somatória da equação (16) se transforma em uma integral da seguinte forma:

$$f_p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(jw) e^{jw t} dt. \quad (17)$$

A equação (15) define a Transformada de Fourier e a equação (17) define a Transformada de Fourier Inversa. Compactamente estas transformações são normalmente descritas como,

$$F(jw) = \mathfrak{F}\{f(t)\} \quad (18)$$

e

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{F(jw)\}. \quad (19)$$

Note que a equação (15) é por definição a Transformada de Fourier,  $F(jw)$ , da função  $f(t)$  e a equação (17) é por definição a Transformada de Fourier Inversa da função  $f(t)$ .

Se uma função do tempo,  $f(t)$ , existir somente para  $t \geq 0$ , ou seja, obedece as condições de existência da Transformada de Laplace, então a Transformada de Fourier dessa função,  $F(jw)$ , pode ser calculada através da sua Transformada de Laplace,  $F(s)$ , da seguinte forma:

$$F(jw) = F(s) \Big|_{s=jw}, \quad (20)$$

ou seja, basta substituir a variável  $s$  da Transformada de Laplace por  $jw$ , que se obtém a Transformada de Fourier da função  $f(t)$ . Esta expressão significa que a Transformada de Fourier é a

Transformada de Laplace calculada no eixo imaginário do plano complexo da variável  $s$ . Existem tabelas que apresentam as Transformadas da Laplace e de Fourier para diversas funções.

A Transformada de Fourier tem as seguintes características:

- (1) A função  $F(j\omega)$  não tem nenhuma informação nova sobre a função  $f(t)$ , é somente um modo diferente de se ver a função;
- (2) A função  $F(j\omega)$  fornece a densidade de amplitude. Por exemplo, se  $f(t)$  é uma força, então  $F(j\omega)$  será força/frequência (N/Hz ou N/rad.s<sup>-1</sup>);
- (3) A função  $F(j\omega)$  tem frequências negativas. Uma frequência negativa significa somente uma diferença de fase de 180° em relação à mesma frequência positiva. Isto pode ser visto através da função *seno*, onde  $\sin(\omega)$  e  $\sin(-\omega)$  estão defasados de 180°;
- (4) A função  $F(j\omega)$  é simétrica em relação ao eixo  $\omega = 0$  se a função  $f(t)$  for real.

## 2.3 Espectro de frequência

Para o engenheiro de controle a expansão em série de Fourier ou mesmo a Transformada de Fourier não são tão importantes como o conceito de representação espectral, ou espectro de frequências, de uma função ou de um sinal temporal.

O espectro de frequência de uma função periódica é a representação gráfica dos harmônicos (componentes) da série de Fourier, dada na forma de exponencial complexa, que representa esta função. Ou seja, é uma representação gráfica dos coeficientes  $C_n$  da expansão da função segundo a equação (7). Na medida que estes coeficientes são números complexos, o espectro de frequência é constituído de dois gráficos: um que apresenta o módulo dos coeficientes em função da frequência e outro que apresenta a fase destes coeficientes também em função da frequência. Observa-se que a frequência varia de  $-\infty$  a  $+\infty$ , ou seja, para  $n$  variando de  $-\infty$  a  $+\infty$ .

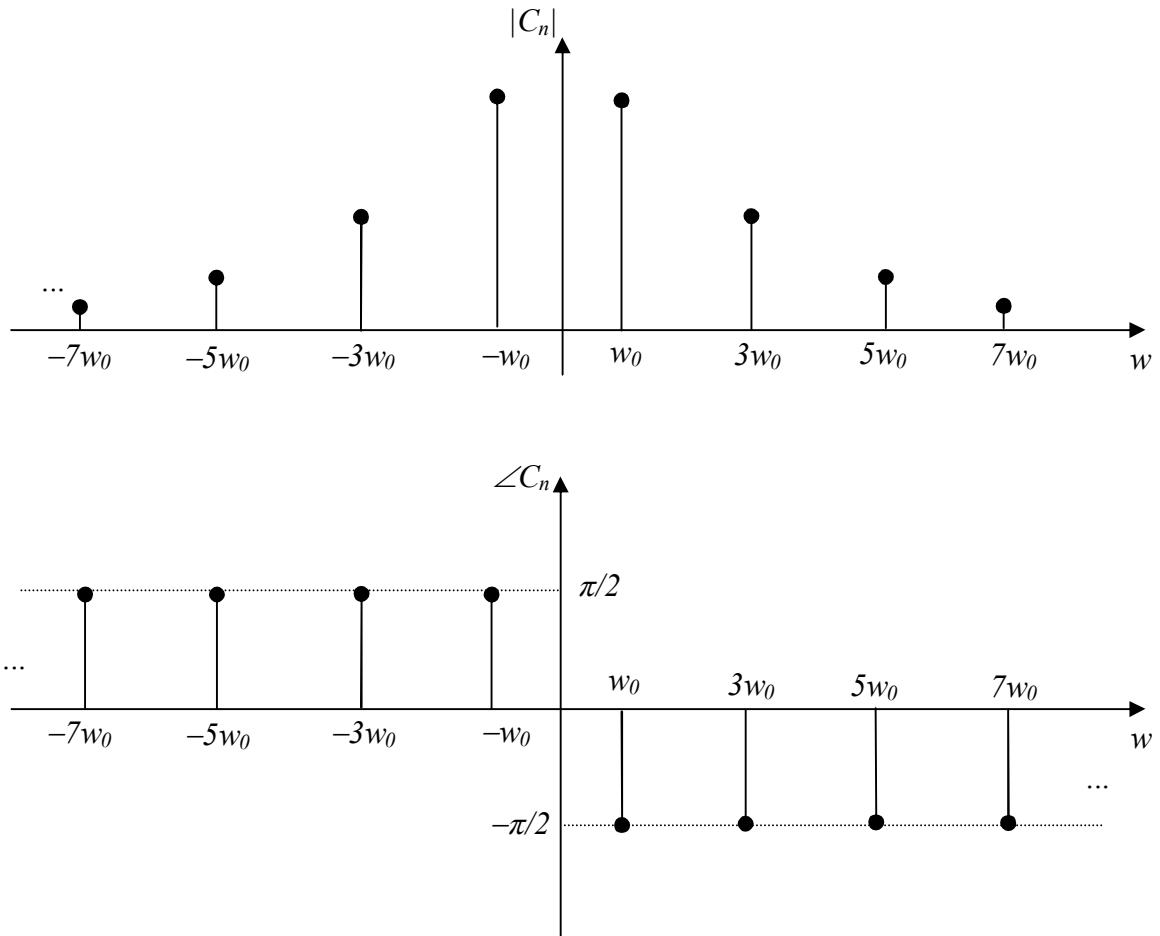
Para uma função não periódica o espectro de frequência é a representação gráfica da sua Transformada de Fourier dividida por  $2\pi$ .

♦ **Exemplo 2:** O espectro de frequências da função quadrada com frequência  $\omega_0$ , do exemplo 1, é dado pelos coeficientes  $C_n$  da sua expansão em série de Fourier. Do exemplo 1 estes coeficientes são dados, genericamente em função de  $n$ , por  $-j/n\pi$ . A fase e o módulo destes coeficientes são respectivamente iguais à:

$$\angle C_n = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \text{para } n \geq 0 \\ +\frac{\pi}{2}, & \text{para } n < 0 \end{cases};$$

$$|C_n| = \frac{2}{n\pi}.$$

Assim, o espectro de frequência da onda quadrada do exemplo 1 é dado pelos gráficos abaixo.



**Figura 2.5:** Espectro de frequências da função quadrada com frequência  $w_0$ .

Nota-se que este espectro de frequência não é contínuo. Isto decorre do fato de que a função quadrada é periódica e, portanto, somente tem componentes de frequência múltiplas do seu período.

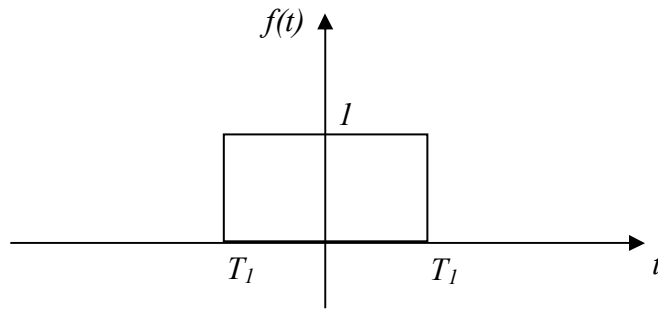
♦ **Exemplo 3:** Dada a seguinte função:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } |t| \leq T_1; \\ 0, & \text{para } |t| > T_1; \end{cases}$$

cujo gráfico se encontra na Figura 2.6, calcule a sua Transformada de Fourier e mostre o seu espectro de frequências.

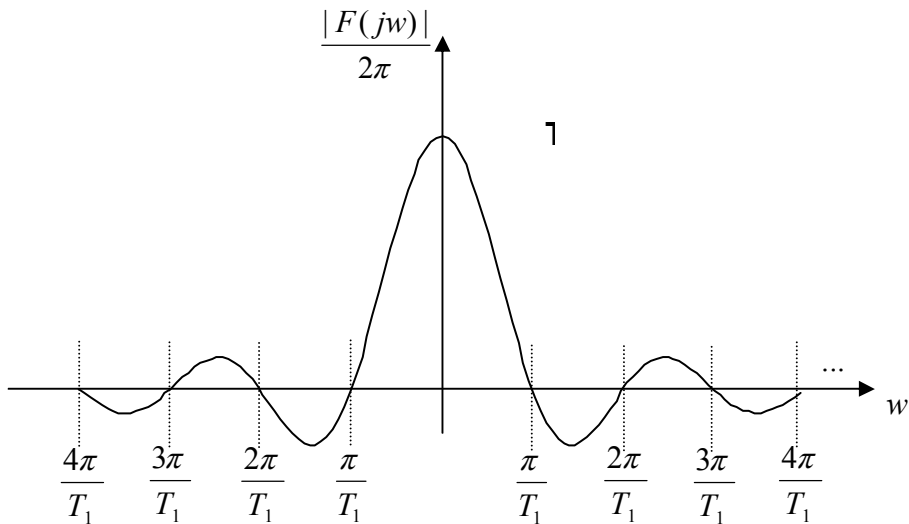
A sua transformada de Fourier, calculada aplicado-se a equação (15), é dada por:

$$F(jw) = \frac{2 \sin(wT_1)}{w}$$



**Figura 2.6: Função unitária no intervalo de tempo  $[-T_l, T_l]$ .**

O espectro de frequências desta função é dado pelo módulo e fase de  $F(j\omega)$  dividido por  $2\pi$ . Observa-se contudo que a fase de  $F(j\omega)$  é igual a zero, pois a esta é uma função real. O gráfico da Figura 2.7 apresenta o espectro de frequências da função  $f(t)$ .



**Figura 2.7: Espectro de frequência da função unitária no intervalo de tempo  $[-T_l, T_l]$ .**