Lista 1 - Otimização Não Linear

1. Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A e B subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}^n$ tais que $B \subseteq A$. Suponha que f é limitada inferiormente em $\mathbb{R}^n$. Mostre que

   i) $\inf\limits_{x \in A} f(x) \leq \inf\limits_{x \in B} f(x)$;

   ii) se $\overline{x}$ é minimizador de f em A e $\overline{x} \in B$, então $\overline{x}$ também é minimizador de f em B.

2. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Provar que $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ é um minimizador global de f em $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, todo x tal que $f(x) = f(\overline{x})$ é um minimizador local de f.

3. Seja D um conjunto compacto não vazio. Supondo que f seja semicontínua inferiormente em D, provar que existe um minimizador global para o problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x), \\ \text{sujeito a} & x \in D \end{array} \tag{1}$$

   onde D é o conjunto viável. Supondo que f é semicontínua superiormente em D, provar que existe um maximizador global para o Problema (1).

4. Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função semicontínua inferiormente e coerciva em D. Provar que o Problema (1) possui solução global.

5. Seja f uma função quadrática:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) := \langle Qx, x\rangle + \langle q, x\rangle + c$$

   onde $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz simétrica, $q \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$. Provar as seguintes afirmações:

   i) Se o problema de minimização irrestrita de f tem um minimizador local, então a matriz Q é semidefinida positiva. Mais ainda, todo minimizador local é global.

   ii) Se Q é definida positiva, então f é coerciva em $\mathbb{R}^n$. Em particular, o problema de minimização sobre f de qualquer conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ não vazio e fechado tem um minimizador global. Mostrar que, em geral, isto não é verdadeiro quando D não é fechado.

6. Suponha-se que o problema de minimização irrestrita de uma função contínua no $\mathbb{R}^n$ tenha uma solução global. Determinar se isso implica ou não que f tenha um minimizador global em qualquer conjunto fechado em $\mathbb{R}^n$.

7. Provar que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é semicontínua inferiormente no conjunto D se, e somente se, os seus conjuntos de nível $L_{f,D}(c)$ são fechados para todo $c \in \mathbb{R}$.

8. Determinar se pode ou não existir uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que tem um único ponto estacionário e este ponto é minimizador local de f, mas não minimizador global de f.

9. Sejam $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo e $f : C \to \mathbb{R}$ convexa. Mostre que o conjunto $\Gamma \subset C$ onde f atinge seu valor mínimo é convexo.

10. Considere $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e $f, g : D \to \mathbb{R}$ funções convexas.

a) Mostre que $f + g$ é convexa.

b) A diferença $f - g$ é uma função convexa? Justifique.

c) Que condição sobre $a \in \mathbb{R}$, garante que a função $a \cdot f$ é convexa?