

Lista II : Operadores Tensoriais

- ① Os $2k + 1$ operadores $T_{\kappa}^{(k)}$, com $k \geq 0$ e $\kappa = -k, -k + 1, \dots, k$, são por definição as $2k + 1$ componentes de um operador tensorial irredutível de ordem k se verificarem a regra de transformação sob rotação

$$D^{\dagger}(R) T_{\kappa}^{(k)} D(R) = \sum_{\kappa'} D_{\kappa\kappa'}^k(R)^* T_{\kappa'}^{(k)}.$$

Seja $\mathbf{J}$ o momento angular total do sistema estudado.

- (a) Mostre que os operadores $T_{\kappa}^{(k)}$ obedecem as regras de comutação

$$[J_z, T_{\kappa}^{(k)}] = \kappa T_{\kappa}^{(k)},$$

$$[J_{\pm}, T_{\kappa}^{(k)}] = \sqrt{k(k+1) - \kappa(\kappa \pm 1)} T_{\kappa \pm 1}^{(k)},$$

em particular, mostre que um operador escalar é um operador tensorial irredutível de ordem $k = 0$ e que as três componentes de um operador vetorial padrão são as componentes de um operador tensorial irredutível de ordem $k = 1$.

- (b) Seja $\{|\alpha JM\rangle\}$ uma base de auto-estados comuns de $\mathbf{J}^2$, e J_z . Usando as regras de comutação mostre que $\langle \alpha JM | T_{\kappa}^{(k)} | \alpha' J' M' \rangle$ é nulo se M for diferente de $\kappa + M'$.
- (c) Usando as regras de comutação mostre que os $(2J+1)(2k+1)(2J'+1)$ elementos de matriz $\langle \alpha JM | T_{\kappa}^{(k)} | \alpha' J' M' \rangle$ que correspondem a valores fixos de α, J, α', J' , verificam as mesmas relações de recorrência satisfeitas pelos $(2J+1)(2k+1)(2J'+1)$ coeficientes de Clebsch-Gordan $\langle J' M' k \kappa | JM \rangle$ correspondentes a valores fixos de J, k, J' .
- (d) Deduzir da relação que você encontrou acima que

$$\langle \alpha JM | T_{\kappa}^{(k)} | \alpha' J' M' \rangle \propto \langle J' M' k \kappa | JM \rangle.$$

- (e) Obtenha o coeficiente de proporcionalidade a partir da lei de transformação que define um operador tensorial, integrando os elementos de matriz sobre R . Isso completa a demonstração do teorema de Wigner-Eckart.

② Mostre que:

- (a) $T_{\kappa}^{(k)}|0\rangle$, onde $|0\rangle$ é um estado de momento angular nulo, transforma sob rotações como o autoestado de momento angular $|k\kappa\rangle$.
- (b) Se $U^{(k_1)}$ e $V^{(k_2)}$ são operadores tensoriais de ordem k_1 e k_2 , então vale a lei de composição

$$U_{\kappa_1}^{(k_1)} V_{\kappa_2}^{(k_2)} = \sum_{k\kappa} \langle k_1\kappa_1 k_2\kappa_2 | k\kappa \rangle T_{\kappa}^{(k)},$$

$$T_{\kappa}^{(k)} = \sum_{\kappa_1\kappa_2} \langle k\kappa | k_1\kappa_1 k_2\kappa_2 \rangle U_{\kappa_1}^{(k_1)} V_{\kappa_2}^{(k_2)}.$$

③ Seja $V^{(k_1)}$ um operador tensorial irredutível de ordem k_1 agindo sobre o espaço dos estados $\mathcal{E}_1$, seja $W^{(k_2)}$ um operador tensorial irredutível de ordem k_2 agindo sobre o espaço dos estados $\mathcal{E}_2$. Construimos a partir deles o operador

$$T_{\kappa}^{(k)} = [V^{(k_1)} \otimes W^{(k_2)}]_{\kappa}^{(k)} = \sum_{\kappa_1\kappa_2} \langle k\kappa | k_1\kappa_1 k_2\kappa_2 \rangle V_{\kappa_1}^{(k_1)} W_{\kappa_2}^{(k_2)}.$$

(a) Mostre que o operador

$$\sum_{\kappa} (-1)^{\kappa} V_{\kappa}^{(k)} W_{-\kappa}^{(k)}$$

é um operador escalar.

(b) Mostre que com a escolha de normalização conveniente

$$[V^{(1)} \otimes W^{(1)}]_0^{(0)} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{W}.$$

- (c) Encontre a relação entre os operadores $[V^{(1)} \otimes W^{(1)}]_{\kappa}^{(1)}$ e as componentes do operador produto vetorial $\mathbf{V} \times \mathbf{W}$.
- (d) Exprima as cinco componentes de $[V^{(1)} \otimes W^{(1)}]_{\kappa}^{(2)}$ em função de V_z , $V_{\pm}$, W_z e $W_{\pm}$. Se $\mathbf{V} = \mathbf{W} = \mathbf{R}$, onde $\mathbf{R}$ é o operador de posição de uma partícula, Qual a interpretação física do operador tensorial que você acabou de construir?

- ④ Mostre que para uma partícula sem spin, os operadores de momento multipolar elétrico $\mathcal{Q}_l^m$ são operadores tensoriais irredutíveis de ordem l no espaço dos estados $\mathcal{E}_r$ dessa partícula. Mostre também que levamos em conta os graus de liberdade de spin, os operadores $\mathcal{Q}_l^m$ continuam operadores tensoriais irredutíveis no espaço dos estados $\mathcal{E}_r \otimes \mathcal{E}_s$. Lembremos que para uma partícula de carga q sob ação de um potencial eletrostático, podemos definir o operador energia potencial $U(\mathbf{R})$ em termos dos operadores de momento multipolar elétrico como

$$V(\mathbf{R}) = q U(\mathbf{R}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{lm} \mathcal{Q}_l^m(\mathbf{R}),$$

cujos elementos de matriz na representação $\{|\mathbf{r}\rangle\}$ são

$$\langle \mathbf{r} | \mathcal{Q}_l^m | \mathbf{r}' \rangle = q \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} r^l Y_{lm}(\theta, \phi) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

- ⑤ Usando os resultados acima, deduza as regras de seleção que devem ser satisfeitas por $\mathcal{Q}_l^m$ na base padrão $\{|\alpha l J M\rangle\}$ obtida pela composição dos momentos angulares orbital $\mathbf{L}$ e de spin $\mathbf{S}$ da partícula para formar o momento angular total $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, $l(l+1)$, $J(J+1)$ e M são, respectivamente, os autovalores dos operadores $\mathbf{L}^2$, $\mathbf{J}^2$ e J_z .