Funções de duas (ou três) variáveis reais a valores reais

Definição

Uma função de duas (ou três) variáveis reais a valores reais é uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$, *onde* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. *A função f função, associa, a cada par* $(x, y) \in \Omega$ *(a cada terna* $(x, y, z) \in \Omega$*) , um único número* $f(x, y) \in \mathbb{R}$ *(*$f(x, y, z) \in \mathbb{R}$*).*

Observação:

a) O conjunto Ω é o domínio de f e as vezes será denotado por D_f.

b) O conjunto $Imf = \{f(x, y) \in \mathbb{R}; (x, y) \in D_f\}$ é a imagem de f quando $n = 2$. $(Imf = \{f(x, y, z) \in \mathbb{R}; (x, y, z) \in D_f\}$, quando $n = 3)$.

Exemplo

a) $f(x,y) = 1$, $D_f = \mathbb{R}^2$, $Imf = \{1\}$

b) $f(x,y) = x + y$, $D_f = \mathbb{R}^2$, $Imf = \mathbb{R}$.

c) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$, $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \neq x\}$, $Imf = \mathbb{R}$.

d) $f(x,y) = \frac{1}{y-x^2}$, $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \neq x^2\}$, $Imf = \mathbb{R} - \{0\}$.

e) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy + 1$, $D_f = \mathbb{R}^2$, $Imf = \mathbb{R}$.

f) $f(x,y) = \sin(x^2 y)$, $D_f = \mathbb{R}^2$, $Imf = [0,1]$

Exemplo

a) $f(x,y,z) = x + y - z$, $D_f = \mathbb{R}^3$, $Imf = \mathbb{R}$.

b) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $D_f = \mathbb{R}^3$, $Imf = [0, +\infty)$.

c) $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$, $D_f = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$, $Imf = (0, +\infty)$.

d) $f(x,y,z) = \cos(xyz)$, $D_f = \mathbb{R}^3$, $Imf = [0, 1]$.

e) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz$, $D_f = \mathbb{R}^3$, $Imf = \mathbb{R}$.

f) $f(x,y,z) = \frac{xz}{y}$, $D_f = \mathbb{R}^3 - \{(x,y,z); y = 0\}$, $Imf = \mathbb{R}$.

Exemplo

Determine o domínio da função f dada por

a) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$

b) $f(x,y) = \frac{x-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

Solução: a) Temos que exigir que $x^2 + y^2 - 1 > 0$. Isto é, $x^2 + y^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 > 1$. Portanto o domínio de f, $D_f = \mathbb{R}^2 - \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 1\}$

b) Temos que exigir que $1 - x^2 - y^2 > 0$. Mas $1 - x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 1$. Portanto o domínio de f, $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\} = B((0,0),1)$