1a. Lista de Exercícios SLC 0608 - Cálculo II
segundo semestre de 2020

Curvas Parametrizadas

Exercício 1 *Faça um esboço do traço da curva parametrizada plana $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, onde as funções coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ são dadas a seguir, determinando primeiro uma relação entre x e y por eliminação da variável t. Por exemplo, Para $x(t) = t^2, y(t) = t - 3$ tem-se $x = (y+3)^2$. Inclua a orientação do traço em seu esboço.*
(a) $x(t) = t - 2$, $y(t) = 2t + 3$
(b) $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = t^2 - 1$
(c) $x(t) = 4t^2 - 5$, $y(t) = 2t + 3$
(d) $x(t) = e^t$, $y(t) = e^{-2t}$
(e) $x(t) = t^2$, $y(t) = 2\ln t$

Exercício 2 *Faça o esboço do traço de cada curva parametrizada abaixo indicando a sua orientação:*
(a) $\gamma(t) = (\,\mathrm{sen} t, \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
(b) $\gamma(t) = (\,\mathrm{sen} 2t, \cos 2t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
(c) $\gamma(t) = (5\cos t, 2\,\mathrm{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
(d) $\gamma(t) = (t, t^3)$, $t \in [-3, 3]$.
(e) $\gamma(t) = (t^4, t^2)$, $t \in [-1, 1]$.

Exercício 3 *Verifique se existe* $\lim_{t \to t_0} \gamma(t)$ *para:*
(a) $\gamma(t) = \left(\dfrac{\sqrt{t} - 1}{t - 1}, t^2, \dfrac{t-1}{t} \right)$, $t_0 = 1$.
(b) $\gamma(t) = \left(\dfrac{\mathrm{tg}\ 3t}{t}, \dfrac{e^{2t} - 1}{t}, t^3 \right)$, $t_0 = 0$.
(c) $\gamma(t) = \left(\dfrac{t^3 - 8}{t^2 - 4}, \dfrac{\cos(\pi/t)}{t - 2}, 2t \right)$, $t_0 = 2$.

Exercício 4 *Calcule $\gamma'(t)$ e calcule a reta tangente a trajetória da curva dada, no ponto dado, nos casos:*

(a) $\gamma(t) = (t^3 - t^2, \ln(t^2 - 1))$, e $\gamma(2)$

(b) $\gamma(t) = (3t^2, e^{-t}, \cos(t-1))$, e $\gamma(0)$

(c) $\gamma(t) = (t, t^2)$, e $\gamma(1)$.

Funções de Várias Variáveis

Exercício 5 *Descreva o domínio e a imagem de f:*
(a) $f(x,y) = 2x - y^2$ (b) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 + y^2}$ (c) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y} - 1}{x + y - 1}$
(d) $f(x,y,z) = \dfrac{x - z}{x^2 + y^2}$ (e) $f(x,y,z) = \ln(x + y + z + 1)$.

Exercício 6 *Para as funções f cujas leis são dadas abaixo, verifique se são limitadas em seu domínio de definição. Caso f não seja limitada, verifique por qual sequência de pontos ela cresce (ou decresce)* *arbitrariamente:*

$(a)\ f(x,y) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{xy}$ $(b)\ f(x,y) = x/(\sqrt{x^2+y^2})$ $(c)\ f(x,y) = \ln(x+y)$

$(d)\ f(x,y,z) = \dfrac{xy-z^2}{x^2+y^2+z^2}$ $(e)\ f(x,y,z) = \cos(\dfrac{xyz^9}{\sqrt{x-y}})$ $(f)\ f(x,y,z) = \dfrac{xy}{x^2+y^2+z^4}$

$(g)\ f(x,y) = \dfrac{x^8}{x^8+y^8}$ $(h)\ f(x,y) = \dfrac{x^4y^4}{x^8+y^8}$ $(i)\ f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^4}$

$(j)\ f(x,y) = \dfrac{x^4}{x^2+y^4}$ $(l)\ f(x,y) = \dfrac{x^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$

Curvas de níveis e gráficos

Exercício 7 *Esboce os gráficos das funções abaixo.*

$(a)\ f(x,y) = x^2+y^2+3$ $(b)\ f(x,y) = (x-1)^2+(y-2)^2+3$ $(c)\ f(x,y) = 3$

$(d)\ f(x,y) = -x-3y+3$ $(e)\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $(f)\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}+1$

$(g)\ f(x,y) = x+2$ $(h)\ f(x,y) = e^x+2$

Exercício 8 *Em cada item, esboce no mesmo plano coordenado as curvas de nível $f(x,y)=c$ para $c \in \{-1,0,4\}$:*

$(a)\ f(x,y) = xy$ $(b)\ f(x,y) = \ln(xy)$ $(c)\ f(x,y) = 4-(x-1)^2-(y+3)^2$

$(d)\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2/2}$ $(f)\ \ f(x,y) = e^x/(2y)$.

Exercício 9 *Descreva a superfície de nível $f(x,y,z)=c$ para $c \in \{-1,0,4\}$:*

(a) $f(x,y,z) = e^x/(2y)$ *(b)* $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Exercício 10 *Ache a equação do conjunto de nível de f que passe pelo ponto P dado:*

(a) $f(x,y) = y\arctan x,\ P=(1,4)$ *(b)* $f(x,y,z) = z^2y+x,\ P=(1,4,-2)$

(c) $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y \frac{dt}{1+t^2},\ P=(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

Exercício 11 *(a) Encontre alguma função (especificando seu domínio, contradomínio e sua lei), que tenha a reta de equação $y=3x-4$ como uma curva de nível.*
(b) O mesmo para a curva dada pela equação $y=3/x^2$.

Exercício 12 *Se $T(x,y)$ dá a temperatura num ponto (x,y) sobre uma placa delgada de metal no plano-x,y, então as curvas de nível de T são chamadas de curvas isotérmicas (todos os pontos sobre cada uma dessas curvas possuem a mesma temperatura). Suponha que uma placa ocupe o primeiro quadrante e $T(x,y)=xy$.*
(a) Esboce as curvas isotérmicas de temperaturas $T=1$, $T=2$ e $T=3$.
(b) Uma formiga, inicialmente no ponto $(1,4)$, se move sobre a placa de modo que a temperatura ao longo de sua trajetória permanece constante. Qual é essa trajetória, e qual é a temperatura correspondente?

Exercício 13 *Os pontos de uma chapa plana de metal estão marcados no plano-x,y de modo que a temperatura T no ponto (x,y) é inversamente proporcional à distância do ponto a origem.*
(a) Qual é a lei $T(x,y)$ que descreve a temperatura da chapa acima?
(b) Descreva as isotérmicas, isto é, as curvas de nível da função temperatura.
(c) Se a temperatura no ponto $P=(4,3)$ é de 40^oC, ache a equação da isotérmica para uma temperatura de 20^oC.

Exercício 14 *Duas curvas de nível podem se interceptar? Justifique sua resposta.*

Limite de funções de várias variáveis

Exercício 15 *Use as propriedades de limite para calcular:*

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2+y^2}{x-y}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2}{3+xy}$ (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt{x^2+y^2-1}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,1,0)} \frac{x^2+y^2}{x-y-z}$ (e) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(-1,1,2)} xz-xy-2xzy$ $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(1,-1,4)} \left|\frac{x-y}{x+xy+y^2z}\right|$.

Exercício 16 *Verifique se os resultados abaixo são verdadeiros, justificando sua resposta.*

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}=0$ *(b)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^2}{x^2+y}=0$ *(c)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x+y}-1}{x+y-1}=2$

Exercício 17 *Verificar se os limites abaixo existem. Justifique sua resposta.*

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|}$ (c) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x+5y}{x-y^2+z}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y-1}{\sqrt{x^2-2x+y^2-2y+2}}$ (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{x^2-4x+4}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{y-2}{\sqrt{x^2+(y-2)^4}}$

Sugestão: Em (b) esboce o gráfico da função. É fácil!

Exercício 18 *Veja se é possível utilizar o Teorema do Confronto (ou Sanduíche) para o cálculo dos limites abaixo (O exercício anterior será útil). Para os casos em que não é possível utilizar o teorema, verifique se o limite não existe.*

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2+z^2}$ (e) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$ (f) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{4x-y-3z}{2x-5y+2z}$

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}\left(\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}\right)$ (h) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(1,1,2)} \frac{x}{x-y}$ (i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4\operatorname{sen}(x^2+y^3)}{x^4+y^4}$

(j) $\displaystyle\lim_{(x,y,x)\to(1,0,0)} \frac{x-1}{(x-1)^2+|y|+|z|}$ (k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ (l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$

Continuidade de funções de várias variáveis

Exercício 19 *Descreva os pontos onde f é contínua. Faça também o esboço do domínio $D(f)$:*

(a) $f(x,y)=\ln(x+y-1)$ (b) $f(x,y)=\sqrt{x}e^{xy}$ (c) $f(x,y)=\operatorname{sen}\sqrt{1-x^2+y^2}$

(d) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$ (e) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{x+y+z}$ (f) $f(x,y,z)=\tan(xyz)$

Exercício 20 *Verifique se cada uma das leis abaixo define uma função contínua em todo o $\mathbb{R}^2$:*

(a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \textit{se}\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \textit{se}\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$ *(b)* $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \textit{se}\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \textit{se}\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^4+y^4}, & \textit{se}\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \textit{se}\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$ *(d)* $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y\operatorname{sen}(xy)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, & \textit{se}\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \textit{se}\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(e) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \textit{se}\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & \textit{se}\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(f) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2}, & \textit{se}\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & \textit{se}\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Derivadas Parciais e Direcionais

Exercício 21 *Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de:*

$(a)\ f(x,y) = \dfrac{2x^4 - xy + 1}{xy}$ $\quad (b)\ f(x,y) = \arctan x/y$ $\quad (c)\ f(x,y) = sen(x^2 - y^3)$

$(d)\ f(x,y) = \displaystyle\int_x^y g(t)dt$ $\quad (e)\ f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^3 - z^4}$ $\quad (f)\ f(x,y,z,u,v) = xyzu^2v^4$

Exercício 22 *Calcule* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$ *para* $f(x,y) = x^{x^{x^y}} + \operatorname{sen}(\pi x)[x^2 + sen(x+y) + e^x cos^2 y]$.
Dica: Deve ser de fácil resolução.

Exercício 23 *Seja* $f(x,y) = 2x + 3y^2$.
(a) Encontre o coeficiente angular da reta tangente à curva que está na intersecção do gráfico de f *com o plano* $x = 2$, *no ponto* $(2, 1, f(2,1))$.
(b) Idem para a curva que está na intersecção do gráfico com o plano $y = -1$, *no ponto* $(2, 3, f(2,3))$.
(c) Determine o plano tangente ao gráfico de f *no ponto* $(2, -1, f(2,-1))$.

Exercício 24 *Encontre o vetor gradiente de cada uma das funções:*
(a) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ *(b)* $f(x,y,z) = x\,\mathrm{arctg}(y+z)$ *(c)* $f(x,y) = e^{x^2 - y^2}$.

Exercício 25 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *função diferenciável em toda reta. Seja* $u(x,y) = f(x - cy)$ *onde* c *é constante dada. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de* u *e então mostre que* u *satisfaz a equação de transporte* $u_y + cu_x = 0$.

Exercício 26 *Seja* $z(t) = f(x(t), y(t))$ *onde* f *é diferenciável no plano e* $x(t), y(t)$ *são deriváveis num intervalo* $]a,b[$.
(a) Dê a expressão de $z'(t)$ *usando o vetor gradiente de* f.
(b) Derive $z(t)$ *para os casos:*
(i) $z = \tan(x^2 + y)$ *onde* $x = 2t$, $y = t^2$.
(ii) $z = x/y$ *onde* $x = e^{-t}$ *e* $y = \ln t$.

Exercício 27 *(a) Se* $h(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$, *onde* $f(x,y), x(u,v)$ *e* $y(u,v)$ *são diferenciáveis em todo plano, obtenha as expressões para* $\dfrac{\partial h}{\partial u}$ *e* $\dfrac{\partial h}{\partial v}$. *Aplique para cada caso abaixo:*
(b) $f(x,y) = 1 + x^2 - y^2$ *onde* $x(u,v) = u - v$ *e* $y(u,v) = u + v$
(c) $f(x,y) = 1 - 4x^2 + 9y^2$ *onde* $x(u,v) = 2ucosv$ *e* $y(u,v) = 3usenv$

Exercício 28 *Seja* $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2} & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$
(a) Seja $v = (\alpha, \beta)$ *vetor unitário. Calcule* $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x,y)$ *para* $(x,y) \neq (0,0)$.
(b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$.

Exercício 29 *Em cada item, calcule a derivada direcional de* f *na direção de* v *e no ponto* P:
(a) $f(x,y) = xy - x + y$, $v = (1,1)$ $P = (1,1)$
(b) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^4 + 4)$, $v = (1/\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$, $P = (1,0)$
(c) $f(x,y,z) = \dfrac{x - e^y}{x^2 + y^4 + 1}$, $v = (2,2,0)$, $P = (1,1,1)$.

Exercício 30 *Encontre a direção em que* f *decresce mais rapidamente, a partir de* P *nos três casos do exercício anterior.*

Exercício 31 *Calcule as derivadas parciais de segunda ordem das funções do Exercício 21.*

Exercício 32 *Mostre que* $U(x,y) = e^{-x}\cos y + e^{-x}\,\mathrm{sen} y$ *satisfaz a chamada* **equação de Laplace** $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x,y) = 0$.

Exercício 33 *Mostre que* $u(x,t) = e^{-25t}\ \mathrm{sen}\ 5x$ *é solução da* **equação do calor** $u_t = u_{xx}$.

Exercício 34 *Para cada* $(x,y) \neq (0,0)$ *calcule* $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y)$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x,y)$ *e* $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y)$ *onde* $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$.

Exercício 35 *Seja* $v(r,\theta) = u(x,y)$*, onde* $x = r\cos\theta$ *e* $y = r\,\mathrm{sen}\theta$*. Verifique que*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}.$$

Diferenciabilidade de funções de várias variáveis

Exercício 36 *Determine o conjunto dos pontos onde a função dada é diferenciável (justifique):*

(a) $f(x,y) = 1 + x\ln(xy-5)$,
(b) $f(x,y) = \sqrt{xy}$,
(c) $f(x,y) = x^2 e^y$,
(d) $f(x,y) = \dfrac{1+y}{1+x}$,
(e) $f(x,y) = 4\arctan(xy)$,
(f) $f(x,y) = y + \sin(x/y)$.

Exercício 37 *Dada a função*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mostre que:

(a) $f_x(0,0)$ *e* $f_y(0,0)$ *existem*
(b) f_x *e* f_y *não são contínuas em* $(0,0)$.
(c) f *não é diferenciável em* $(0,0)$.

Exercício 38 *Dada a função*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mostre que:

(a) $f_x(0,0)$ *e* $f_y(0,0)$ *existem,*
(b) f_x *e* f_y *não são contínuas em* $(0,0)$
(c) f *é diferenciável em* $(0,0)$.

Exercício 39 *Verifique se a função* $f(x,y) = \sqrt[3]{x}\cos(y)$ *é diferenciável em* $(0,0)$. (Dica: Encontre, por definição, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.)

Reta (ou plano) tangente e reta normal

Exercício 40 *Determine as retas normal e tangente à curva* $x^2 + xy + y^2 - 3y = 1$ *no ponto* $(1, 2)$.

Exercício 41 *Verifique se existem pontos sobre a curva* $x^2 - y^2 = 1$ *nos quais a reta tangente seja paralela à reta dada por* $y = 2x$. *Caso existam, determine-os.*

Exercício 42 *(a) Encontre o plano tangente à superfície* $x + y^2 + z = 4$ *no ponto* $P_0 = (1, 1, 2)$.
(b) Determine o plano tangente à superfície $x^3 + y^3 + z^3 = 10$ *no ponto* $P_0 = (1, 1, 2)$.

Exercício 43 *Verifique se existe(m) ponto(s) na esfera* $S\colon x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *tal que o plano tangente a* S *neste(s) ponto(s) seja paralelo ao plano* $3x - y + z = 7$. *Caso exista(m), determine-o(s).*

Aproximação linear

Exercício 44 *Abaixo é dada a função e sua aproximação linear num certo ponto* P. *Use a informação dada para determinar o ponto.*

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $L(x, y) = 2y - 2x - 2$;

(b) $f(x, y) = x^2y$, $L(x, y) = 4y - 4x + 8$;

(c) $f(x, y, z) = xy + z^2$, $L(x, y, z) = y + 2z - 1$;

Máximo e Mínimos para funções de várias variáveis

Exercício 45 *(a) Se a distribuição de temperatura numa chapa metálica é dada pela função* $T(x, y) = x^3 - 2xy^2$ *e se uma formiga está sobre a chapa no ponto* $(x, y) = (1, 1)$ *e deseja se aquecer pois está sentindo muito frio. Em que direção deverá tomar sua caminhada para que isso ocorra de modo mais eficiente?*

(b) Se a formiga estivesse confortável, termicamente falando, que direção ela tomaria para continuar com esta mesma sensação.

Exercício 46 *Estude com relação a máximos e mínimos locais as funções cujas leis são dadas por:*

1. $f(x, y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$
2. $f(x, y) = x^3 + 2xy + y^2 - 5x$
3. $f(x, y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y$

Exercício 47 *Determine o ponto do plano* $x + 2y - z = 4$ *mais próximo da origem.*

Exercício 48 *Sobre a elipse* $x^2 + 2y^2 = 1$ *determine todos os pontos onde* $f(x, y) = xy$ *assume seus valores extremos.*

Exercício 49 *Uma placa metálica circular com um metro de raio está posicionada com seu centro na origem do plano* xy *e tem temperatura variável, incluindo os pontos de sua fronteira. A temperatura num ponto* (x, y) *da placa é mantida a* $T(x, y) = 64(3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2y + 5)^o C$, *com* x *e* y *em metros. Encontre os valores de maior e de menor temperatura desta placa.*

Exercício 50 *Estude a função dada com relação a máximos e mínimos no conjunto dado.*

(a) $f(x,y) = 3x - y$; $A = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
(b) $f(x,y) = x^2 + 3xy - 3x$; $A = \{(x,y) \in R^2 : x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\}$.
(c) $f(x,y) = xy$; $A = \{(x,y) \in R^2 : x \geq 0; y \geq 0; 2x + y \leq 5\}$.

Exercício 51 *Determine os valores máximos e mínimos de* $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$:
(a) *na região retangular* $0 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 2$.

Exercício 52 *Encontre os pontos de máximo e de mínimo de* $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-4)^2$ *na região delimitada pelo triângulo determinado pelas retas* $y = 0$, $x = 0$ *e* $x + y = 1$.

Exercício 53 *Estude com relação a máximos e mínimos a função dada com as restrições dadas*
a) $f(x,y) = 3x + y$ e $x^2 + 2y^2 = 1$
b) $f(x,y) = xy$ e $x^2 + 4y^2 = 8$
c) $f(x,y) = x^2 - 2y^2$ e $x^2 + y^2 - 2x = 0$

Exercício 54 *Determine o ponto da reta* $x + 2y = 1$ *cujo produto das coordenadas seja máximo.*

Exercício 55 *Determine o ponto da parábola* $y = x^2$ *mais próximo de* $(14, 1)$.