AULA ANTERIOR 28/08/2020

Um conjunto V será um EV se, e somente se:

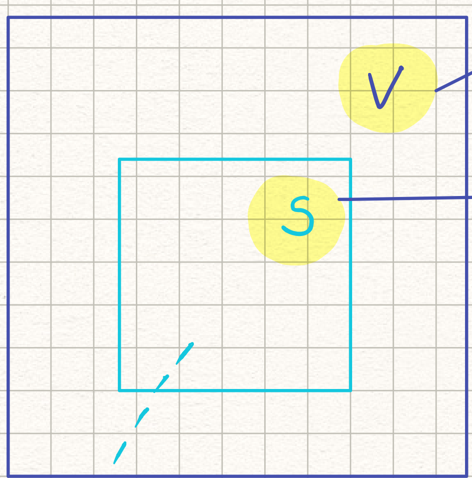
* 1º requisito $\begin{cases} (i) \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \ \underline{\vec{u} + \vec{v} \in V} \\ (ii) \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \underline{\alpha \vec{u} \in V} \end{cases}$

* 2º requisito { 8 axiomas, $\underline{A_1 \text{ a } M_4}$, verificados.

→ Todos os conjuntos matemáticos que satisfazem os 2 requisitos são chamados EV e seus elementos serão VETORES: $\mathbb{R}^n$; matrizes; polinômios; funções.

Algebricamente, esses elementos se comportam como os vetores do $\mathbb{R}^2$ e do $\mathbb{R}^3$!

Slide 15 - SubEspaços Vetoriais (SEVs)



EV $\begin{cases} \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V \\ \alpha \vec{v}_1 \in V \end{cases}$; 8 Axiomas, A_1 a M_4, verificados.

$S \subset V$ ∴ 8 axiomas se verificam em S, obrigatoriamente.

S é um subconjunto de V, portanto, apresenta todas as características de V, incluindo os 8 axiomas!

→ Então, o que falta para garantir que S se comporta como um EV menor (SEV)?

$\begin{cases} \forall \vec{u}, \vec{v} \in S, \ \vec{u} + \vec{v} \in S \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \alpha \vec{u} \in S \end{cases}$

Slide 16

Ex: reta que passa pela origem: $S = \{(x,y) ; y = 2x\}$

REESCREVENDO: $S = \{(x, 2x) ; x \in \mathbb{R}\}$.

(*) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists (x,y) = (x, 2x)$ $\therefore$ S não é um cj vazio

(**) Verificando as condições $\begin{cases} (i) & \vec{u} + \vec{v} \in S \\ (ii) & \alpha \vec{u} \in S \end{cases}$

$\vec{u} = (x_1, 2x_1)$; $\vec{v} = (x_2, 2x_2)$

(i) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1, 2x_1) + (x_2, 2x_2) = (\overbrace{x_1 + x_2}^{\alpha}, 2(\overbrace{x_1 + x_2}^{\alpha})) \in S$

(ii) $\alpha \vec{u} = \alpha (x_1, 2x_1) = (\underbrace{\alpha x_1}_{\beta}, 2 \underbrace{\alpha x_1}_{\beta}) \in S$

$\rightarrow$ Como S é um conjunto não vazio em que as condições (i) e (ii) são satisfeitas, então S é um SEV de $V = \mathbb{R}^2$. //

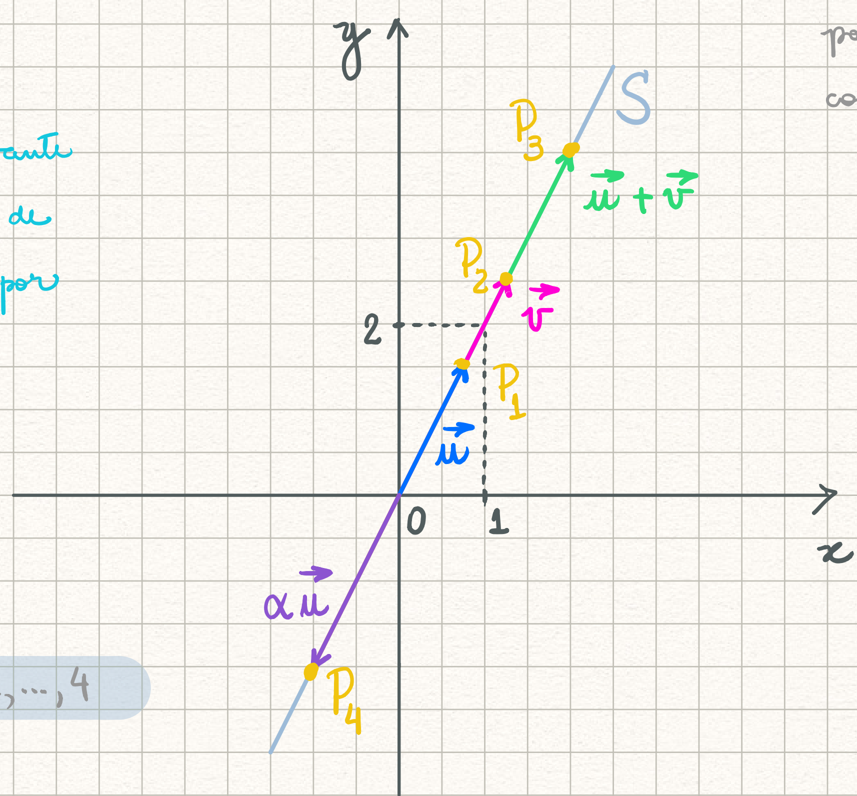
GEOMETRICAMENTE

Vetores: definidos da origem até um ponto qualquer de coordenadas $P(x, 2x) \in S$

$\vec{w} = \alpha \vec{u}$

vetor resultante do produto de um vetor por escalar

$\therefore \vec{w} \parallel \vec{u}$



$P_i \in S, i = 1, \dots, 4$

$\vec{t} = \vec{u} + \vec{v}$

vetores paralelos, quando somados, mantém a direção original

$\therefore \vec{t} \parallel \vec{u}, \vec{v}$

Ex: $V = \mathbb{R}^5 \longrightarrow S = \{(0, x_2, x_3, x_4, x_5)\ ;\ x_i \in \mathbb{R}\}$

(*) $\forall\, x_i \in \mathbb{R}\ ,\ \exists\, (0, x_2, x_3, x_4, x_5)$ $\therefore$ S não é um cj vazio

(**) Verificando as condições $\begin{cases} (i) & \vec{u} + \vec{v} \in S \\ (ii) & \alpha \vec{u} \in S \end{cases}$

$\vec{u} = (0, x_2, x_3, x_4, x_5)\ ;\ \vec{v} = (0, y_2, y_3, y_4, y_5)$

(i) $\vec{u} + \vec{v} = (0, x_2, x_3, x_4, x_5) + (0, y_2, y_3, y_4, y_5)$

$(0, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4, x_5 + y_5)$ $\vec{u} + \vec{v} \in S$

(ii) $\alpha \vec{u} = \alpha (0, x_2, x_3, x_4, x_5) =$

$(0, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4, \alpha x_5)$ $\alpha \vec{u} \in S$

$\therefore$ S é um SEV de $V = \mathbb{R}^5$

Ex: $V = M(n,n) \longrightarrow S = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} ;\ a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$

(*) $\forall\, a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\exists$ m as matrizes tr. sup. $\therefore$ S não é um cj vazio

(**) Verificando as condições $\begin{cases} (i) & \vec{u} + \vec{v} \in S \\ (ii) & \alpha \vec{u} \in S \end{cases}$

$\vec{u} = M_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$; $\vec{v} = M_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$

(i) $M_1 + M_2 = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ 0 & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}$ $M_1 + M_2 \in S$

(ii) $\alpha M_1 = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ 0 & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha a_{nn} \end{bmatrix}$ $\alpha M_1 \in S$

$\therefore$ S é um SEV de $V = M(n,n)$. //

Slide 17 $\longrightarrow$ Contraexemplo: reta que não passa pela origem.

$S = \{(x, 4-2x);\ x \in \mathbb{R}\}$

REESCREVENDO: $S = \{(x,y);\ y = 4-2x\}$.

(*) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, (x,y),\ y = 4-2x$ $\therefore$ S não é um cj vazio

(**) Verificando as condições $\begin{cases} \text{(i)}\ \vec{u} + \vec{v} \in S \\ \text{(ii)}\ \alpha \vec{u} \in S \end{cases}$

$\vec{u} = (x_1, 4-2x_1)$; $\vec{v} = (x_2, 4-2x_2)$

(i) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1, 4-2x_1) + (x_2, 4-2x_2)$

$= (\overbrace{x_1+x_2}^{\alpha}, 8 - 2(\overbrace{x_1+x_2}^{\alpha}))$ $\notin S$

(ii) $\alpha \vec{u} = \alpha(x_1, 4-2x_1) = (\underbrace{\alpha x_1}_{\beta}, 4\alpha - 2\underbrace{\alpha x_1}_{\beta})$ $\notin S$

Logo, S não é um SEV. //

GEOMETRICAMENTE

Vetores: definidos da origem até um ponto qualquer de coord $P(x, 4-2x) \in S$.

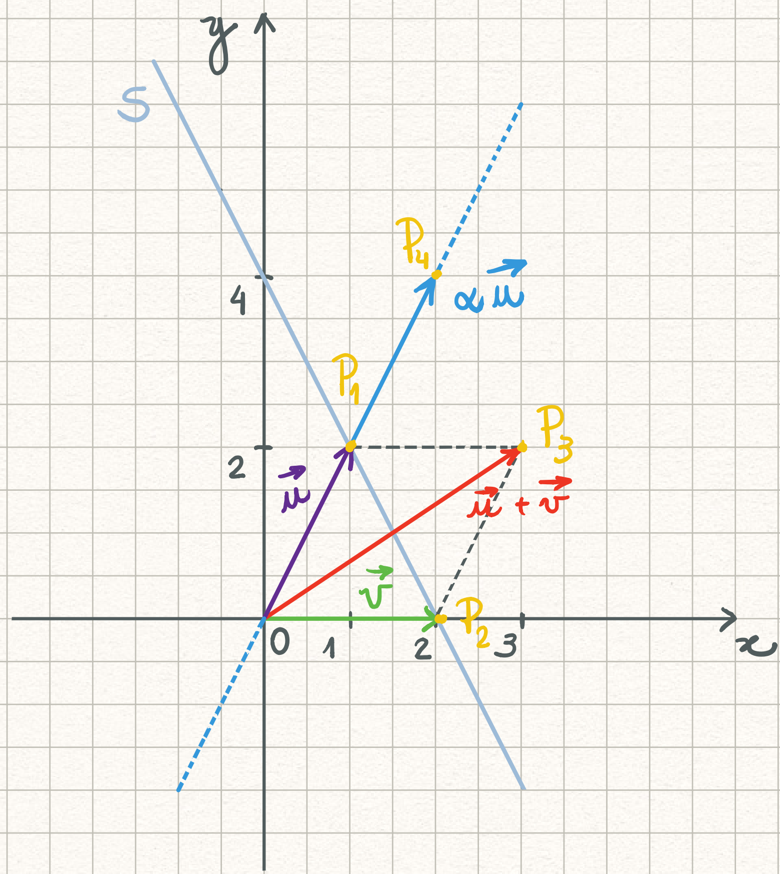
Escolhendo dois vetores:

$x = 1 \rightarrow \vec{u} = (1,2)$

$x = 2 \rightarrow \vec{v} = (2,0)$

$\vec{u} + \vec{v} = (3,2)$

$\alpha \vec{u} = (\alpha, 2\alpha)$



OBS:

P_1, P_2: pontos que têm as mesmas coord dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, quando medidos a partir da origem. $P_1, P_2 \in S$

P_3: ponto com as mesmas coord do vetor $\vec{u} + \vec{v}$. $P_3 \notin S$

P_4: ponto com as mesmas coord do vetor $\alpha \vec{u}$. $P_4 \notin S$

$\longrightarrow$ Contraexemplo: subconjunto de todas as matrizes quadradas em que $a_{11} \leq 0$.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} ; \ a_{11} \leq 0 \right\}$$

(*) $\forall a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\exists$ as matrizes $\therefore$ S não é um cj vazio

(**) Verificando as condições $\begin{cases} (i) & \vec{u} + \vec{v} \in S \\ (ii) & \alpha \vec{u} \in S \end{cases}$

$$\vec{u} = M_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} ; \quad \vec{v} = M_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

(i) $$M_1 + M_2 = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ Como $a_{11} \leq 0$ e $b_{11} \leq 0$, $a_{11} + b_{11} \leq 0$ $\therefore$ $M_1 + M_2 \in S$

(ii) $$\alpha M_1 = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \cdots & \alpha a_{nn} \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ Como $a_{11} \leq 0$, quando $\alpha < 0$, $\alpha a_{11} > 0$ $\therefore$ $\alpha M_1 \notin S$

Logo, S não é um SEV. //