

Os espaços $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ e noções de topologia

Denotamos por

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

Estes espaços são munidos de uma norma definida como segue:

Definição

Se $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ definimos a norma de P como sendo

$$\|P\| = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Se $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ definimos a norma de P como sendo

$$\|P\| = \|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Definição

Se $P_1 = (x_1, y_1)$, e $P_2 = (x_2, y_2)$ em $\mathbb{R}^2$ definimos a distância entre P_1 e P_2 como sendo

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \|P_1 - P_2\| = \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\| \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \end{aligned}$$

Se $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ em $\mathbb{R}^3$ definimos a distância entre P_1 e P_2 como sendo

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \|P_1 - P_2\| = \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)\| \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \end{aligned}$$

Bola aberta

Definição

Seja $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $\delta \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$. Definimos a bola aberta de centro P_0 e raio δ como sendo

$$B(P_0, \delta) = \{P \in \mathbb{R}^2; d(P_0, P) < \delta\}$$

Seja $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, $\delta \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$. Definimos a bola aberta de centro P_0 e raio δ como sendo

$$B(P_0, \delta) = \{P \in \mathbb{R}^3; d(P_0, P) < \delta\}$$

Observação:

Em $\mathbb{R}^2$,

$$d(P_0, P) = \|(x - x_0, y - y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$$

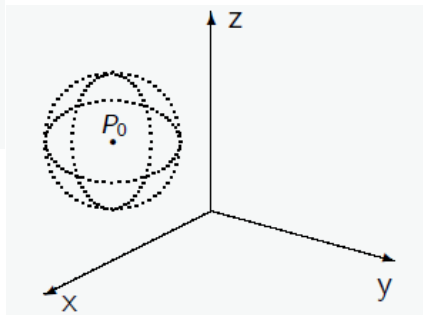
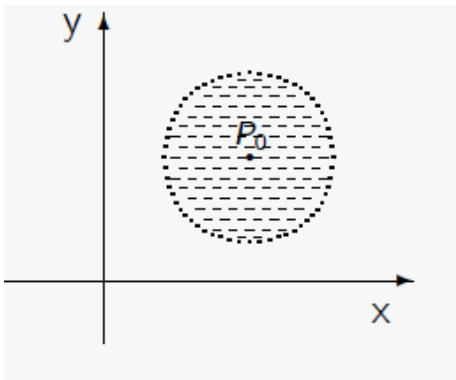
deste modo, a bola aberta de centro P_0 é o conjunto de todos os pontos internos ao disco de centro P_0 e raio δ .

Analogamente, em $\mathbb{R}^3$,

$$d(P_0, P) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \delta^2$$

deste modo, a bola aberta de centro P_0 é o conjunto de todos os pontos internos a esfera de centro P_0 e raio δ .

Bola aberta $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ 

Ponto interior, conjunto aberto

Definição

Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2$. Dizemos que um ponto $P_0 \in A$ é um ponto interior de A , se existir uma bola aberta de centro P_0 contida em A .

Exemplo

Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\}$

- a) Todo ponto $P = (x, y)$ com $x > 0$ e $y > 0$, é um ponto interior de A .*
- b) Todo ponto $P = (x, y)$, com $x = 0$ ou $y = 0$, não é ponto interior de A .*

Definição

Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2$. Dizemos que A é um conjunto aberto se todo ponto de A for ponto interior.

Exemplo

a) O conjunto A do exemplo anterior não é aberto, pois o ponto $P = (0, 1)$ não é ponto interior de A .

b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$ é um conjunto aberto.

c) Toda bola aberta é um conjunto aberto.

d) $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ é aberto.

Ponto de acumulação, Conjunto fechado

Definição

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, e $P_0 \in \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. Dizemos que P_0 é ponto de acumulação de A se toda bola aberta de centro P_0 contiver pelo menos um ponto $P \in A$, com $P \neq P_0$.

Exemplo

Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$. Todo ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ com $x_0 \geq 0$ e $y_0 \geq 0$ é ponto de acumulação de A . O ponto $(-1, 1)$ não é ponto de acumulação de A , pois a bola aberta de centro $(-1, 1)$ e raio $\frac{1}{2}$ não contém ponto de A .

Exemplo

O ponto $(0, 1)$ é o único ponto de acumulação do conjunto $A = \{(\frac{1}{n}, 1); n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$, pois qualquer bola de centro $(0, 1)$ contem infinitos pontos de A .

Definição

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que A é um conjunto fechado se todos os pontos de acumulação A pertencer a A .

Exemplo

a) $\mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado.

b) Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\}$. O conjunto A é um conjunto fechado.

Exemplo

Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y > 0\}$. O conjunto A não é um conjunto fechado, pois o ponto $(1, 0)$ é ponto de acumulação de A e não pertence a A .

Conjunto compacto

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. Dizemos que A é limitado se existe uma bola de centro na origem que contem A .

Exemplo

a) Toda bola é um conjunto limitado.

b) $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ não é limitado.

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. Dizemos que A é compacto se A for fechado e limitado.

Exemplo

a) Seja $P_0 \in \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ e $\delta > 0$. O conjunto (bola fechada de centro P_0 e raio δ)

$$\bar{B}(P_0, \delta) = \{P \in \mathbb{R}^2; d(P_0, P) \leq \delta\}$$

é um conjunto compacto.

b) $A = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$ é um conjunto compacto em $\mathbb{R}^3$.