



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Elementos de Máquinas para Automação

PMR 3307 - A04

Teorias de Falha

2020.2



Cronograma de aulas

Dia	S	Aula	Tópico	Prof.
18.08	3ª	A1	Introdução a disciplina Modelagem, carregamento e equilíbrio	RS
21.08	6ª	A2	Comportamento mecânico dos materiais	RS
25.08	3ª	A3	Composição de tensões Estado plano de tensões - Círculo de Mohr	RS
28.08	6ª	A4	Teorias de Falha: 1) Falha por deformação excessiva; fundamentos	RS
01.09	3ª	A5	Teorias de Falha: 2) Falha por deformação permanente: von Mises, Tresca, Coulomb-Mohr;	RS
04.09	6ª	A6	Teorias de Falha: 3) Falha por fadiga: Parte - 1	RS
08.09	3ª	A7	Teorias de Falha: 3) Falha por fadiga: Parte - 2	RS
11.09	6ª	A8	Teorias de Falha: 4) Falha por instabilidade: flambagem	RS
15.09	3ª	A9	Teorias de Falha: 5) Falha por impacto: Parte - 1	RS
18.09	6ª	A10	Teorias de Falha: 6) Falha por impacto: Parte - 2	RS
22.09	3ª	A11	Teorias de Falha: 6) Falha por desgaste excessivo	RS
25.09	6ª	A12	Fixações cubo-eixo	NG
29.09	3ª	A13	Especificação e dimensionamento de elementos de fixação: Rebites	NG
02.10	6ª	A14	Especificação e dimensionamento de elementos de fixação: Parafusos: Parte - 1	NG
06.10	3ª	A15	Especificação e dimensionamento de elementos de fixação: Parafusos: Parte - 2	NG
09.10	6ª	A16	Especificação e dimensionamento de elementos de transmissão: Fusos	NG
13.10	3ª	A17	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Mancais: Parte - 1	NG
16.10	6ª	A18	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Mancais: Parte - 2	NG
20.10	3ª	A19	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Molas: Parte - 1	NG
23.10	6ª	A20	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Molas: Parte - 2	NG
27.10	3ª	A21	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Freios e embreagens	NG
30.10	6ª	A22	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Correias e Correntes	NG
03.11	3ª	A23	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Engrenagens: Parte - 1	RS
06.11	6ª	A24	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Engrenagens: Parte - 2	RS
10.11	3ª	A25	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Engrenagens: Parte - 3	RS
13.11	6ª	A26	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Engrenagens: Parte - 4	RS
17.11	3ª	---	Feriado municipal - Consciência Negra	
20.11	6ª	A27	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Guias de escorregamento	RS
24.11	3ª	A28	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Guias lineares	RS
27.11	6ª	A29	Apresentação dos trabalhos	RS
01.12	3ª	A30	Apresentação dos trabalhos	
04.12	6ª	A29	Apresentação dos trabalhos	
08.12	3ª	A30		
11.12	6ª	A31		
14.12	2ª		Encerramento do semestre 2020-2	



Tópicos

- ▶ Introdução a teorias de falha
- ▶ Critérios de escoamento e de fratura
- ▶ Teoria da Máxima Tensão Cisalhante
- ▶ Teoria da Máxima Energia de Distorção
- ▶ Teoria de Coulomb-Mohr para materiais dúcteis
- ▶ Teoria da Máxima Tensão Normal
- ▶ Teoria da Falha frágil Coulomb-Mohr
- ▶ Teoria de Mohr modificada para materiais frágeis



Introdução a teoria de Falha

Um Sábado Qualquer

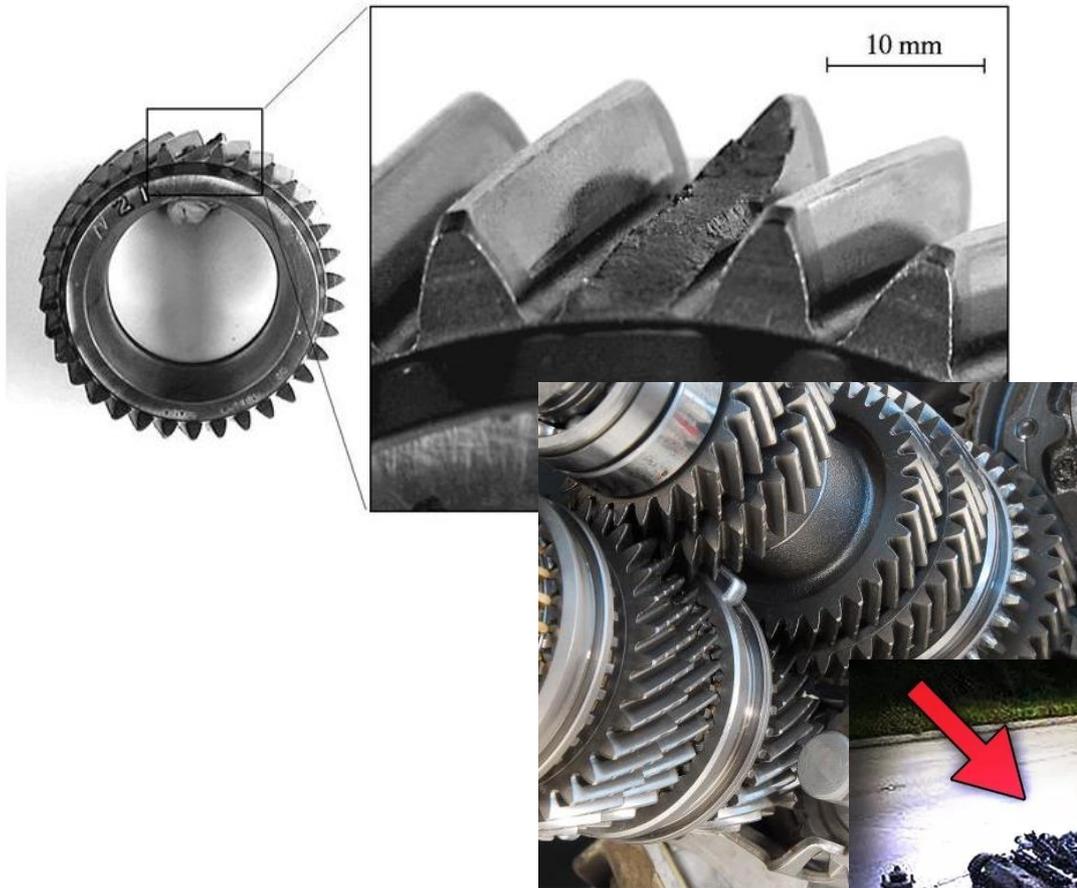
Carlos Ruan



O 4º LIVRO JÁ ESTÁ NO [catarse](#) LINK NA DESCRIÇÃO



Introdução a teoria de Falha





Introdução a teoria de Falha





Introdução a teoria de Falha



Era para considerar flexão?





Introdução a teoria de falha



**Espero que o
assento ejetor
tenha sido bem
projetado**





Introdução a teoria de falha





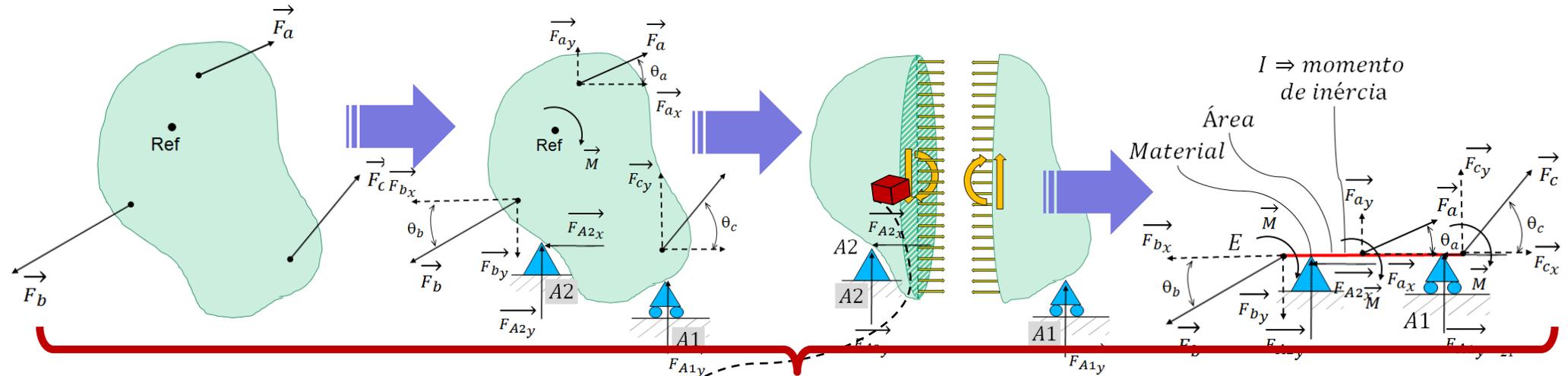
Introdução a teoria de falha

**Será que foi o
conteúdo
daquela aula
que eu perdi?**

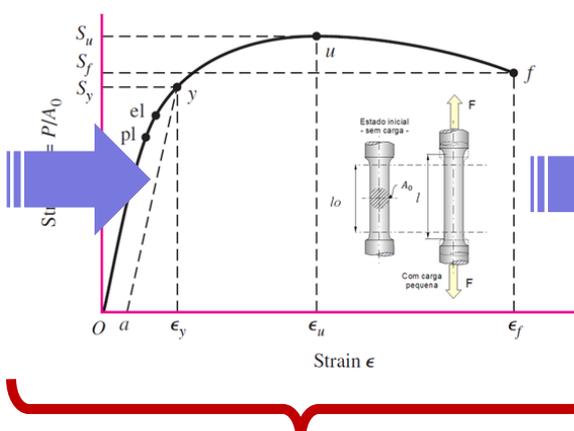




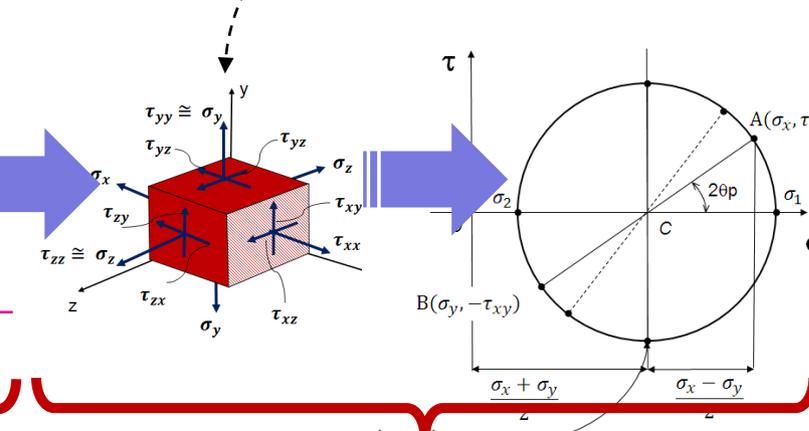
Introdução a teoria de Falha



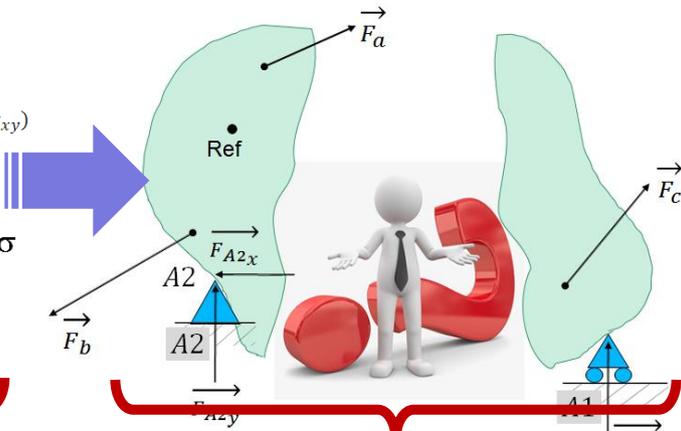
Aula 01



Aula 02



Aula 03

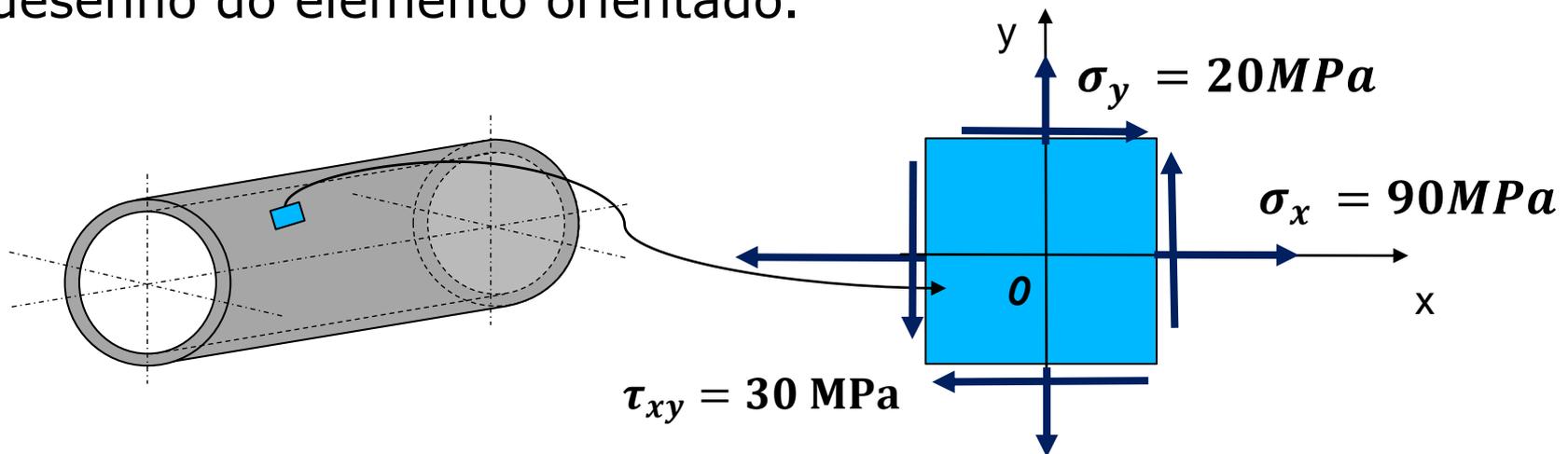


Aula 04
HOJE!!!



Exemplo 1

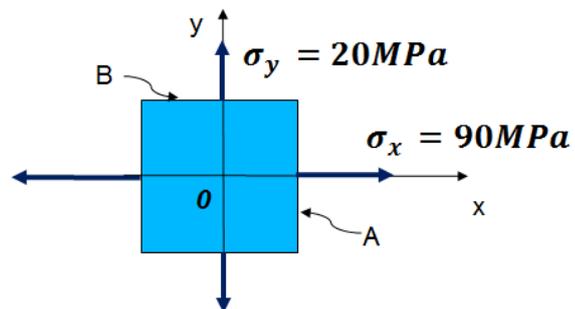
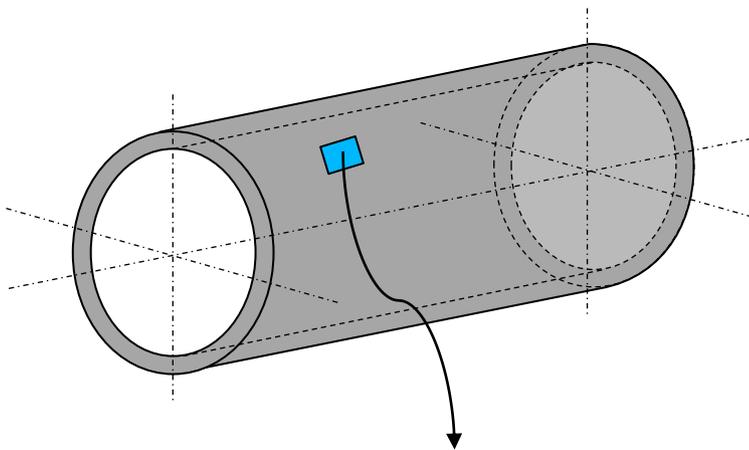
- ▶ Considere um ponto na superfície de um cilindro pressurizado. O material está sujeito a um estado biaxial de tensões $\sigma_x = 90\text{MPa}$, $\sigma_y = 20\text{MPa}$, e $\tau_{xy} = 30,3\text{MPa}$, conforme mostrado no elemento abaixo. Construa o círculo de Mohr e determine as tensões atuantes em um elemento inclinado a $\theta=30^\circ$. Considere somente o estado plano de tensões, e mostre um desenho do elemento orientado.





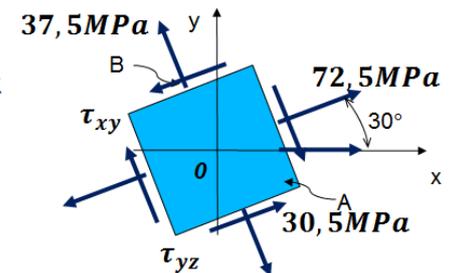
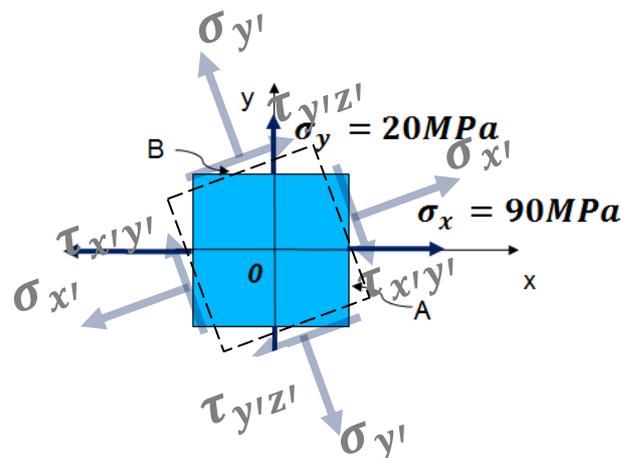
Exemplo 1

- ▶ Dados: $\sigma_x = 90\text{MPa}$, $\sigma_y = 20\text{MPa}$, e $\tau_{xy} = 30\text{MPa}$
- ▶ Determinar as tensões atuantes em um elemento inclinado a $\theta = 30^\circ$
- ▶ Considerar: estado plano de tensões.



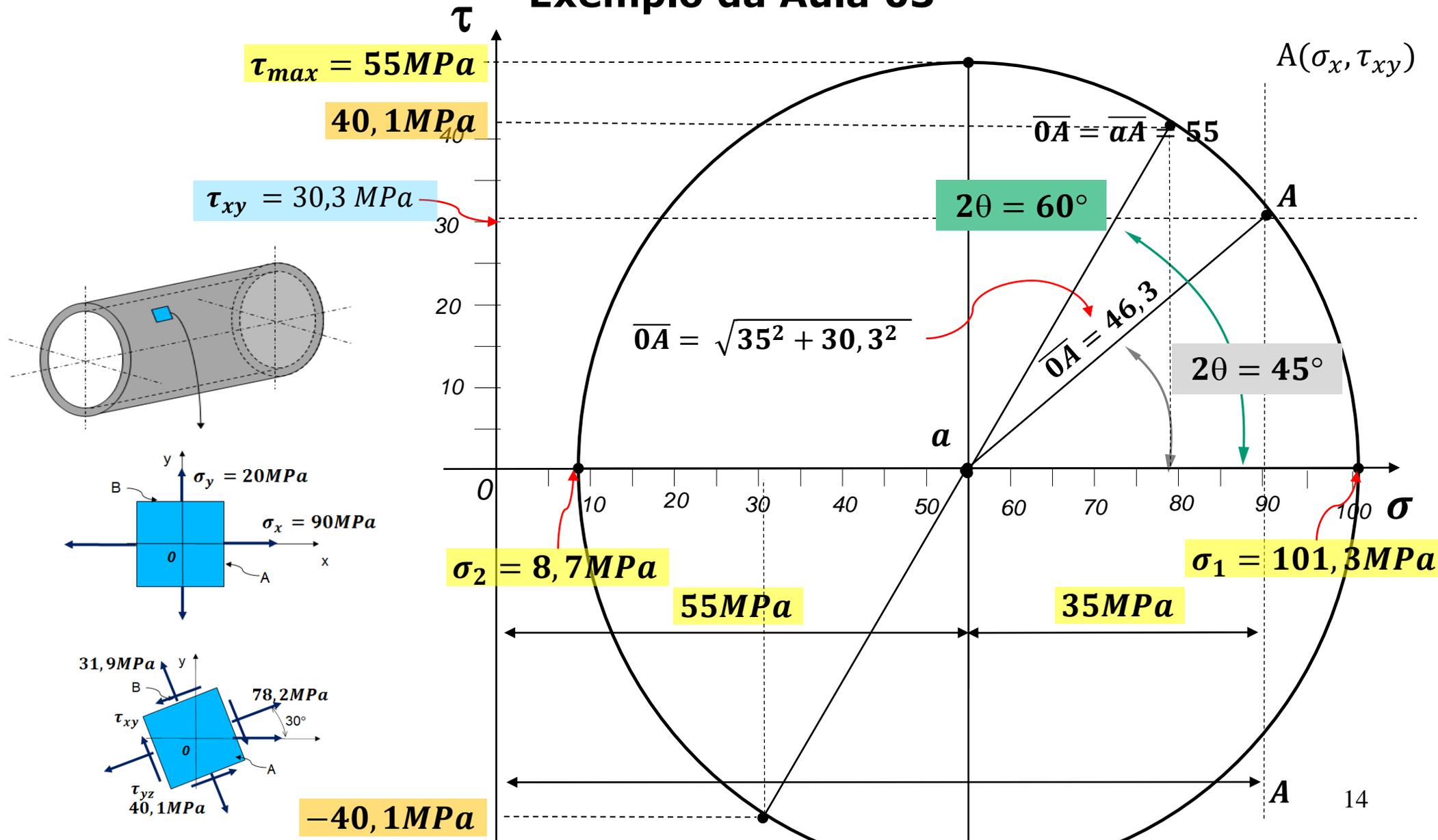
$$a = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{90 + 20}{2} = \frac{110}{2} = 55\text{MPa}$$

$$b = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{90 - 20}{2} = \frac{70}{2} = 35\text{MPa}$$





Exemplo da Aula 03





Critérios de escoamento e de fratura

▶ Para materiais dúcteis

- Máxima tensão cisalhante - *Maximum shear stress*
- Máxima energia de distorção - *Maximum distortion energy*
- Teoria Coulomb-Mohr para materiais dúcties

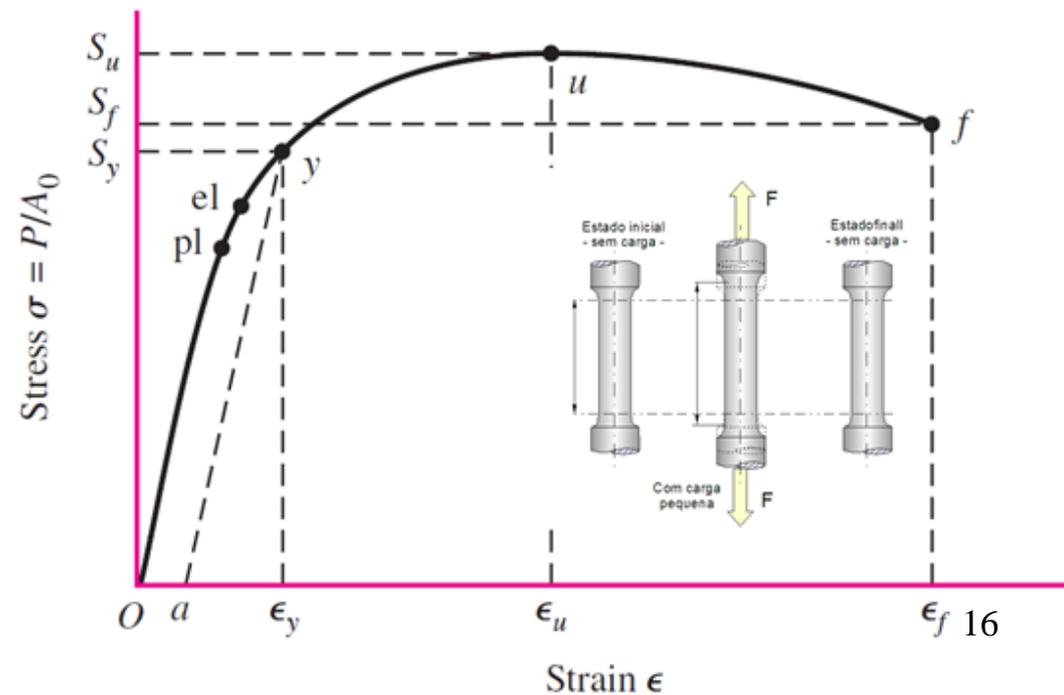
▶ Para materiais frágeis

- Máxima tensão normal - *Maximum normal stress*
- Falha frágil Coulomb-Mohr - *Brittle Coulomb-Mohr*
- Mohr modificado - *Modified Mohr*



Critérios de escoamento e de fratura

- ▶ Quando um elemento de máquina está submetido a carregamentos axiais ou torcionais puros, as tensões calculadas podem ser associadas a um resultado experimental análogo para o mesmo material.
- ▶ Isto permite prever com alto grau de precisão o comportamento com relação ao escoamento e a fratura





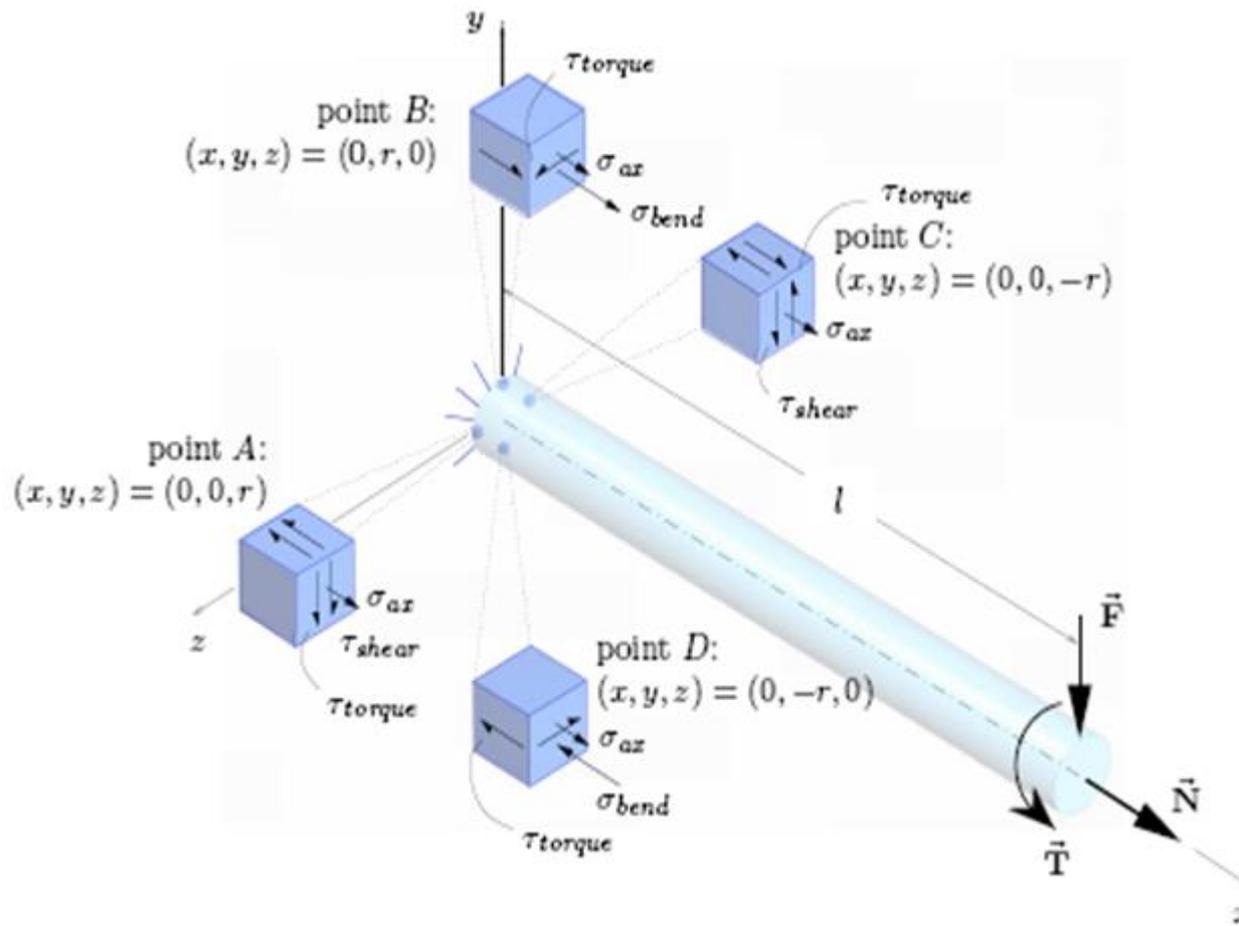
Critérios de escoamento e de fratura

- ▶ Para estados de tensões complexos, comuns aos elementos de máquinas, as aproximações para estado puro de tensão não são mais possíveis
- ▶ Desta forma é necessário estabelecer critérios para comportamento dos materiais com estados de tensões combinados
- ▶ Ainda não existe um critério quantitativo perfeito para determinar o escoamento e a fratura de materiais em estado tensão multiaxiais.



Tensão? Em que ponto?

Onde realizar a análise em um elemento?



point A:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_{ax} = \frac{N}{A} \\ \tau_{xy} &= -\tau_{torque} - \tau_{shear} = -\frac{T_r}{J} - \frac{4F}{3A} \\ \sigma_y &= \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0\end{aligned}$$

point C:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_{ax} = \frac{N}{A} \\ \tau_{xy} &= \tau_{torque} - \tau_{shear} = \frac{T_r}{J} - \frac{4F}{3A} \\ \sigma_y &= \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0\end{aligned}$$

point B:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_{ax} + \sigma_{bend} = \frac{N}{A} + \frac{Flr}{I_z} \\ \tau_{xz} &= \tau_{torque} = \frac{T_r}{J} \\ \sigma_y &= \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0\end{aligned}$$

point D:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_{ax} - \sigma_{bend} = \frac{N}{A} - \frac{Flr}{I_z} \\ \tau_{xz} &= -\tau_{torque} = -\frac{T_r}{J} \\ \sigma_y &= \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0\end{aligned}$$

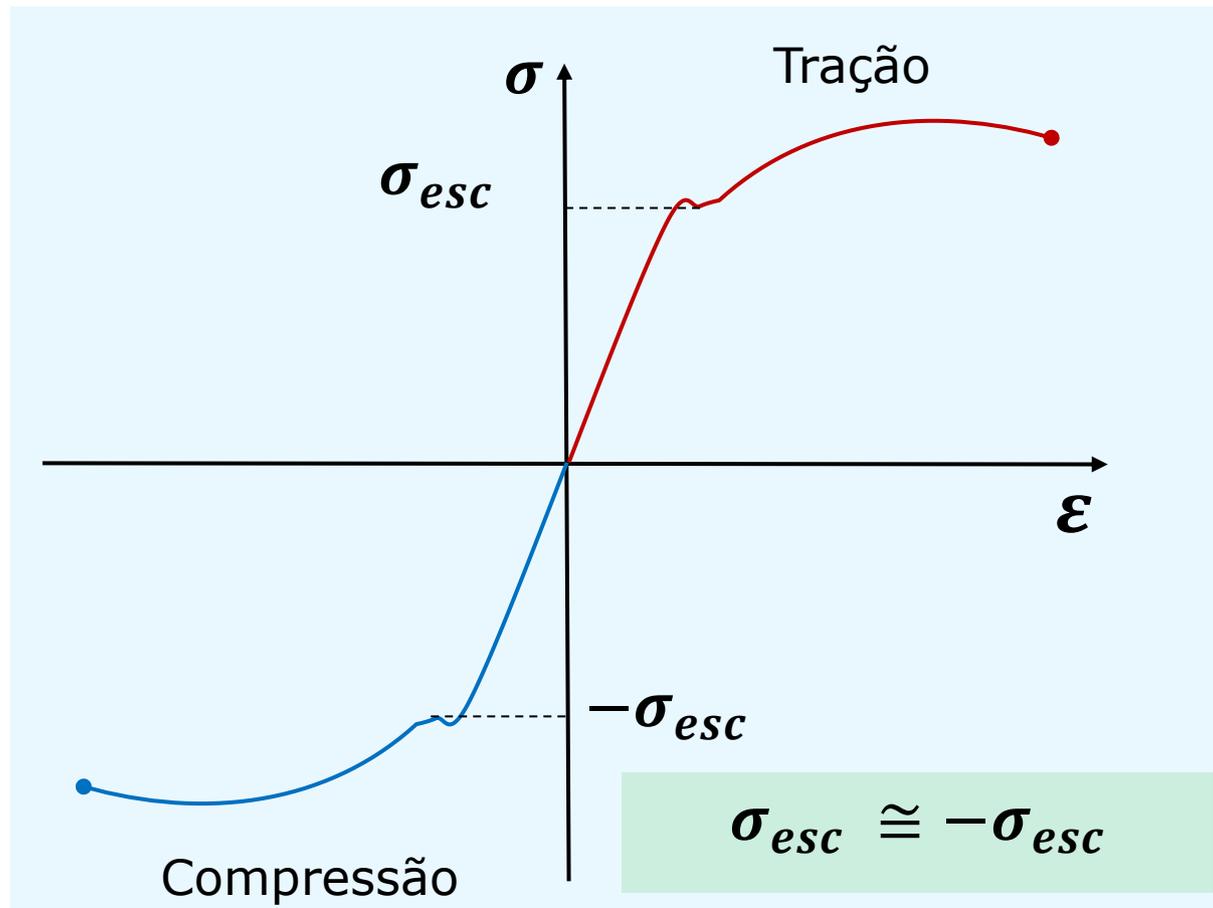


Critérios de Falha para Materiais Dúcteis



Critérios de escoamento e de fratura

► Para materiais dúcteis – Considerações gerais



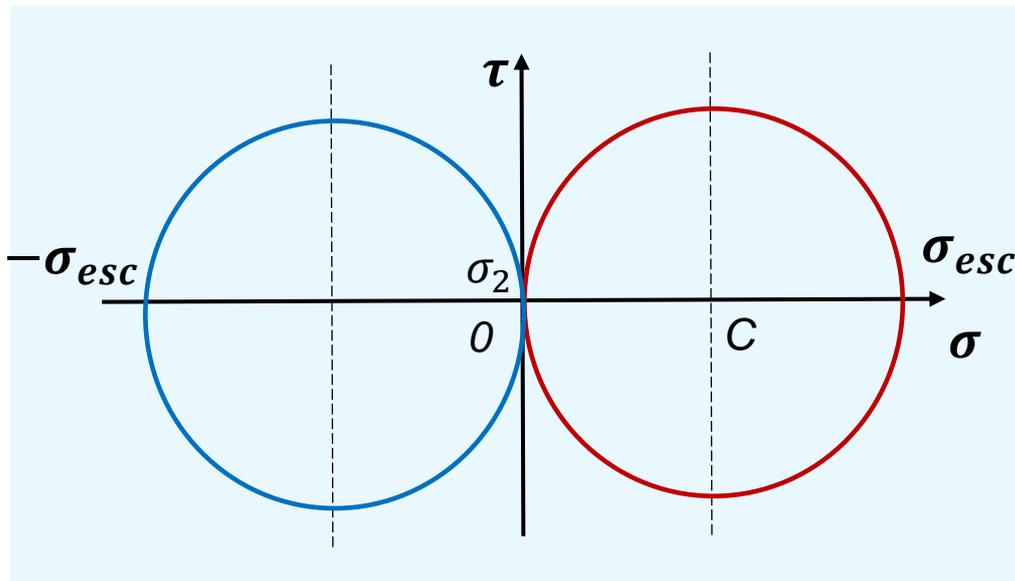
Sobreposição dos resultados dos ensaios de tração e compressão



Critérios de escoamento e de fratura

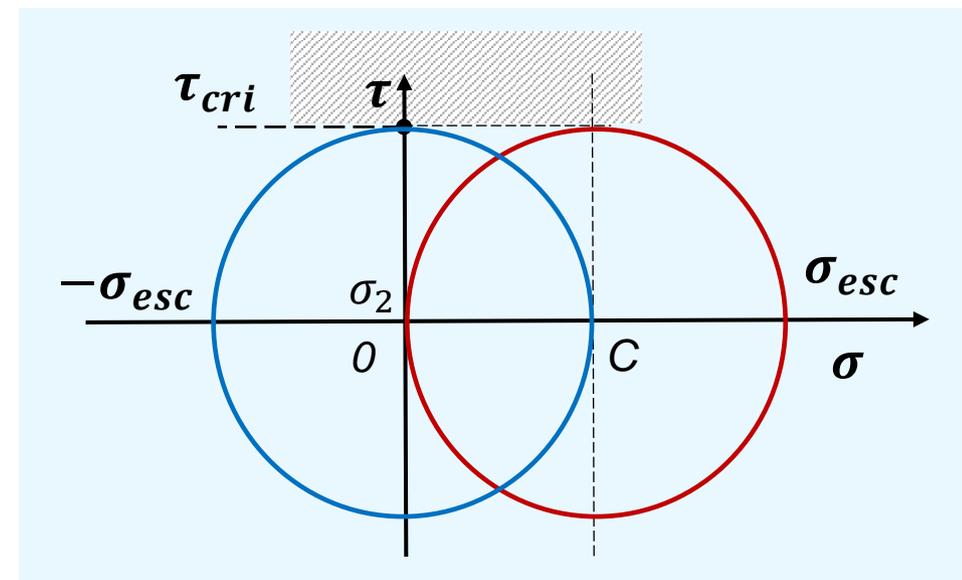
► Para materiais dúcteis – Considerações gerais

Tensões Normais Críticas



Sobreposição dos círculos de Mohr para tração e compressão

Tensões Cisalhantes Críticas



Sobreposição dos círculos de Mohr para ensaios de tração e torção

$$0,5 < \frac{\tau_{cri}}{\sigma_{esc}} < 0,6$$



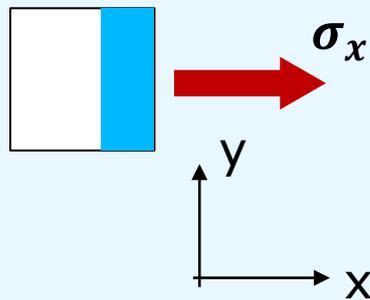
Critérios de escoamento e de fratura

► Para materiais dúcteis – Considerações gerais

Modos de falha

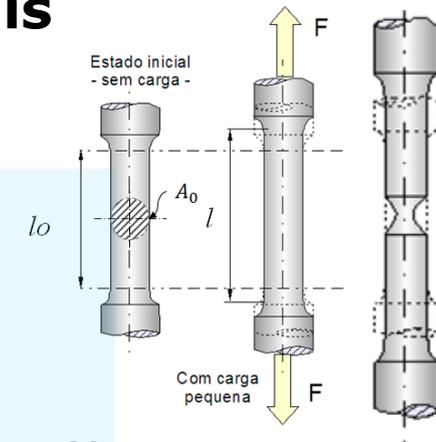
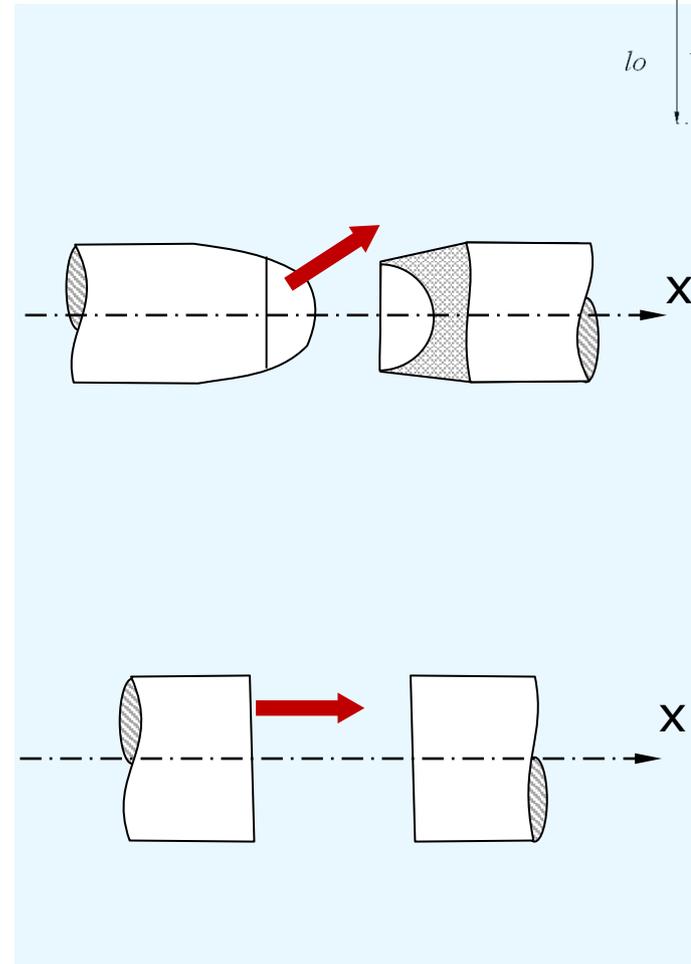
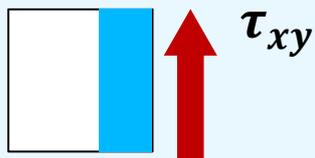
Tração

► Tensões Normais



Torção

► Tensões Cisalhantes



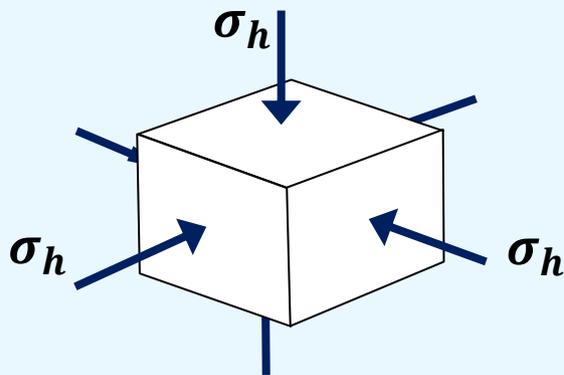


Critérios de escoamento e de fratura

► Para materiais dúcteis – Considerações gerais

Modos de falha

Hidroestática



$$\sigma_{esc} \gg \sigma_h$$

Teorias de falha

- Máxima tensão cisalhante - *Maximum shear stress*
- Máxima energia de distorção - *Maximum distortion energy*
- Teoria Coulomb-Mohr para materiais dúcteis



Teoria da Máxima Tensão Cisalhante

- ▶ Proposta por Coulumb em 1773
- ▶ 1886, Tresca apresenta o trabalho sobre escoamento de metais sob grande pressões
- ▶ A Teoria da Máxima Tensão Cisalhante é usualmente chamada de critério de falha de Tresca, ou simplesmente de critério de Tresca



Teoria da Máxima Tensão Cisalhante

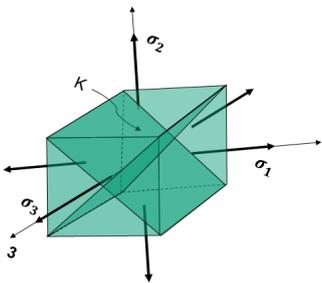
- ▶ Um material dúctil ocorre deslizamento durante escoamento dos planos criticamente orientados.
- ▶ Isto sugere que a tensão cisalhante é dominante
- ▶ O escoamento depende apenas da máxima tensão de cisalhamento alcançada no interior do elemento.
- ▶ Sempre que um valor crítico τ_{cri} é atingido tem-se início o escoamento.



Teoria da Máxima Tensão Cisalhante

- ▶ Assim da equação das tensões cisalhantes máximas (A-08) temos, para um estado de tensão biaxial

$$\tau_{max} = \tau_{cri} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



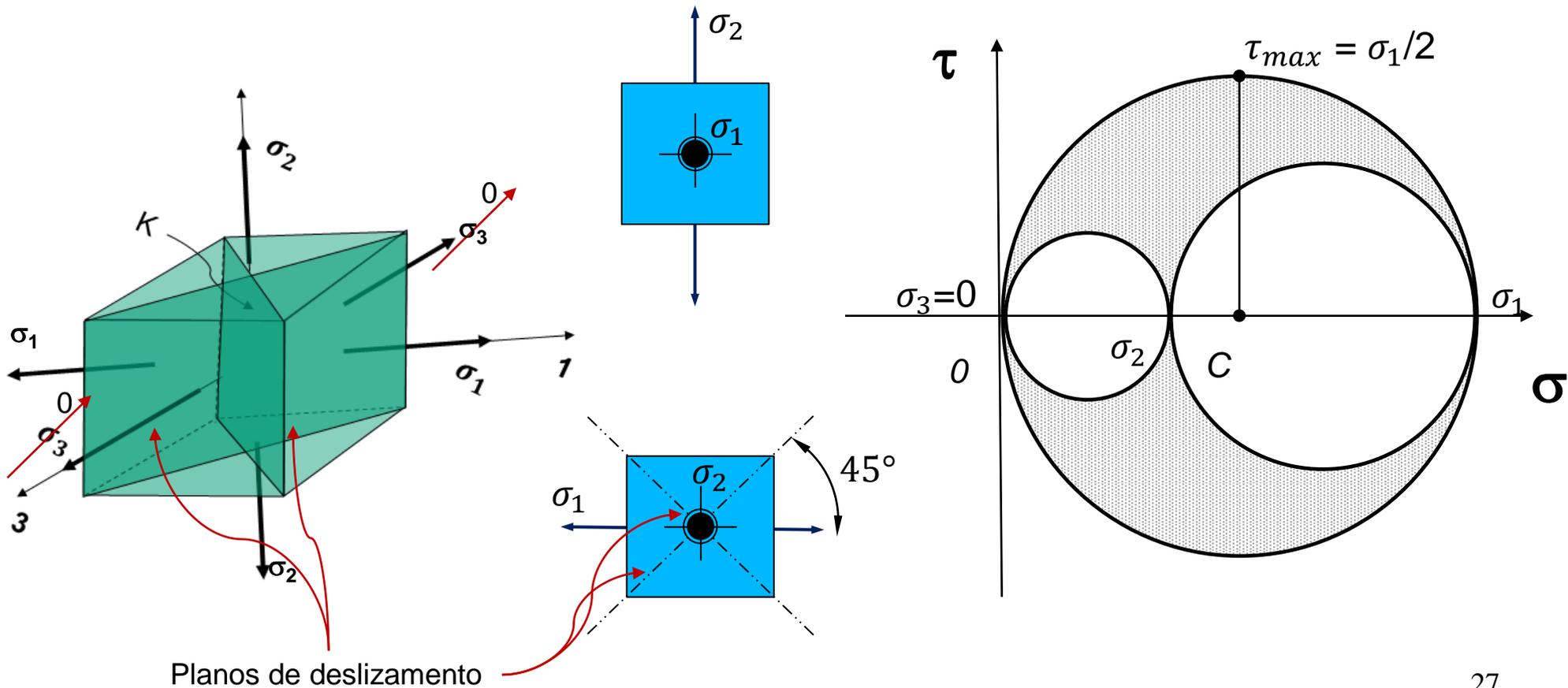
$$\tau_{cri} = \left| \pm \frac{\sigma_1}{2} \right| = \frac{\sigma_{esc}}{2}$$

- ▶ No estado de tensão biaxial devem ser considerados três casos:
 - ▶ $\sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$, σ_1 e σ_2 tem os mesmos sinais (+), $\sigma_3=0$
 - ▶ $\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B$, σ_1 e σ_2 tem sinais opostos, $\sigma_3=0$
 - ▶ $0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B$, σ_1 e σ_2 tem os mesmos sinal (-), $\sigma_3=0$



Teoria da Máxima Tensão Cisalhante

- ▶ Caso onde σ_1 e σ_2 tem os mesmos sinais

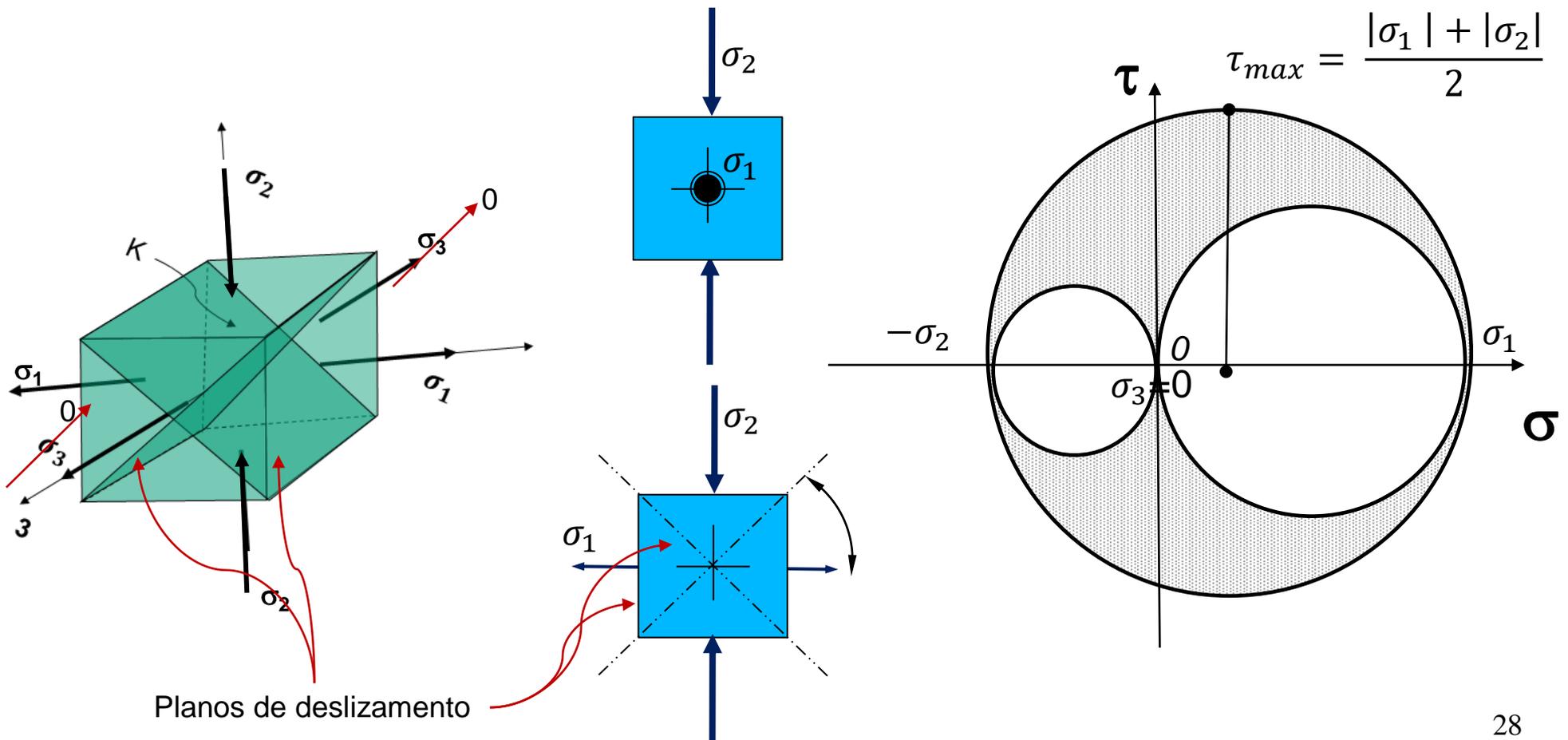


➤ **Considerando materiais isotrópicos**



Teoria da Máxima Tensão Cisalhante

- ▶ Caso onde σ_1 e σ_2 tem sinais opostos

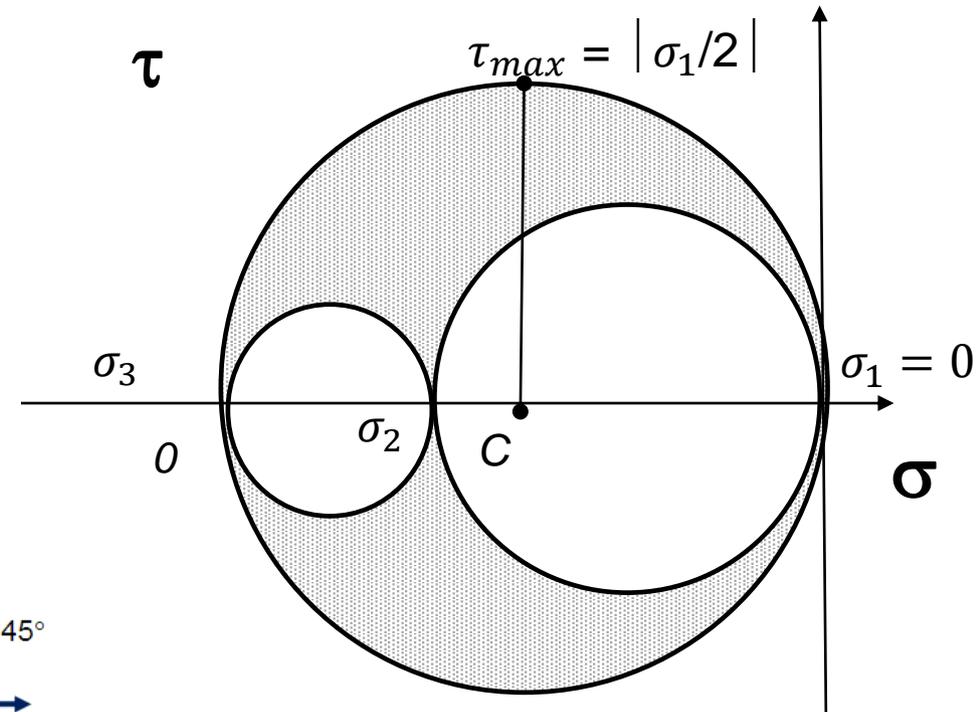
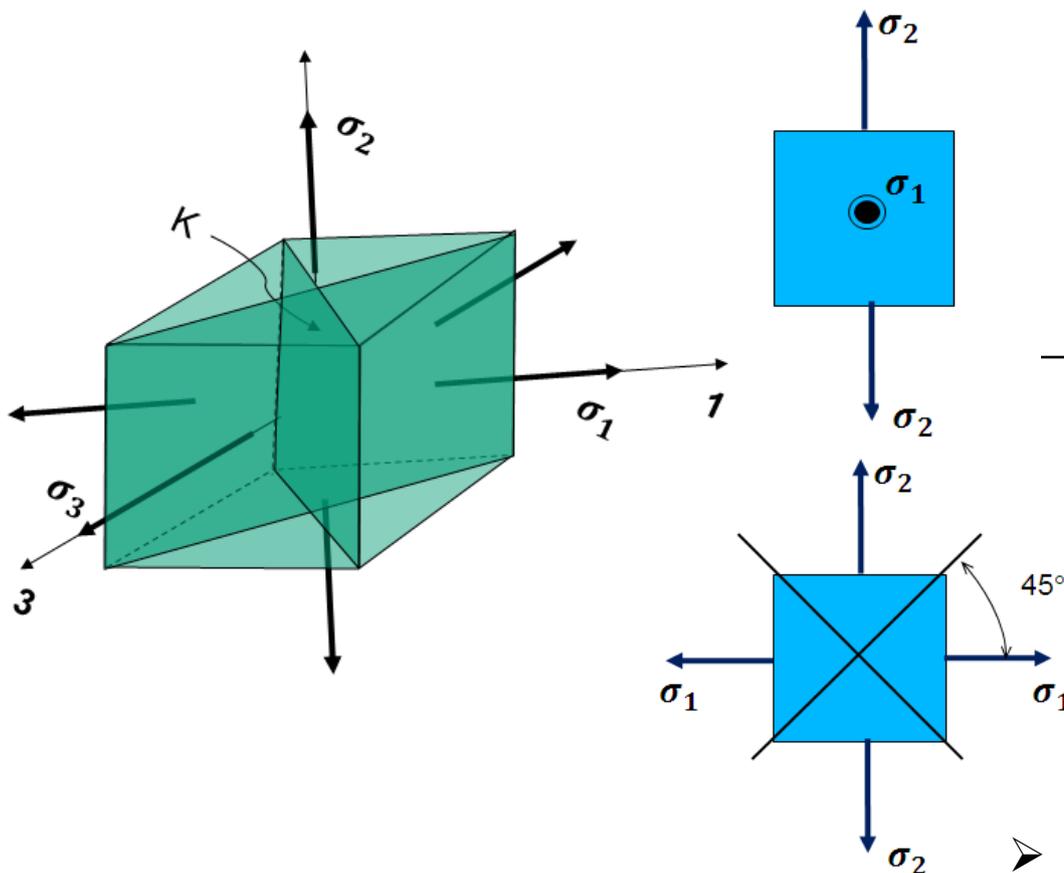


▶ **Considerando materiais isotrópicos**



Teoria da Máxima Tensão Cisalhante

- ▶ Caso onde σ_1 e σ_2 tem os mesmos sinais. $0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B$,
 σ_1 e σ_2 tem os mesmos sinal (-), $\sigma_3 = 0$

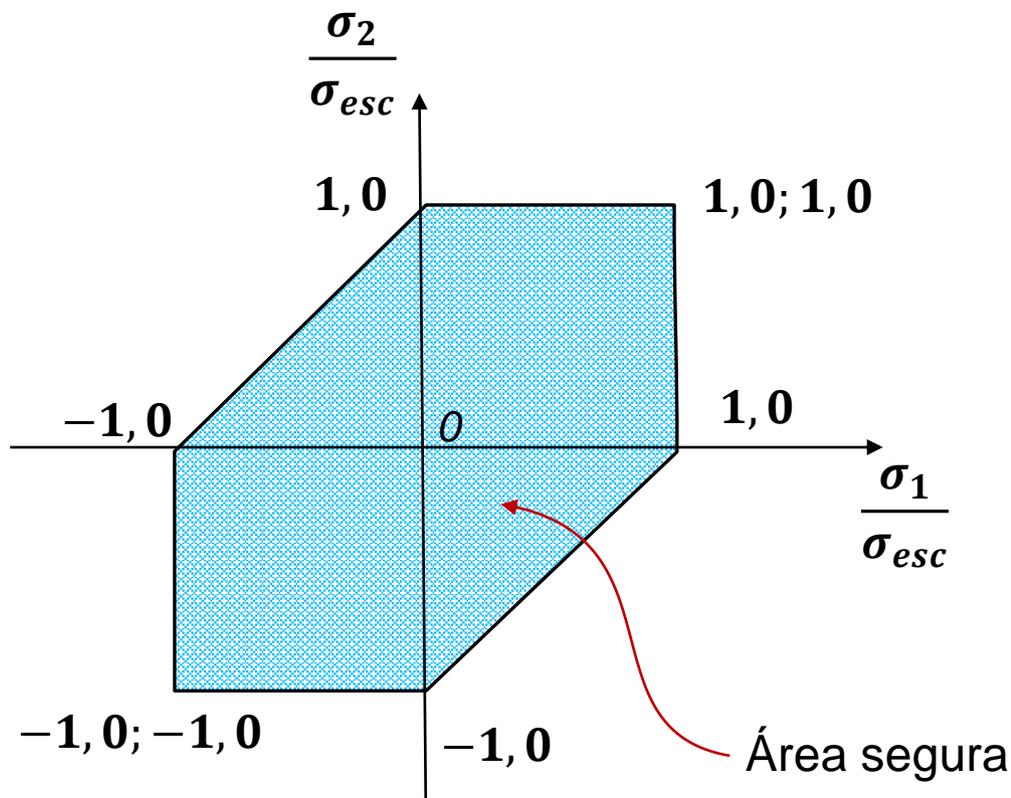


➤ **Considerando materiais isotrópicos**



Teoria da Máxima Tensão Cisalhante

- Para o caso de escoamento iminente



$$\left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right| \leq \frac{\sigma_{esc}}{2}$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{esc}} - \frac{\sigma_2}{\sigma_{esc}} = \pm 1$$

escoamento iminente



Teoria da Máxima Tensão Cisalhante

- ▶ Observem que de acordo com a teoria de Tresca, se forem adicionadas tensões de compressão ou tração hidrostáticas, de tal forma que $\sigma'_1 = \sigma'_2 = \sigma'_3$, nenhuma variação é prevista na resposta do material



Teoria da Máxima Energia de Distorção

- ▶ A Teoria da Máxima Energia de Distorção foi proposta inicialmente por Beltrami em 1885 (primeira tentativa)
- ▶ Huber a apresentou em sua forma atual em 1904.
- ▶ Foi aperfeiçoada e aplicada por von Mises (1913) e Hencky (1925)
- ▶ Usualmente é conhecido como critério de falha de von Mises
- ▶ Usualmente aplicada a materiais plásticos



Teoria da Máxima Energia de Distorção

- ▶ A Teoria da Máxima Energia de Distorção também é outro critério de escoamento amplamente utilizada na previsão de falha de materiais dúcteis.
- ▶ Neste método a energia elástica total é dividida em duas partes:
 - Uma associada as mudanças volumétricas do material
 - E outra causando distorções de cisalhamento

$$U_{total} = U_{dilatação} + U_{distorção}$$



Teoria da Máxima Energia de Distorção

- ▶ Nesta iguala-se a energia de distorção de cisalhamento no ponto de escoamento à tração simples, aquela sob tensão combinada, estabelecendo-se um critério de escoamento para tensão combinada

$$U_{dilatação} = \frac{3(1-2\nu)}{2E} p^2 = \frac{(1-2\nu)}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

$$U_{distorção} = \frac{1}{12G} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

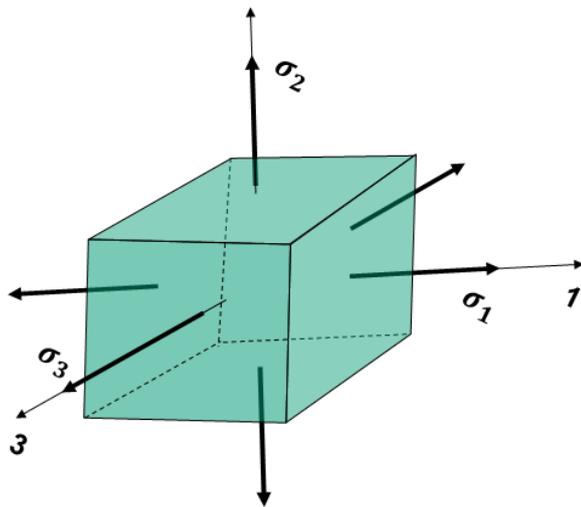
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$U_{total} = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)$$



Teoria da Máxima Energia de Distorção

- Considerando o estado geral de tensões temos:



$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 - \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \bar{\sigma} \end{pmatrix}$$

$$U_{total} = U_d + U_h$$

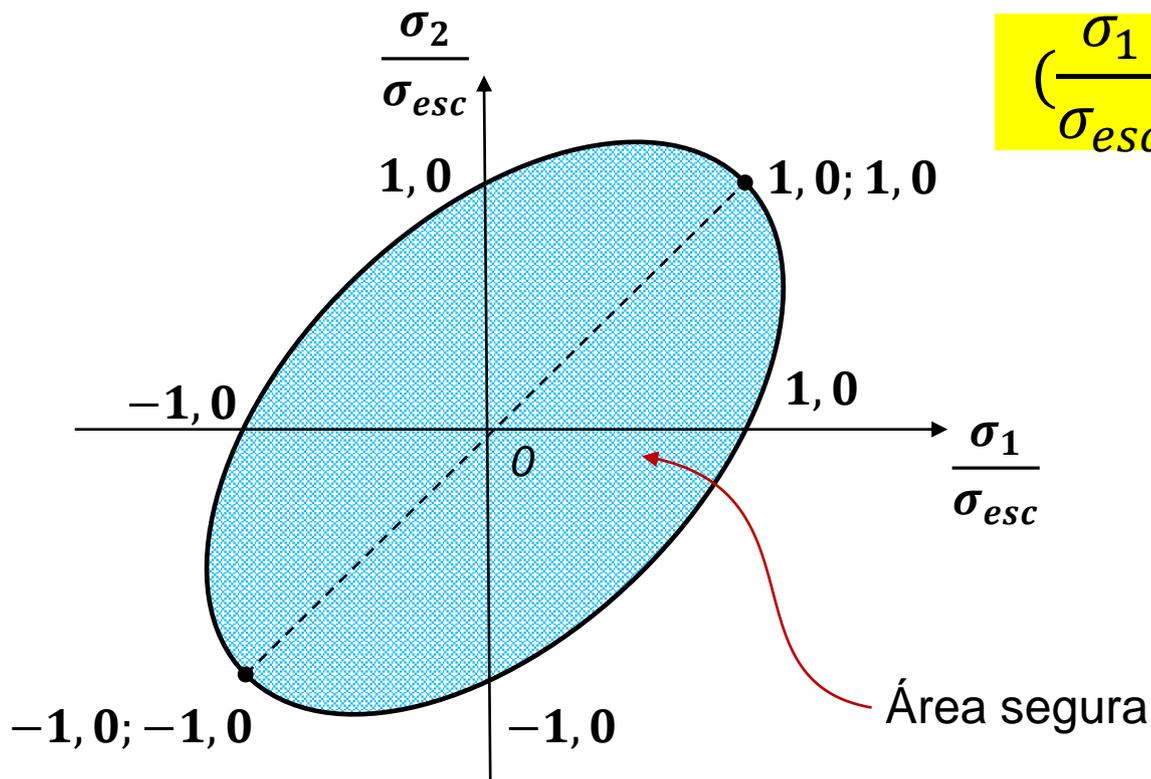
$$U_{total} = \frac{1}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)$$

Considerando material plástico ideal => $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_{esc}^2$



Teoria da Máxima Energia de Distorção

- ▶ Critério de escoamento baseado na máxima energia de distorção
- ▶ Para o estado plano de tensão $\sigma_3 = 0$, temos:



$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{esc}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{esc}} - \frac{\sigma_2}{\sigma_{esc}}\right) + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{esc}}\right)^2 = 1$$

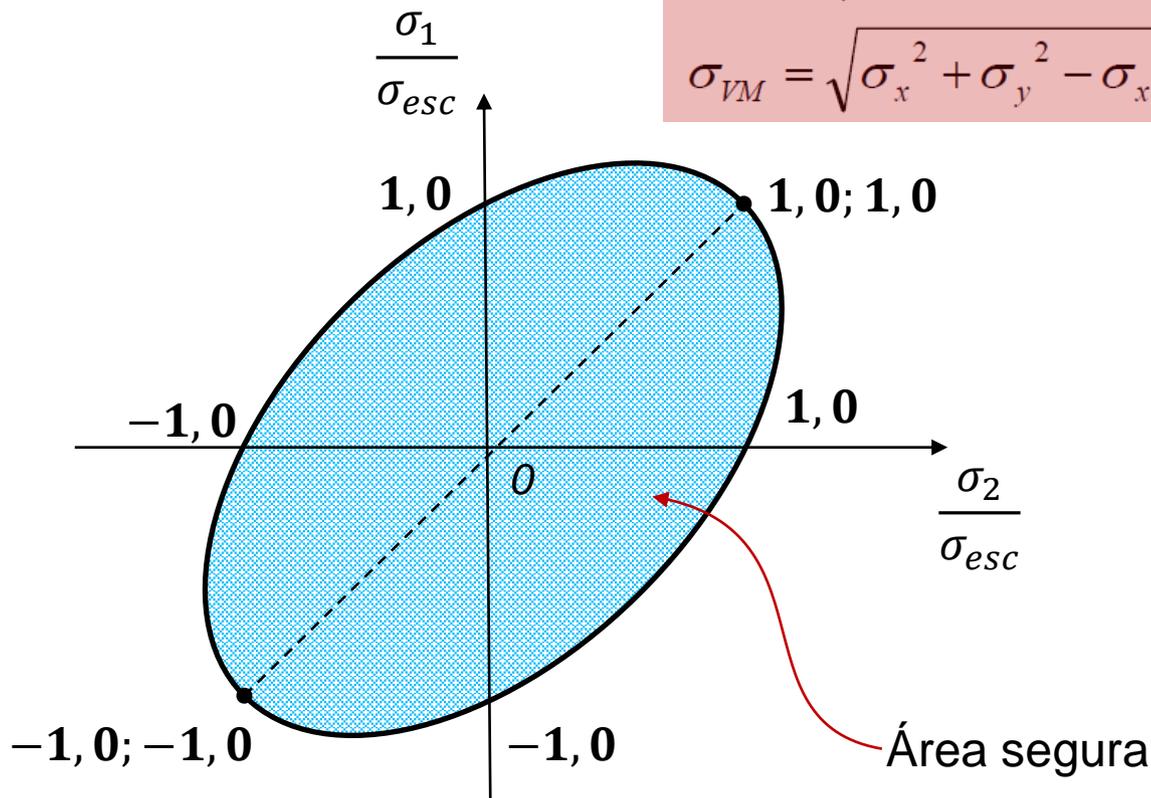
Equação da elipse



Teoria da Máxima Energia de Distorção

- Critério de escoamento baseado na máxima energia de distorção

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}{2}}$$
$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad \text{2D}$$



$$\sigma_{VM} \geq S_y$$

$$n = \frac{S_y}{\sigma_{VM}}$$

Onde **n** = fator de segurança



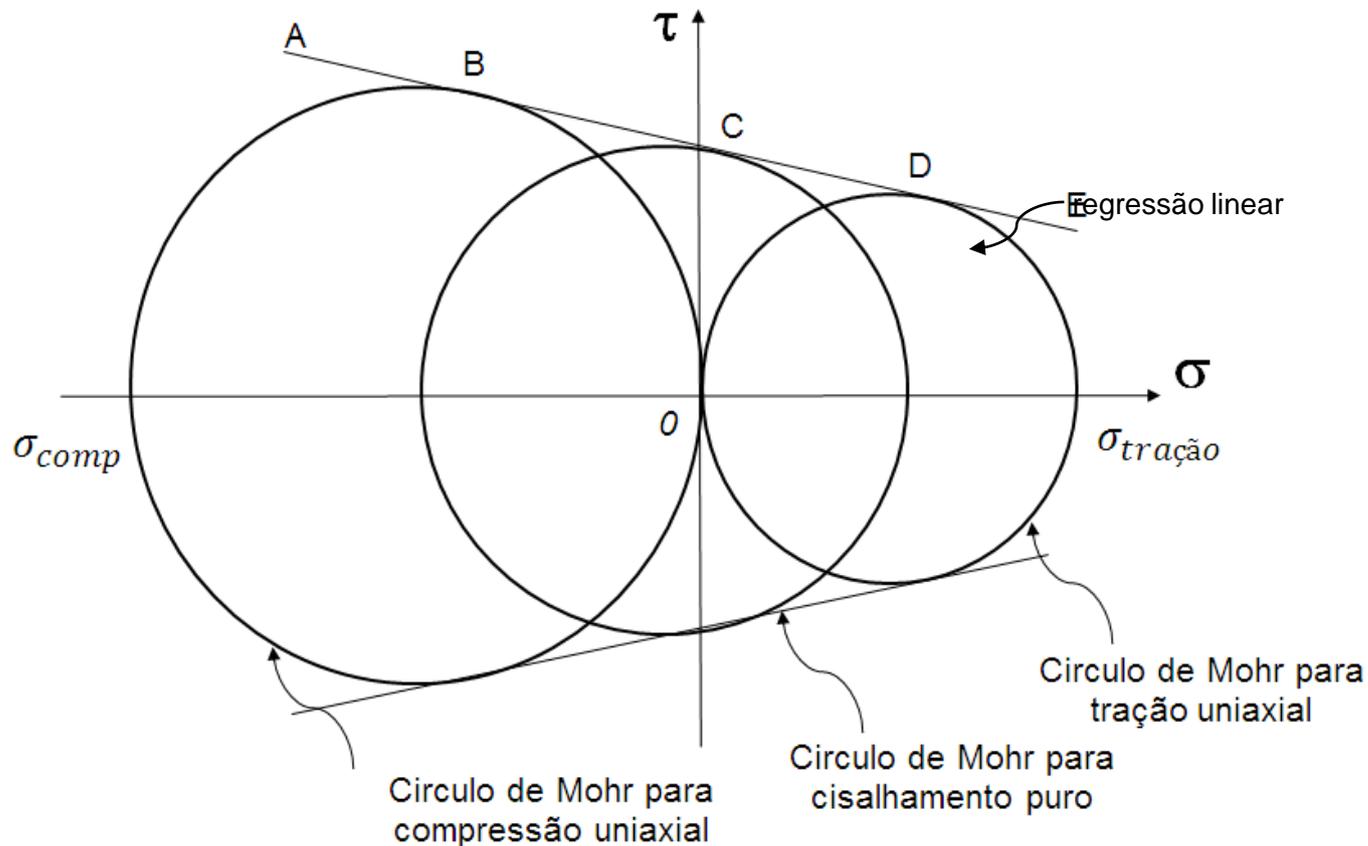
Teoria da Máxima Energia de Distorção

- ▶ Critério de von Mises não prevê mudanças na resposta do material quando se adicionam as tensões de tração e compressão hidrostática.



Teoria de Coulomb-Mohr para materiais dúcteis

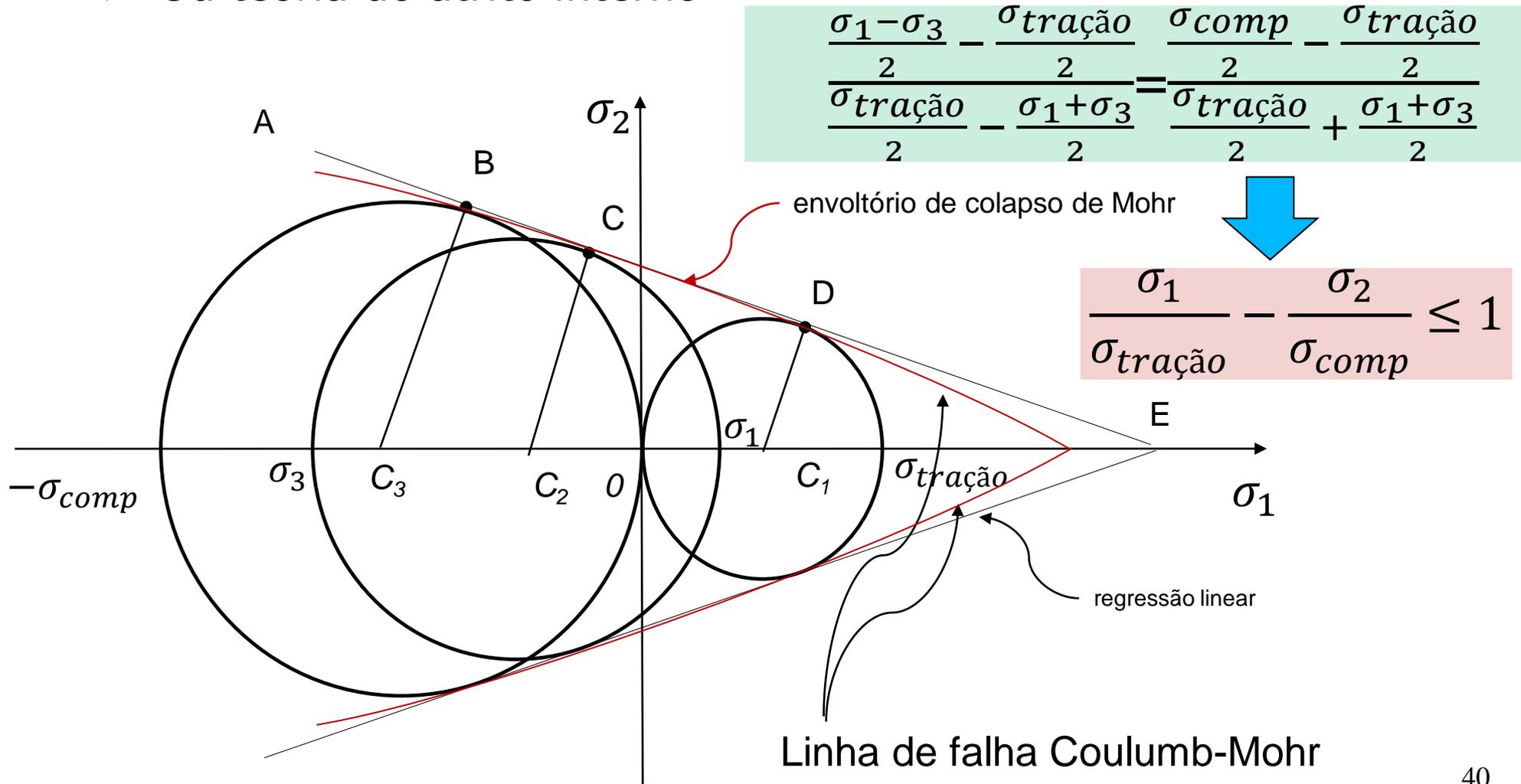
- ▶ Ou teoria do atrito interno
- ▶ $\sigma_1 \geq \sigma_2 > \sigma_3$





Teoria de Coulomb-Mohr para materiais dúcteis

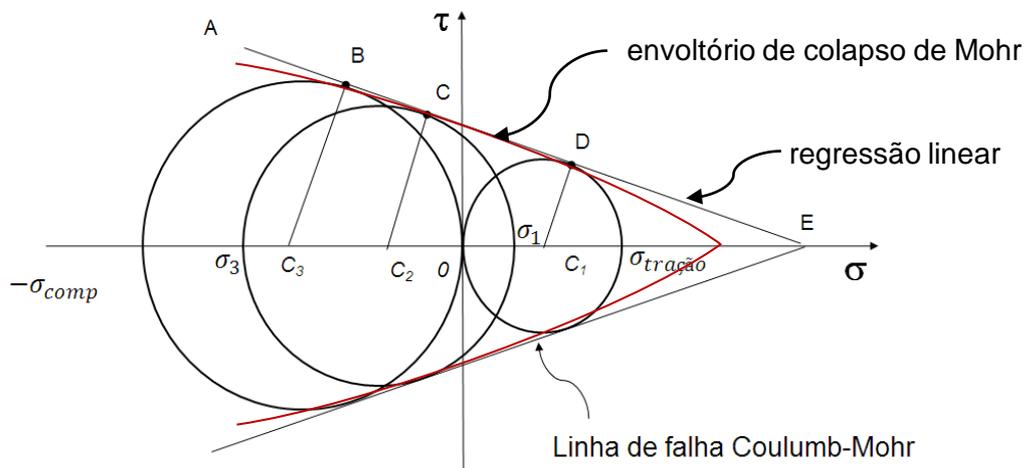
► Ou teoria do atrito interno



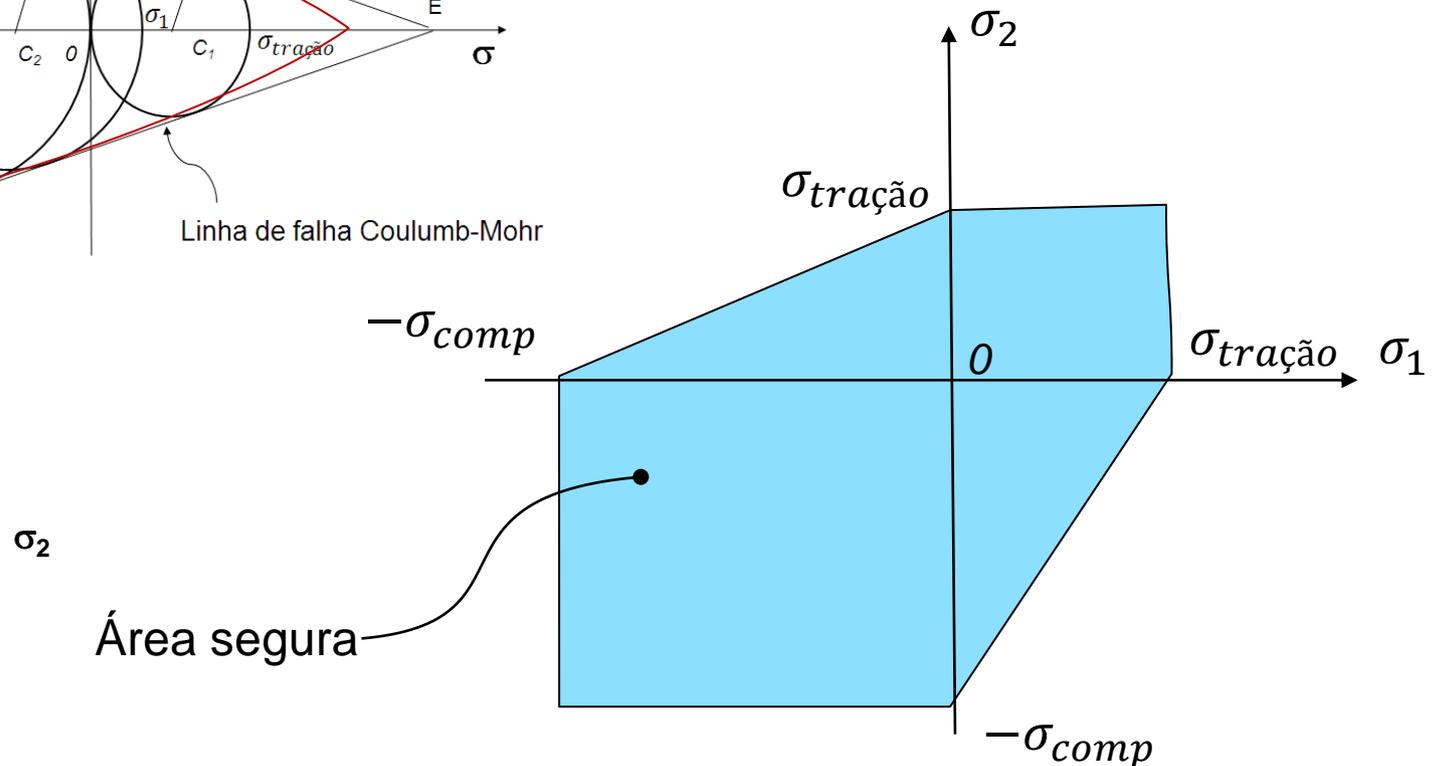


Teoria de Coulomb-Mohr para materiais dúcteis

- ▶ Ou teoria do atrito interno



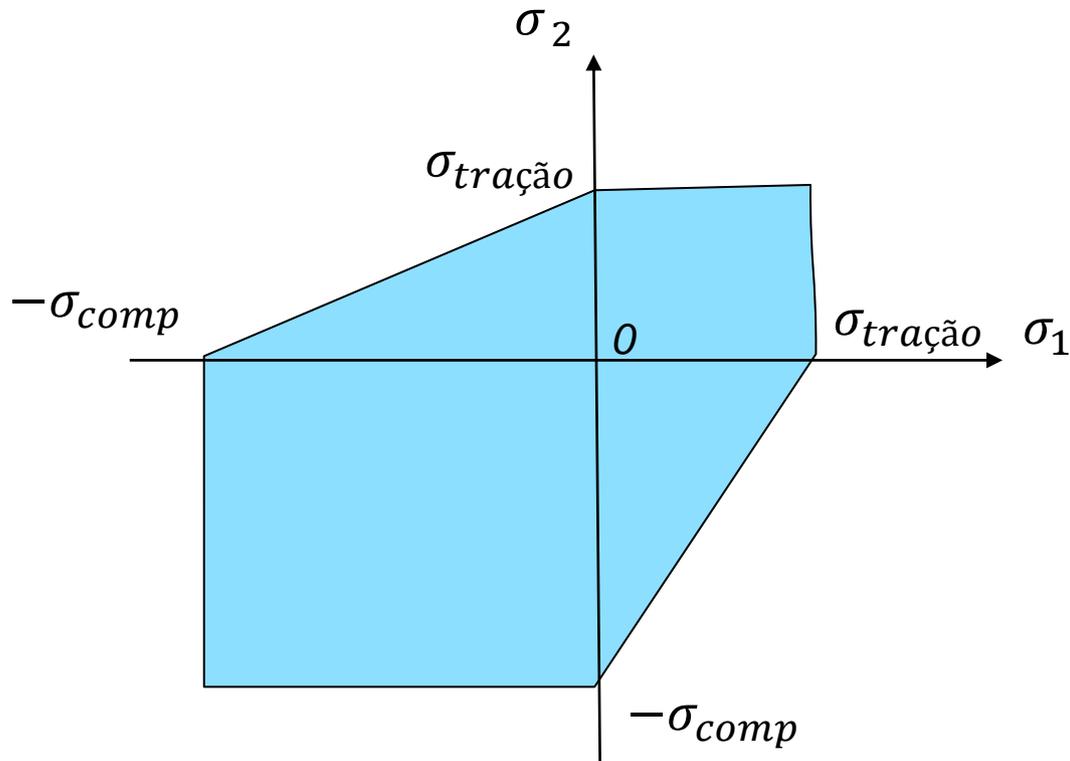
$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{tração}} - \frac{\sigma_2}{\sigma_{comp}} \leq 1$$





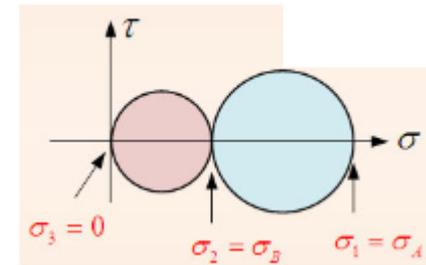
Teoria de Coulomb-Mohr para materiais dúcteis

- ▶ Ou teoria do atrito interno

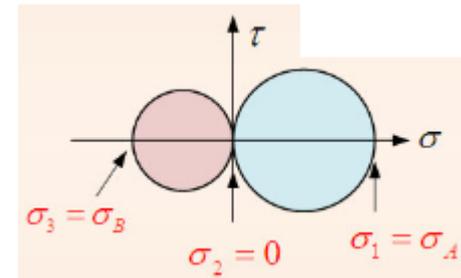


$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{tração}} - \frac{\sigma_2}{\sigma_{comp}} \leq 1$$

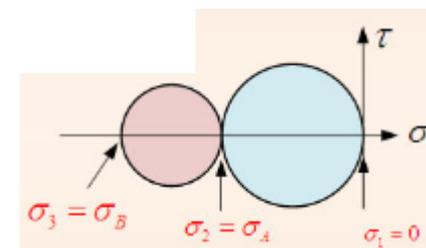
- Caso 1 : $\sigma_A \geq \sigma_R \geq 0$



- Caso 2 : $\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B$



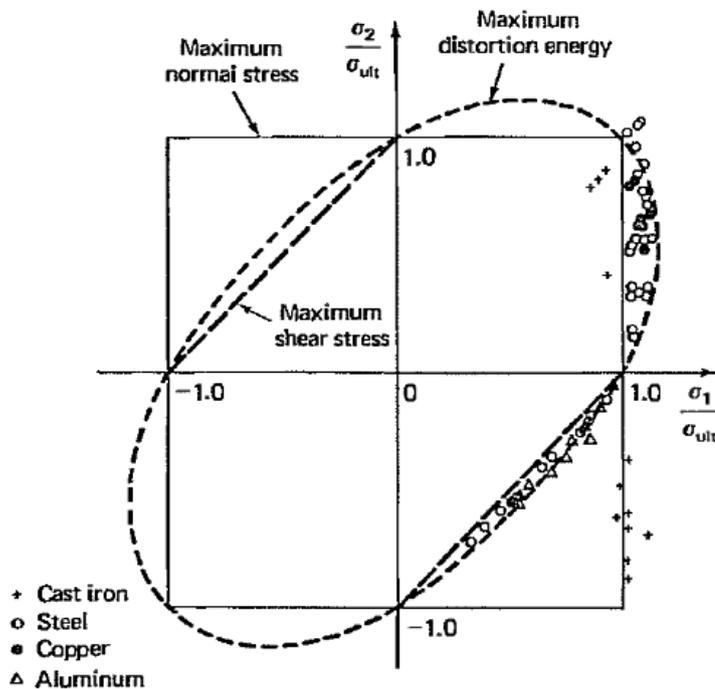
- Caso 3 : $0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B$



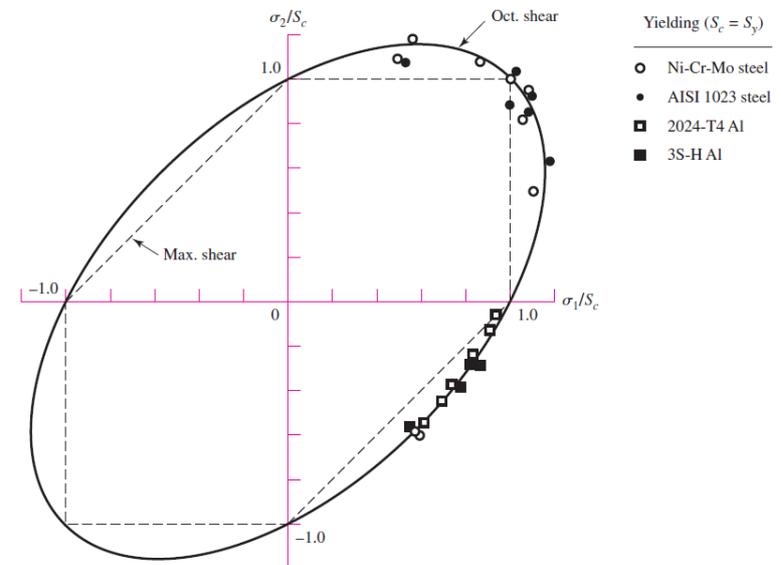


Validade para materiais dúcteis

Dados experimentais sobrepostos as teorias de Tresca e von Mises



Popov, E. P. (Egor Paul)
Engineering mechanics of solids / Egor P. Popov.
p. cm. — (Prentice-Hall international series in civil engineering and engineering mechanics)

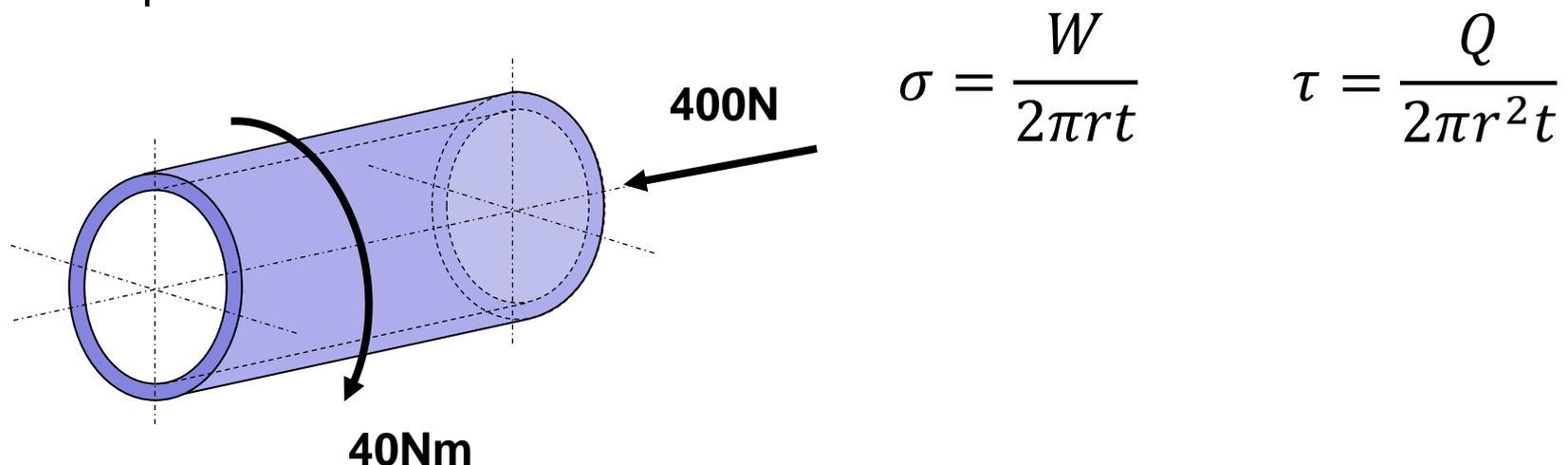


(Shigley, E. Mechanical Engineering Design, 8th Edition, MacGrawHill, 2008)



Exemplo de aplicação

Um eixo para um veículo de propulsão humana é proposto para ser fabricado em tubo de alumínio com tensão de escoamento de 400MPa, e 20mm de diâmetro. Em operação o eixo estará sujeito a um torque de 40Nm e uma força compressiva de 400N. Usando o critério de Tresca determine a espessura mínima de parede necessária ao eixo. Assumir tubo de paredes finas.

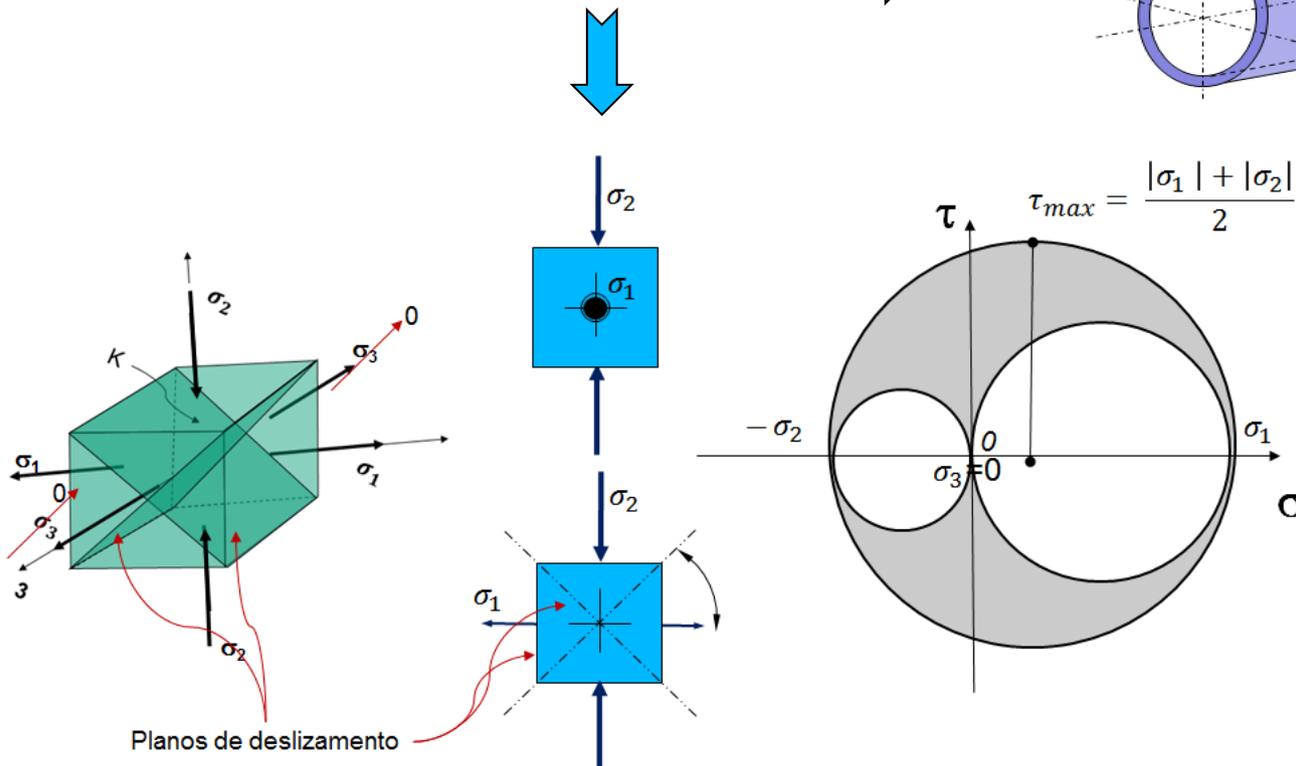
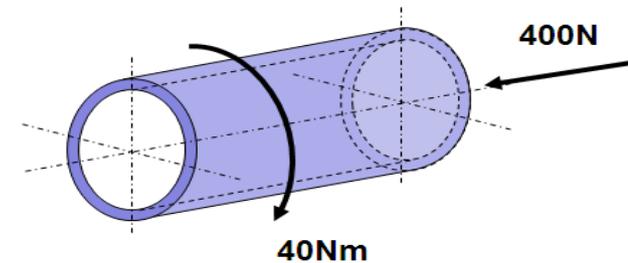




Exemplo de aplicação

Dados: $\sigma_{esc} = 400\text{MPa}$; $W = 400\text{N}$; $Q = 40\text{Nm}$; $D = 20\text{ mm}$ ($r = 10\text{ mm}$), $t = \text{espessura}$

Assumindo tubo de paredes finas $\rightarrow \sigma_3 = 0$.





Exemplo de aplicação

Dados: $\sigma_{esc} = 400\text{MPa}$; $W=400\text{N}$; $Q= 40\text{Nm}$; $D= 20\text{ mm}$ ($r=10\text{ mm}$), $t = \text{espessura}$

$$\sigma = \frac{W}{2\pi r t}$$

$$\tau = \frac{Q}{2\pi r^2 t} \rightarrow \tau = \frac{Q}{2\pi r t r}$$

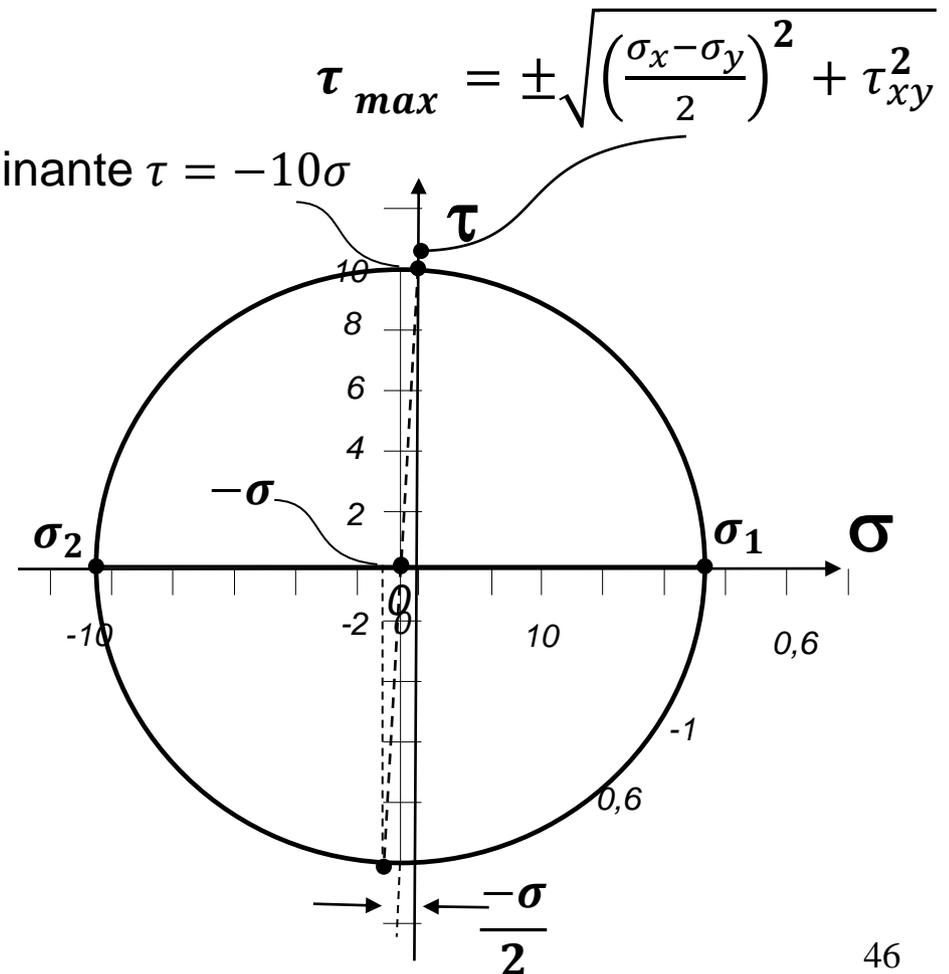


$$\tau = -10\sigma \quad \sigma = -0,1\tau$$

Construindo o circulo de Mohr, temos:

$$a = \left(\frac{-\sigma + 0}{2} \right) = -\frac{\sigma}{2}$$

Tensão dominante $\tau = -10\sigma$

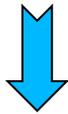




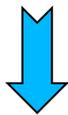
Exemplo de aplicação

Dados: $\sigma_{esc} = 400\text{MPa}$; $W=400\text{N}$; $Q= 40\text{Nm}$; $D= 20\text{ mm}$ ($r=10\text{ mm}$), $t = \text{espessura}$

$$\tau_{max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



$$\tau_{max} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{100.25|\sigma|}$$

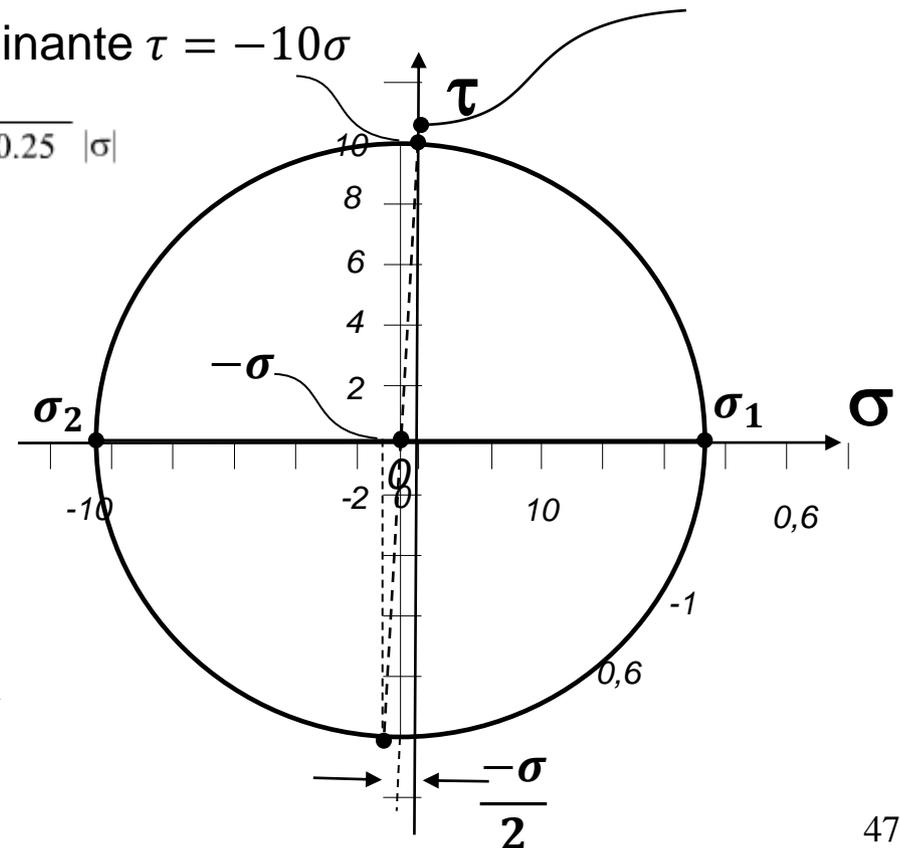


$$\tau_{max} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{100.25|\sigma|} = \sigma_{esc}$$

$$\sigma = \frac{W}{2\pi r t} \quad t = \frac{W}{2\pi r |\sigma|} \quad t = 0,32\text{mm}$$

Tensão dominante $\tau = -10\sigma$

$$\sigma_p = -\frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{100.25|\sigma|}$$



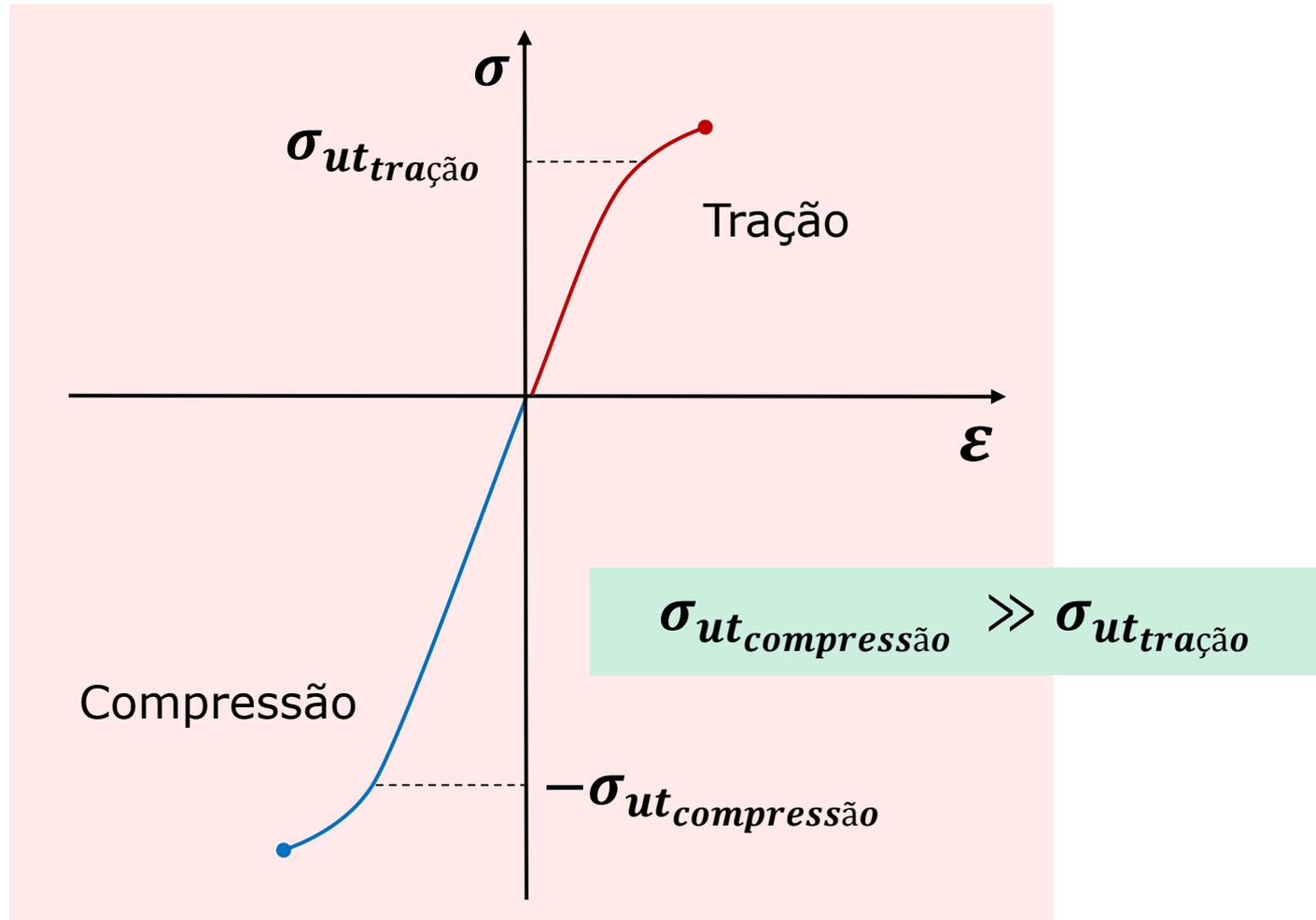


CrITÉrios de Falha para Materiais Frágeis



Critérios de escoamento e de fratura

► Para materiais frágeis – Considerações gerais



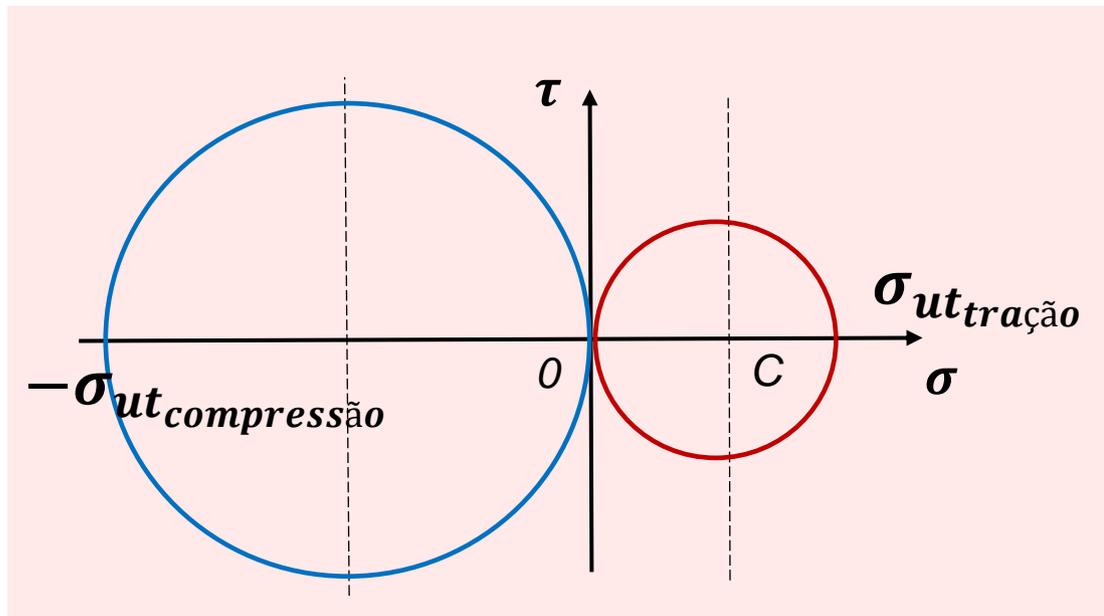
Sobreposição dos resultados dos ensaios de tração e compressão



Critérios de escoamento e de fratura

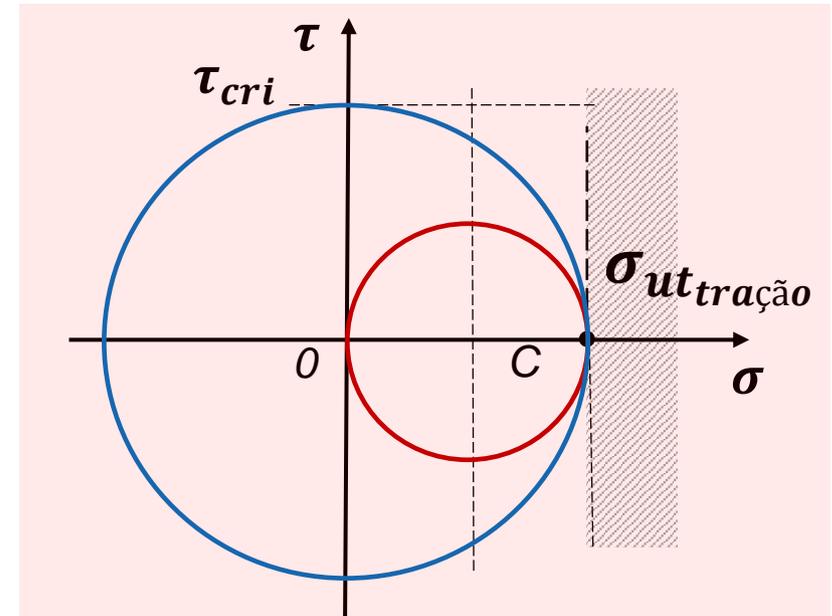
► Para materiais frágeis – Considerações gerais

Tensões Normais Críticas



Sobreposição dos círculos de Mohr para tração e compressão

Tensões Cisalhantes Críticas



Sobreposição dos círculos de Mohr para ensaios de tração e torção

$$\tau_{cri} \cong \sigma_{ut tração}$$

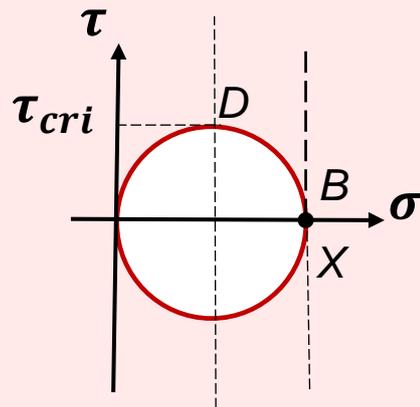


Critérios de escoamento e de fratura

► Para materiais frágeis – Considerações gerais

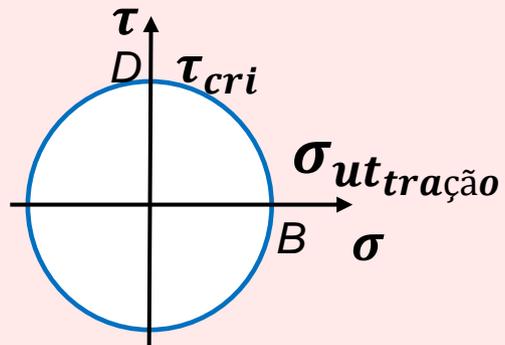
Tração

- Tensões Normais

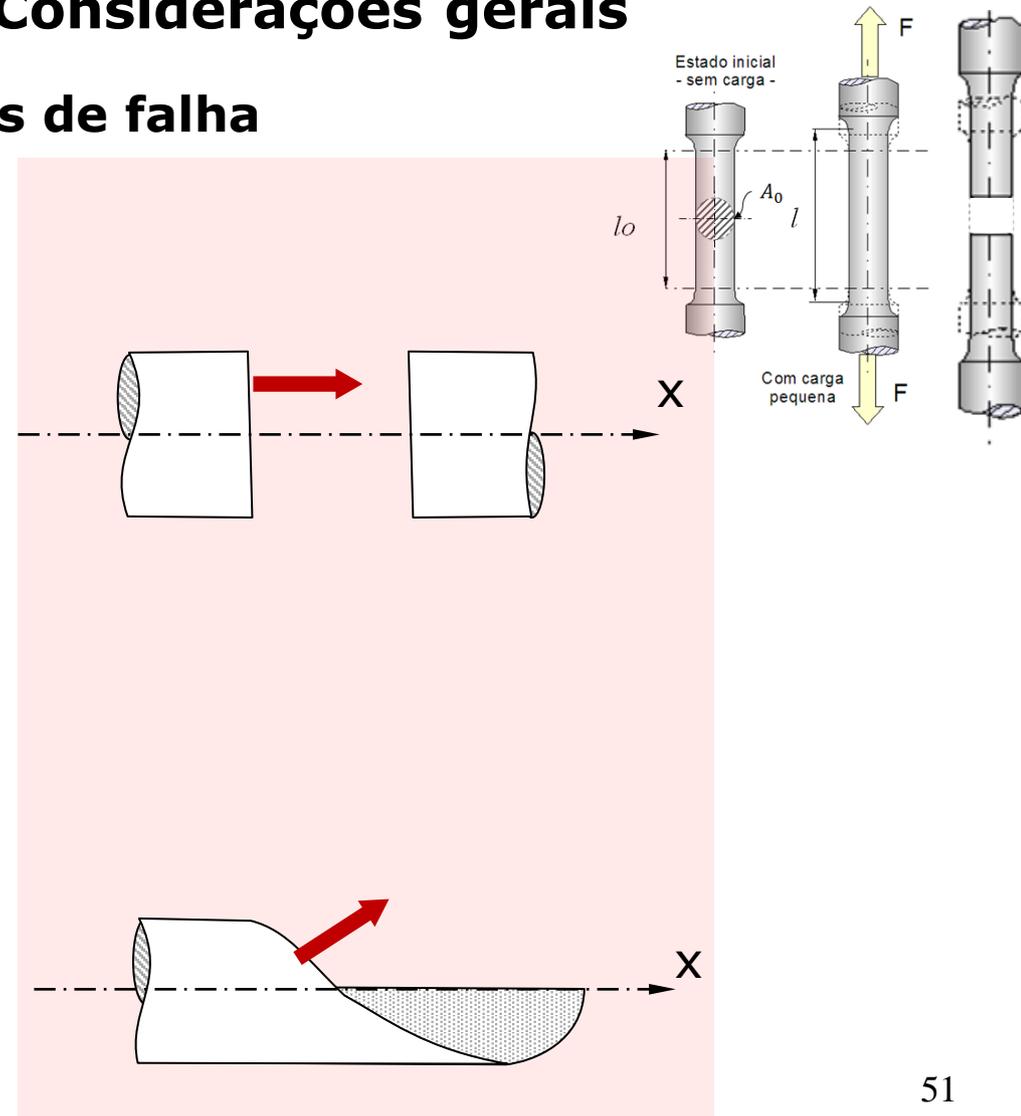


Torção

- Tensões Cisalhantes



Modos de falha



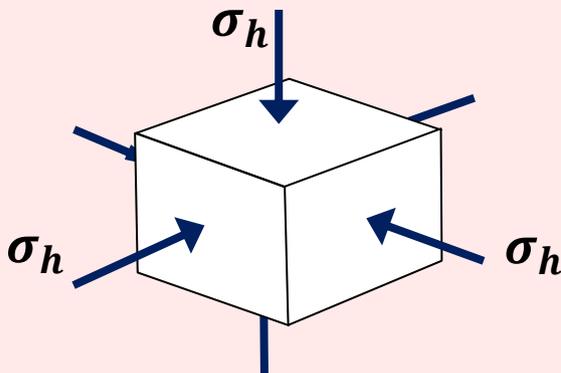


Critérios de escoamento e de fratura

► Para materiais frágeis – Considerações gerais

Modos de falha

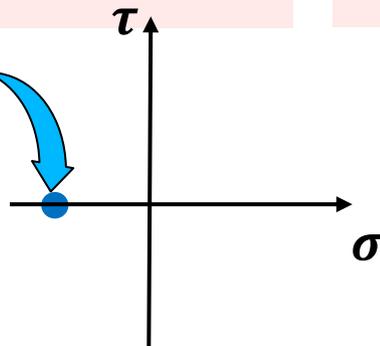
Hidroestática



Teorias de falha

- Máxima tensão normal - *Maximum normal stress*
- Falha frágil Coulumb-Mohr - *Brittle Coulomb-Mohr*
- Mohr modificado - *Modified Mohr*

$$\sigma_{uttração} \cong \sigma_h$$





Teoria da Máxima Tensão Normal

- ▶ A Teoria da Máxima Tensão é a hipótese de falha mais antiga, seu desenvolvimento é atribuído a Rankine
- ▶ Segundo a TMTN a falha ou fratura ocorre quando **uma** das três tensões principais excedem tensão equivalente de escoamento, independentemente das outras tensões.
- ▶ Novamente nos arranjaríamos as tensões principais para o estado geral de tensões de forma que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.
- ▶ Esta teoria então prediz eu a falha ocorrerá quando

$$\sigma_1 \geq \sigma_{\text{tração}} \quad \text{ou} \quad \sigma_2 \leq -\sigma_{\text{compressão}}$$



Teoria da Máxima Tensão Normal

- ▶ As tensões principais para o estado plano são dadas por:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

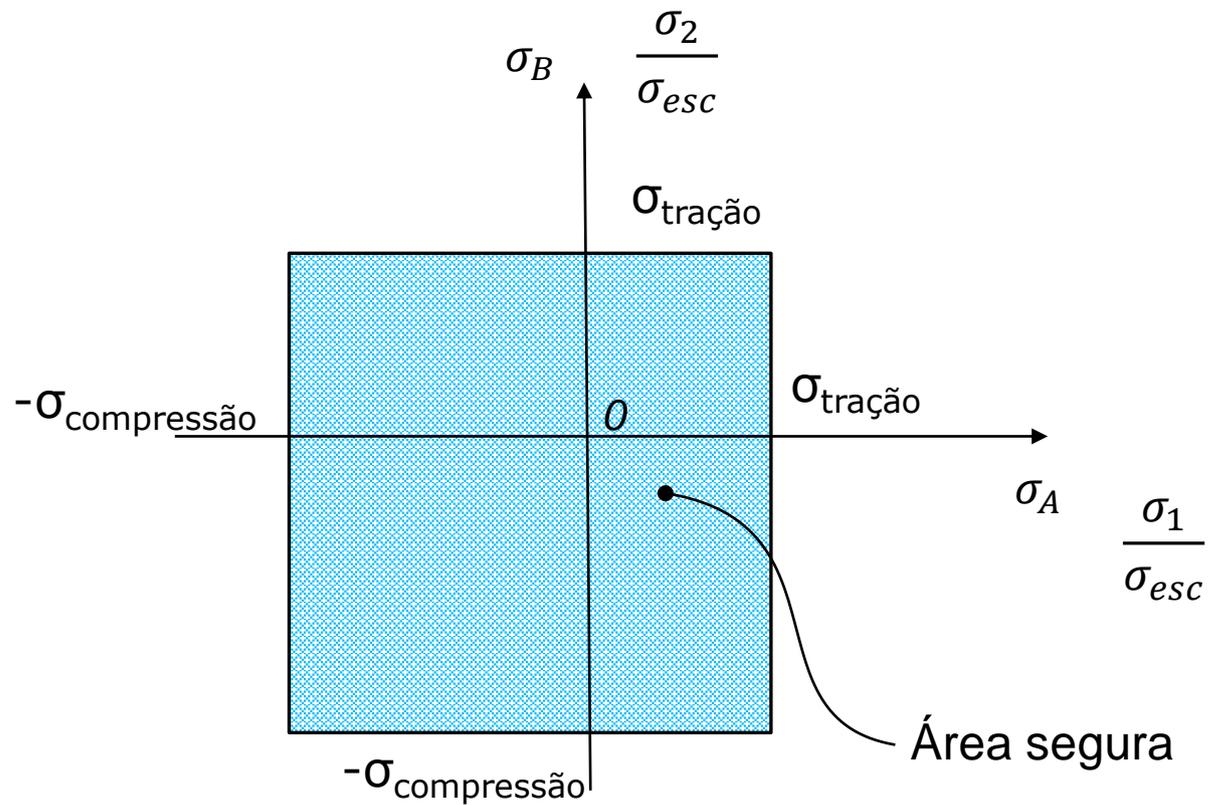
- ▶ Com $\sigma_A \geq \sigma_B$, então: $\sigma_1 \geq \sigma_{\text{tração}}$ ou $\sigma_2 \leq -\sigma_{\text{compressão}}$ pode ser reescrito como:

$$\sigma_A \geq \sigma_{\text{tração}} \quad \text{ou} \quad \sigma_B \leq -\sigma_{\text{compressão}}$$



Teoria da Máxima Tensão Normal

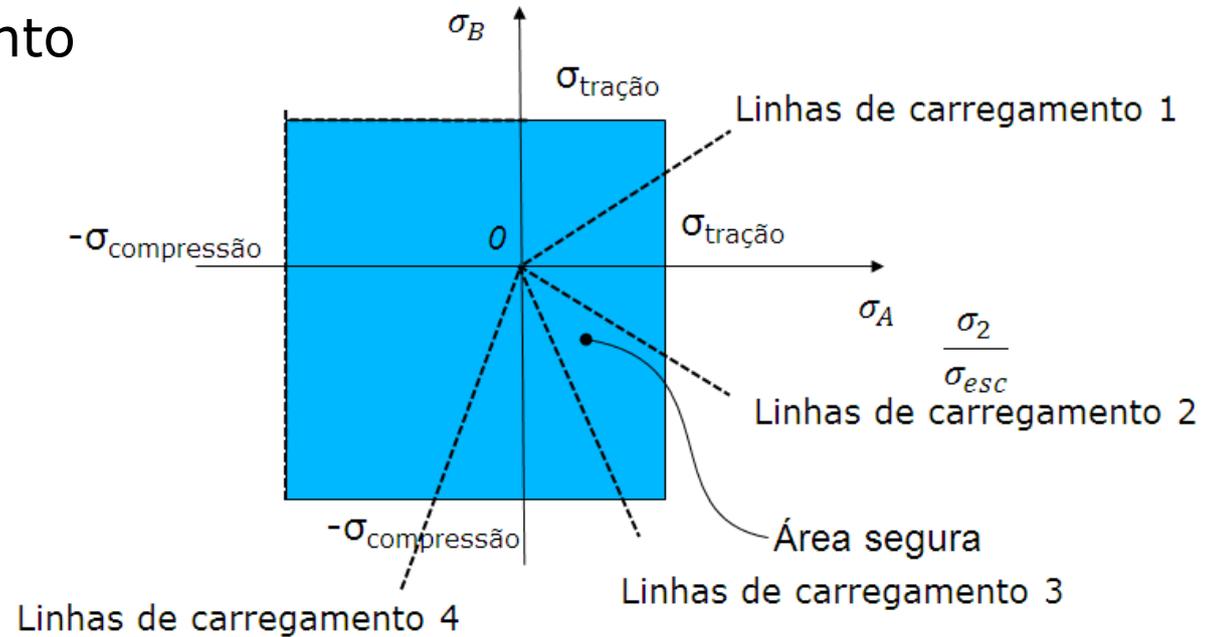
- ▶ Em termos gráficos:





Teoria da Máxima Tensão Normal

► Linhas de carregamento



$\sigma_A = \frac{S_{ut}}{n}$	$\sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$		Load line 1
	$\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B$	and $\left \frac{\sigma_B}{\sigma_A} \right \leq \frac{S_{uc}}{S_{ut}}$	Load line 2
$\sigma_B = -\frac{S_{uc}}{n}$	$\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B$	and $\left \frac{\sigma_B}{\sigma_A} \right > \frac{S_{uc}}{S_{ut}}$	Load line 3
	$0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B$		Load line 4



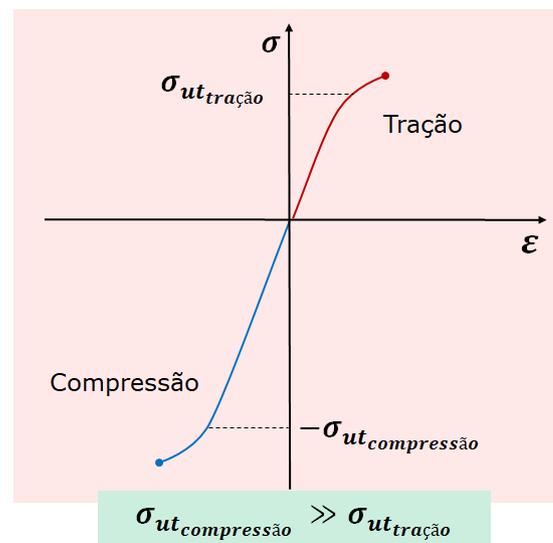
Teoria de Mohr Modificada para materiais frágeis

- ▶ Esta teoria é derivada do critério de máxima tensão normal, a qual é historicamente a primeira proposta de teoria de falha para materiais frágeis, e é similar a teoria máxima tensão cisalhante.
- ▶ Esta considera que as tensões intermediárias principais não participam do processo de falha.
- ▶ O conceito de tensão equivalente não se aplica a materiais frágeis pois as tensões de tração e compressão diferem muito.



Teoria de Mohr Modificada para materiais frágeis

- ▶ Um material frágil com tensão equivalente de tração de 250MPa tem uma tendência de falha muito maior do que um com 250MPa de resistência a compressão.
- ▶ Assim um fator de segurança deve ser obtido diretamente das tensões principais.
- ▶ O fator de segurança pode ser obtido graficamente ou analiticamente





Teoria de Mohr Modificada para materiais frágeis

- ▶ O critério de falha ocorre quando:

$$\sigma_A = \frac{S_{ut}}{n} \quad \sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$$

$$\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B \quad \text{and} \quad \left| \frac{\sigma_B}{\sigma_A} \right| \leq 1$$

$$\frac{(S_{uc} - S_{ut}) \sigma_A}{S_{uc} S_{ut}} - \frac{\sigma_B}{S_{uc}} = \frac{1}{n} \quad \sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B \quad \text{and} \quad \left| \frac{\sigma_B}{\sigma_A} \right| > 1$$

$$\sigma_B = -\frac{S_{uc}}{n} \quad 0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B$$

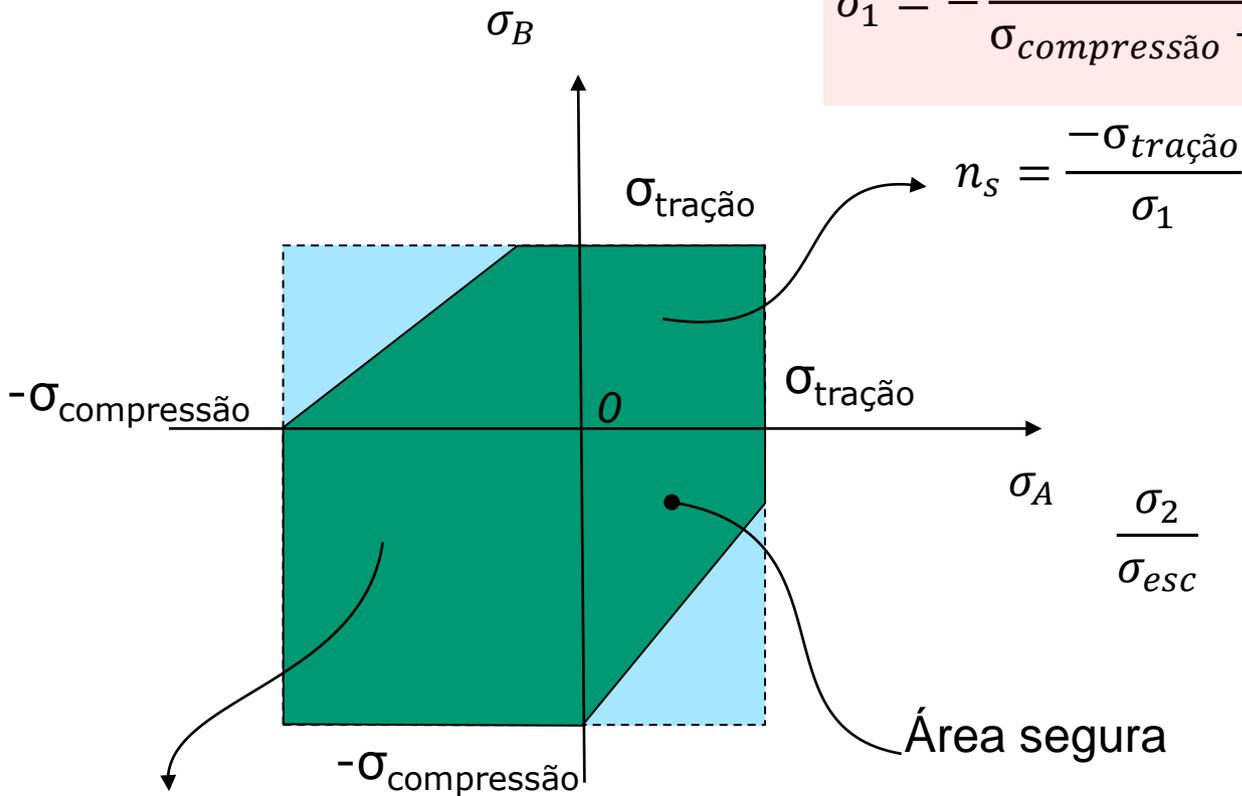


Teoria de Mohr Modificada para materiais frágeis

► Em termos gráficos para :

$$\sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 < 0$$

$$\sigma_1 = - \frac{\sigma_{tração} \sigma_2}{\sigma_{compressão} - \sigma_{tração}} = \frac{1}{n_s} \frac{\sigma_{compressão} \sigma_{tração}}{\sigma_{compressão} - \sigma_{tração}}$$



$$n_s = \frac{-\sigma_{tração}}{\sigma_1}$$

$$n_s = \frac{-\sigma_{compressão}}{\sigma_2}$$



Teoria de Coulumb-Mohr para materiais frágeis

- ▶ Também denominada de teoria do atrito interno
- ▶ É uma modificação da teoria da máxima tensão normal
- ▶ É a teoria de falha preferida para análise de materiais frágeis

Stress Region	Mohr's Circle	Failure	Factor of Safety
$\sigma_{AB} > 0$		$\sigma_A \geq S_{ut}$	$\eta = \frac{S_{ut}}{\sigma_1}$
$\sigma_A > 0,$ $\sigma_B < 0$		$\frac{\sigma_A}{S_{ut}} - \frac{\sigma_B}{S_{uc}} \geq 1$	$\frac{1}{\eta} = \frac{\sigma_A}{S_{ut}} - \frac{\sigma_B}{S_{uc}}$
$\sigma_{AB} \leq 0$		$ \sigma_B \geq S_{uc}$	$\eta = \frac{S_{uc}}{ \sigma_B }$

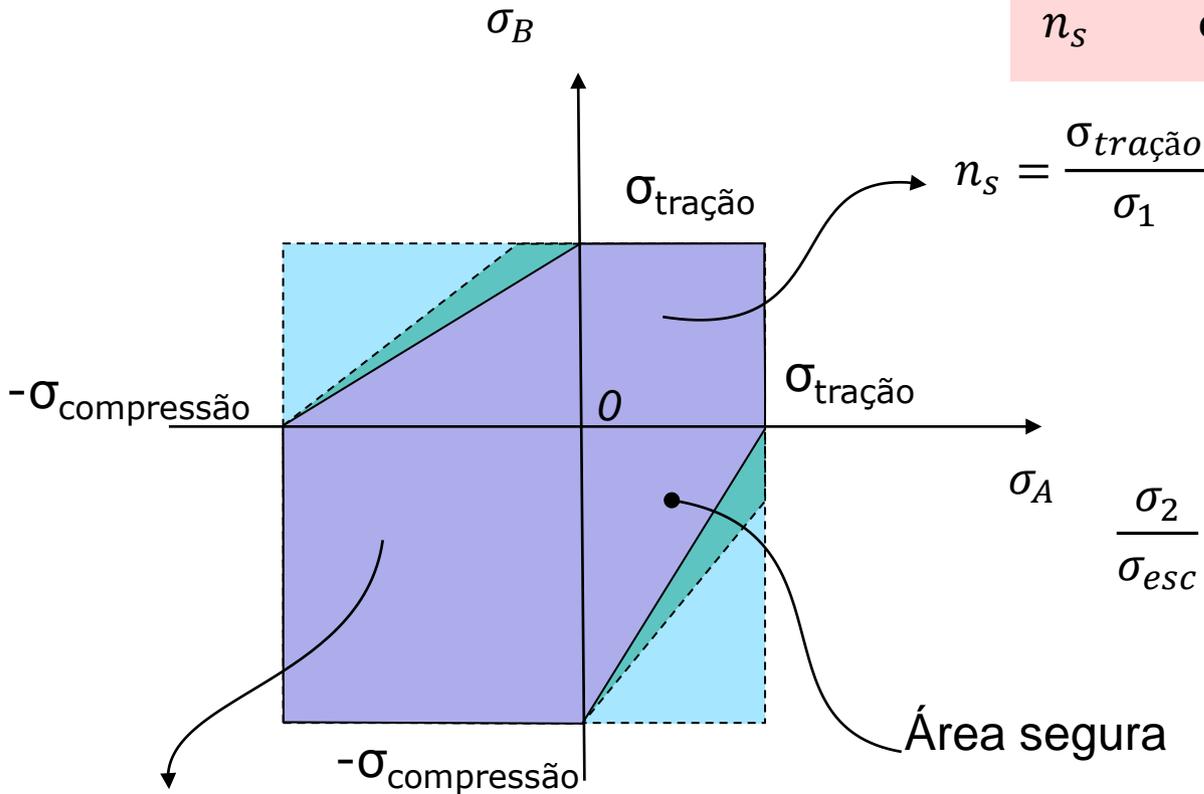


Teoria de Coulumb-Mohr para materiais frágeis

► Em termos gráficos para :

$$\sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 < 0$$

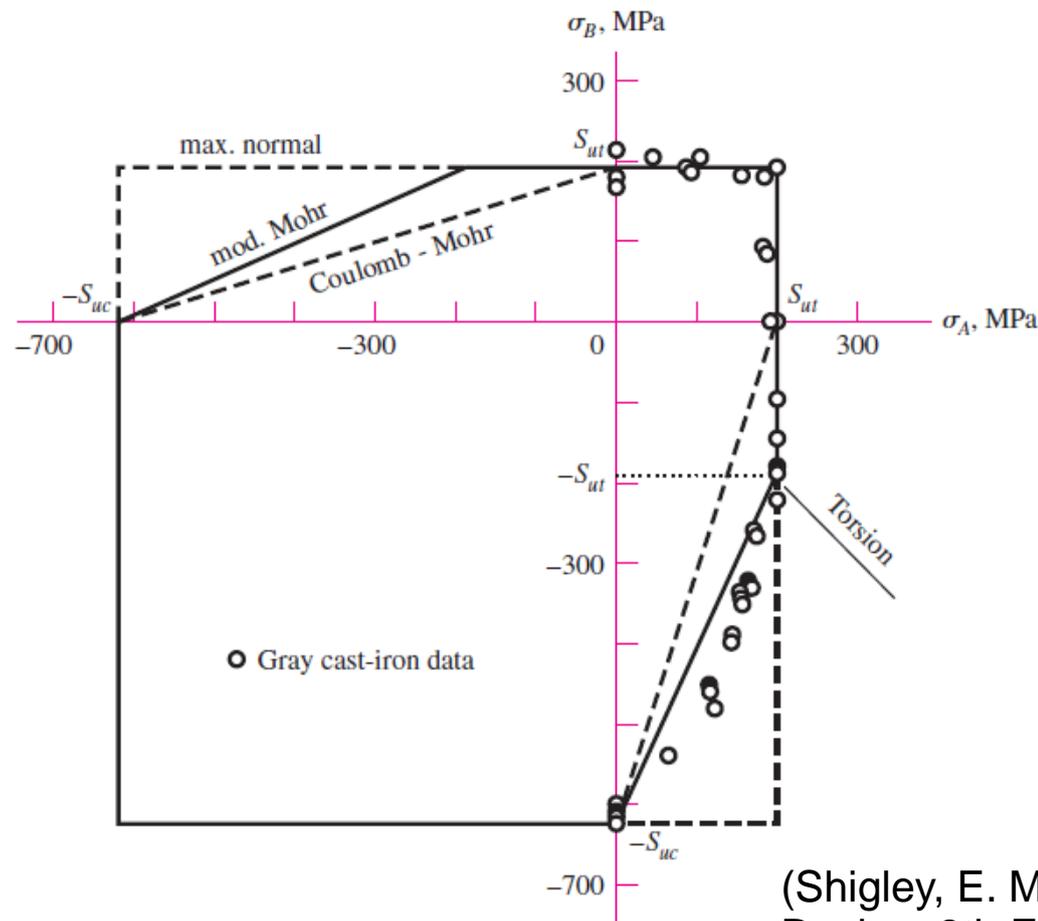
$$\frac{1}{n_s} = \frac{\sigma_1}{\sigma_{tração}} - \frac{\sigma_2}{\sigma_{compressão}}$$





Comparação

- ▶ Plotagem dos dados para fratura biaxial para ferro-fundido cinzento considerando diferentes critérios de falha

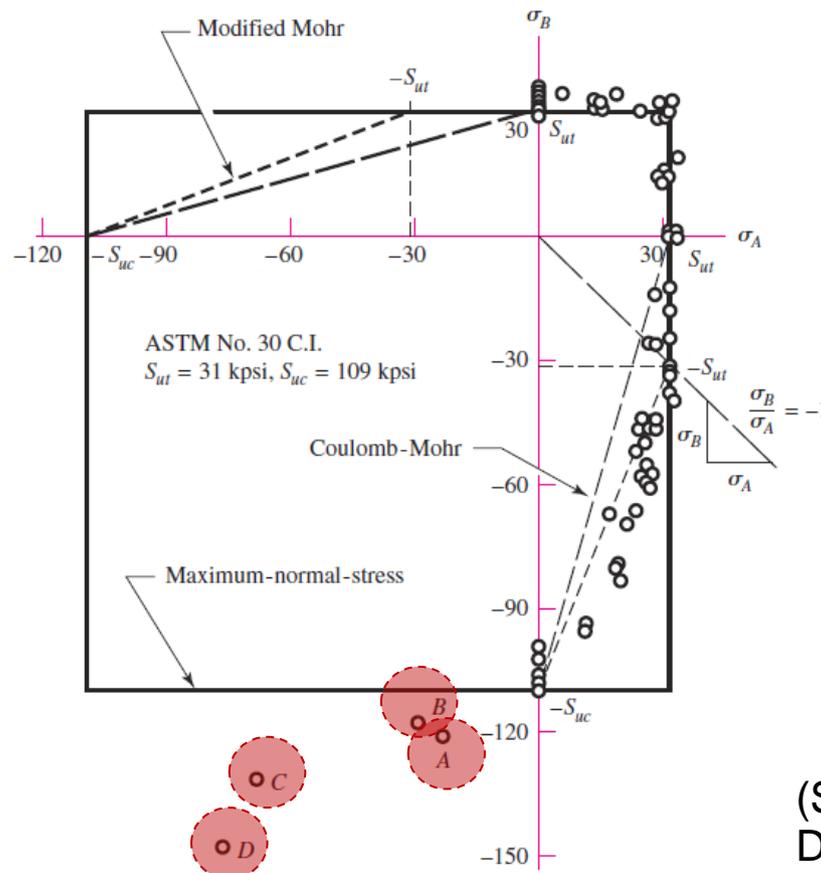


(Shigley, E. Mechanical Engineering Design, 8th Edition, MacGrawHill, 2008) 63



Comparação

- ▶ Plotagem dos dados para fratura biaxial para ferro-fundido considerando três critérios de falha para materiais frágeis. Note os pontos A, B, C e D.



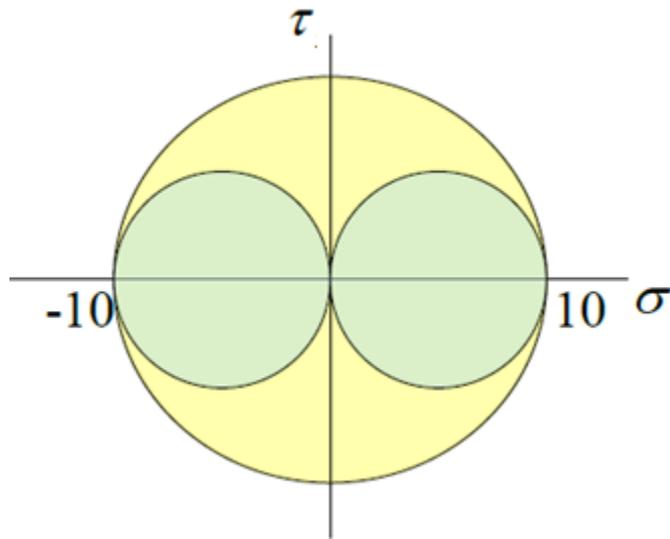
(Shigley, E. Mechanical Engineering Design, 8th Edition, MacGrawHill, 2008) 64



Exemplo

► Determine os fatores de segurança para os seguintes materiais:

- Alumínio puro: $\sigma_{esc} = 30\text{MPa}$, $\sigma_x = 10\text{MPa}$,
 $\sigma_y = -10\text{MPa}$ e $\tau_{xy} = 0\text{MPa}$



Teoria da Máxima Tensão Cisalhante

$$\tau_{max} = \tau_{cri} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{max} = \tau_{cri} = \pm \sqrt{\left(\frac{10 - (-10)}{2}\right)^2 + 0^2}$$

$$\tau_{max} = \tau_{cri} = 10\text{MPa}$$

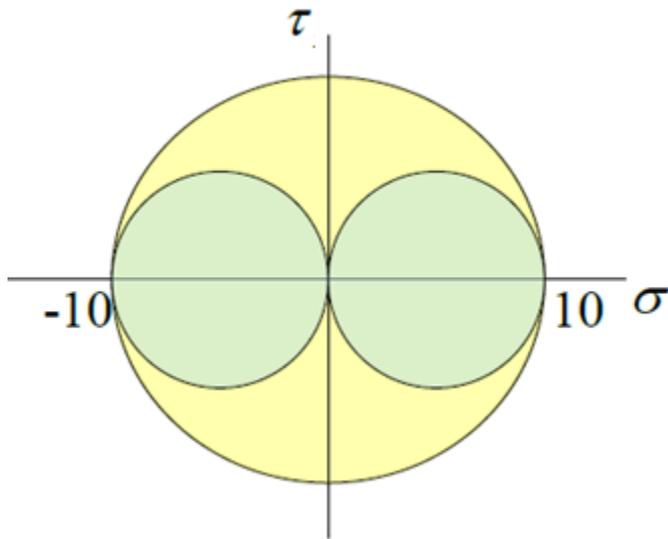


Exemplo

- ▶ Determine os fatores de segurança para os seguintes materiais:
 - ▶ Alumínio puro: $\sigma_{esc} = 30\text{MPa}$, $\sigma_x = 10\text{MPa}$, $\sigma_y = -10\text{MPa}$ e $\tau_{xy} = 0\text{MPa}$

Teoria da Máxima Tensão Cisalhante

$$n = \frac{\sigma_{esc}}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{30}{10 - (-10)} = 1.5$$

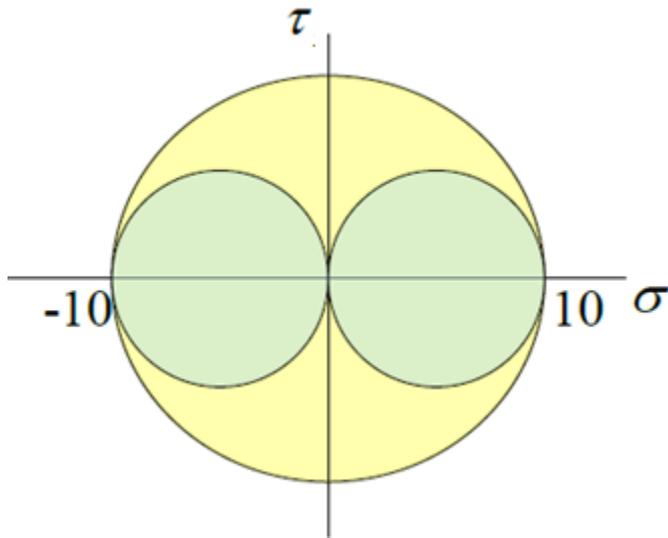




Exemplo

► Determine os fatores de segurança para os seguintes materiais:

► Alumínio puro: $\sigma_{esc} = 30\text{MPa}$, $\sigma_x = 10\text{MPa}$, $\sigma_y = -10\text{MPa}$ e $\tau_{xy} = 0\text{MPa}$



Teoria da Máxima Energia de Distorção

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} = \sqrt{300} = 17,3\text{Mpa}$$

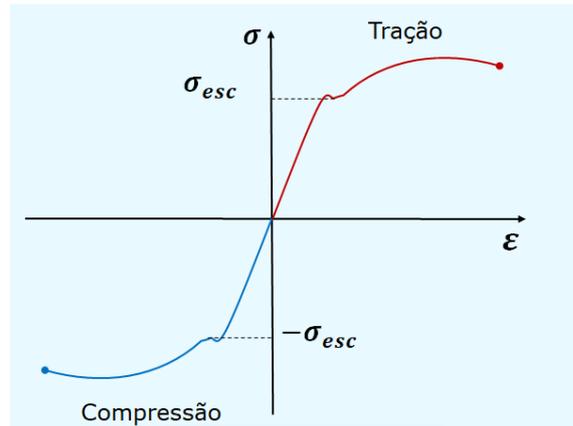
$$n = \frac{\sigma_{esc}}{\sigma_{vm}} = \frac{30}{17,3} = 1.7$$



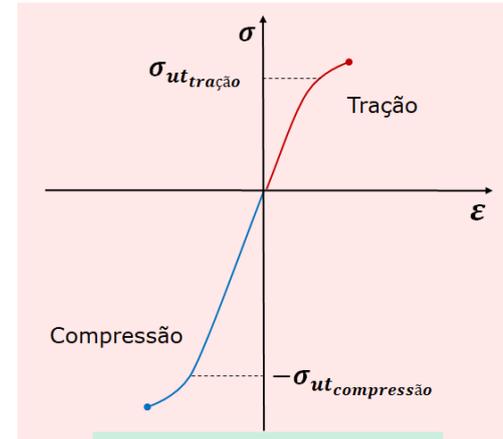
Materiais Dúcteis

Materiais Frágeis

Sobreposição dos resultados dos ensaios de tração e compressão

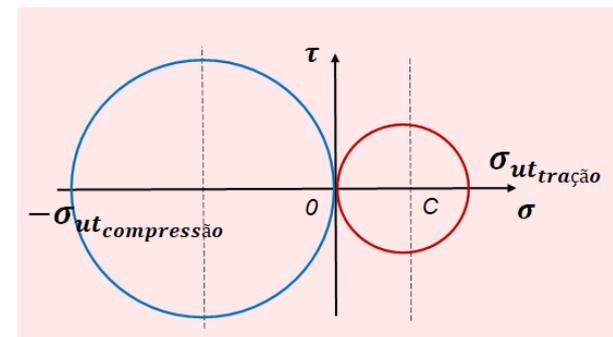
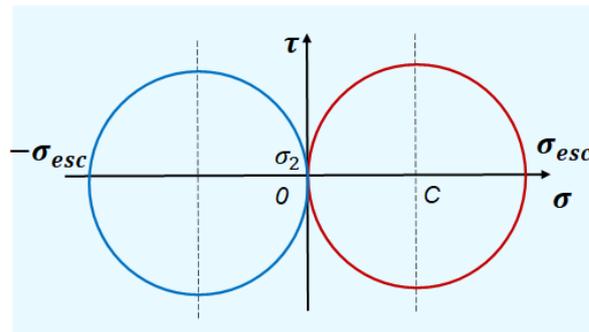


$$\sigma_{esc} \cong -\sigma_{esc}$$

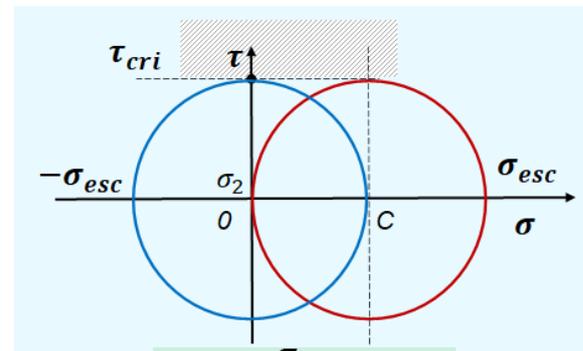


$$\sigma_{ut_{compressão}} \gg \sigma_{ut_{tração}}$$

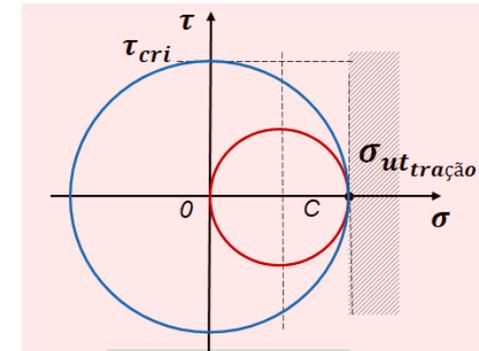
Sobreposição dos círculos de Mohr para tração e compressão



Sobreposição dos círculos de Mohr para ensaios de tração e torção



$$0,5 < \frac{\tau_{cri}}{\sigma_{esc}} < 0,6$$



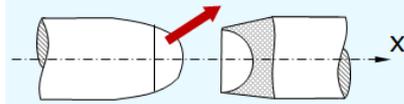
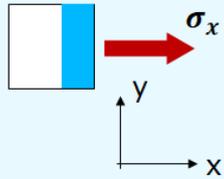
$$\tau_{cri} \cong \sigma_{ut_{tração}}$$



Materiais Dúcteis

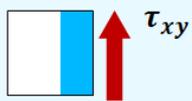
Tração

- Tensões Normais

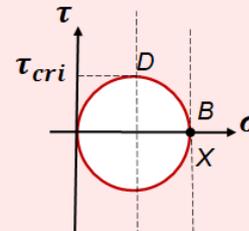


Torção

- Tensões Cisalhantes

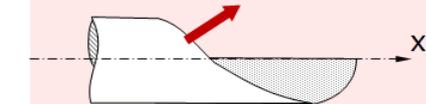
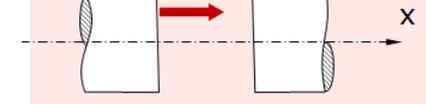
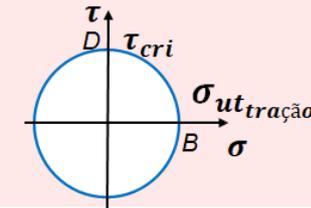


Materiais Frágeis

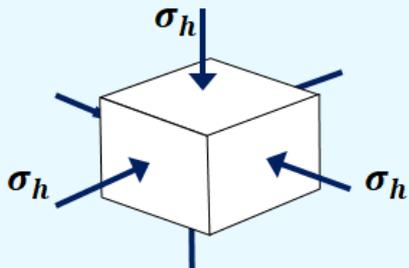


Torção

- Tensões Cisalhantes

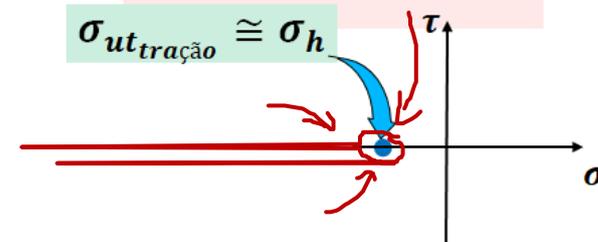
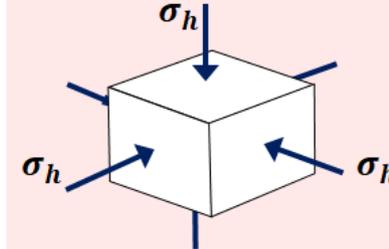


Hidrostática



$$\sigma_{esc} \gg \sigma_h$$

Hidrostática





Teorias de falha -> Dúcteis

- Máxima tensão cisalhante - *Maximum shear stress*
- Máxima energia de distorção - *Maximum distortion energy*
- Teoria Coulomb-Mohr para materiais dúcteis

Teorias de falha -> Frágeis

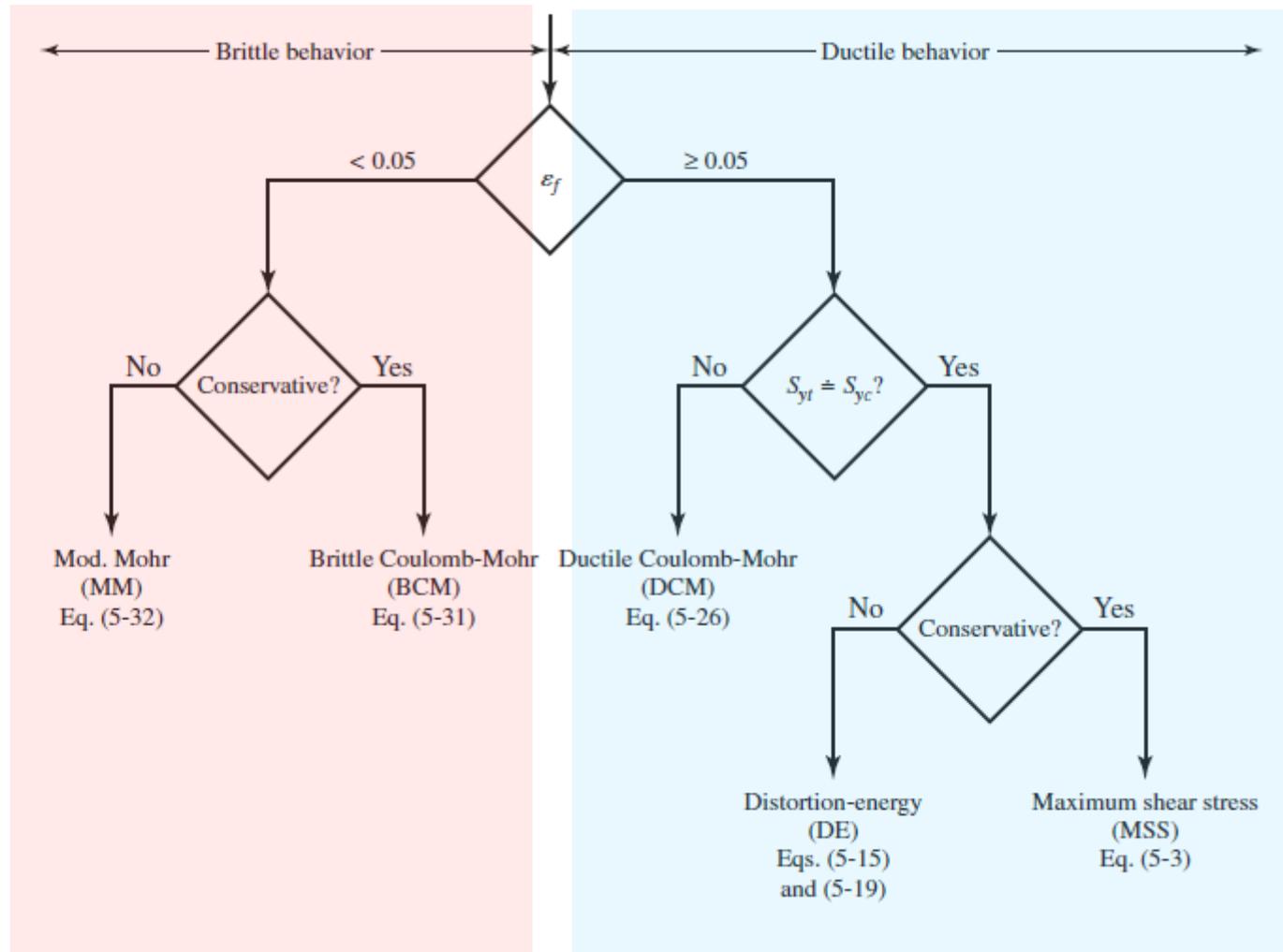
- Máxima tensão normal - *Maximum normal stress*
- Falha frágil Coulomb-Mohr - *Brittle Coulomb-Mohr*
- Mohr modificado - *Modified Mohr*



Fluxograma para seleção da teoria de falha

Figure 5-21

Failure theory selection flowchart.





FIM DA AULA