4300375 - Física moderna I

Aula 2 – Evidências da mecânica quântica

(parte 1)

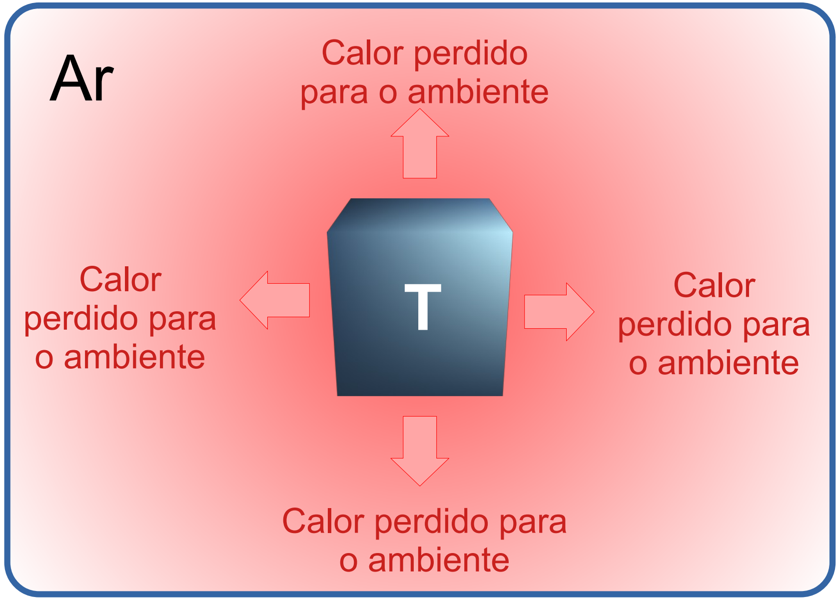
A radiação de corpo negro

Nesta aula...

- Radiação de corpo negro:
  - Definição de radiação de corpo negro;
  - Aplicações da radiação de corpo negro;
  - A física clássica e a catástrofe do ultravioleta;
  - A suposição de Planck;
  - Uma nova perspectiva sobre a radiação de corpo negro;

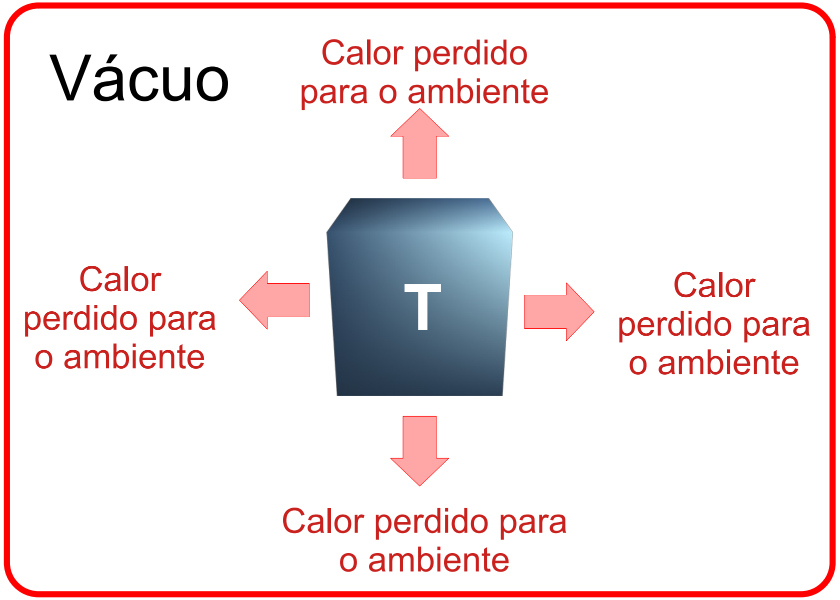
A radiação de corpo negro

- **Corpos emitem radiação eletromagnética;**
- Chamamos de **radiação térmica** porque **depende da temperatura** do corpo;
  - Um corpo à temperatura **T** perde calor para o ambiente:
    - Contato térmico (ar, suporte, etc.)
    - **Irradiação**
- Mesmo **isolado** no vácuo, **o corpo resfria**. Evidenciando uma forma de perder calor que não é uma troca com o ar!



A radiação de corpo negro

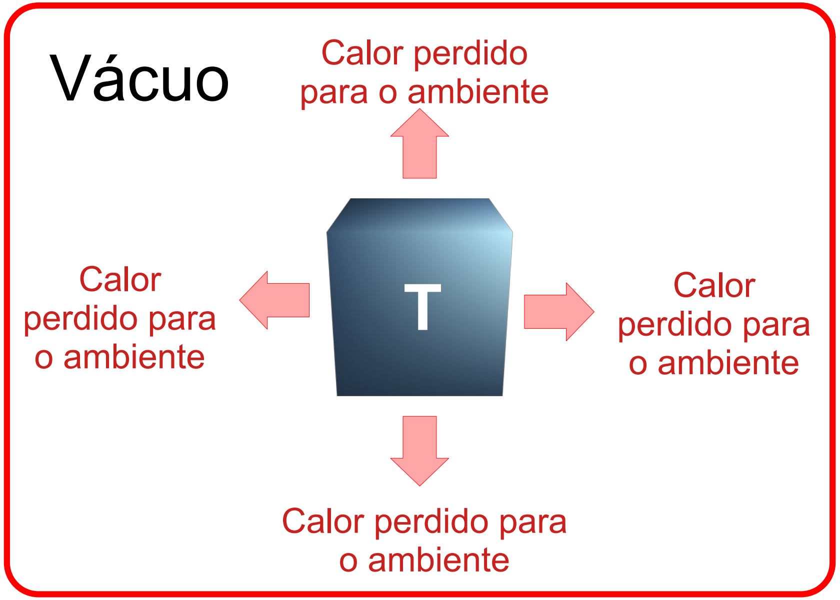
- **Corpos emitem radiação eletromagnética;**
- Chamamos de **radiação térmica** porque **depende da temperatura** do corpo;
  - Um corpo à temperatura **T** perde calor para o ambiente:
    - Contato térmico (ar, suporte, etc.)
    - **Irradiação**



- **Josef Stefan**, através de **observações experimentais**, notou que a energia irradiada pelo corpo isolado **depende da temperatura**!

A radiação de corpo negro

- **Corpos emitem radiação eletromagnética;**
- Chamamos de **radiação térmica** porque **depende da temperatura** do corpo;
  - Um corpo à temperatura **T** perde calor para o ambiente:
    - Contato térmico (ar, suporte, etc.)
    - **Irradiação**
- **Radiação de corpo negro é a radiação do emissor ideal**
  - Por questões de **equilíbrio térmico**, o emissor ideal é também o **absorvedor ideal**



A radiação de corpo negro

- **Josef Stefan**, através de **observações experimentais**, notou que a energia irradiada pelo corpo isolado **depende da temperatura**!

$$\boxed{R = \sigma . T^4}$$

$$\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8} \ \ \mathrm{W/m^2.K^4}$$

Lei de Stefan-Boltzmann

$$dQ = m.c.dT$$

$$\frac{dQ}{dt} = m.c.\frac{dT}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = \frac{1}{m.c}.\frac{dQ}{dt}}$$

Taxa de calor perdido por irradiação em Joules por segundo!

Note que R é medido em $\mathrm{W/m^2.K^4}$, pois é uma potência por unidade de área da superfície do corpo!

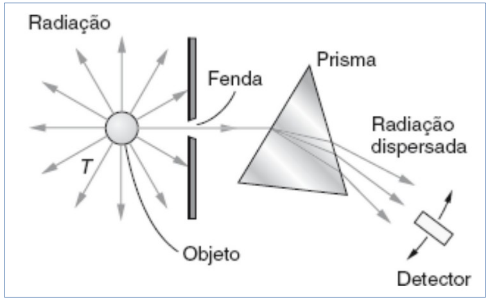
A radiação de corpo negro

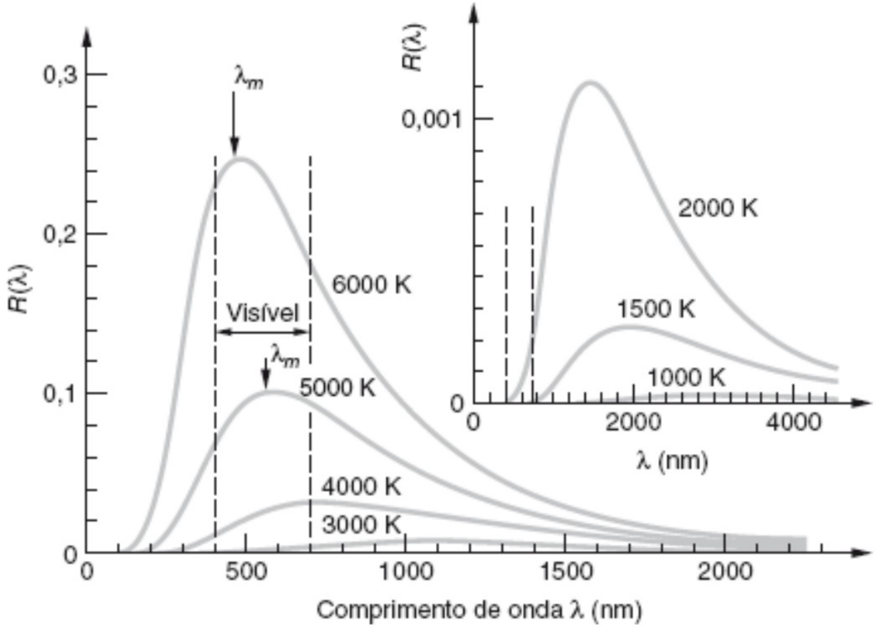
- Wilhelm **Wien**, estudando o **espectro de emissão térmica** notou uma relação importante:
- O **comprimento de onda com máxima emissão** depende da temperatura linearmente!

$$\boxed{\lambda_{\text{máx}} . T = \text{constante}}$$

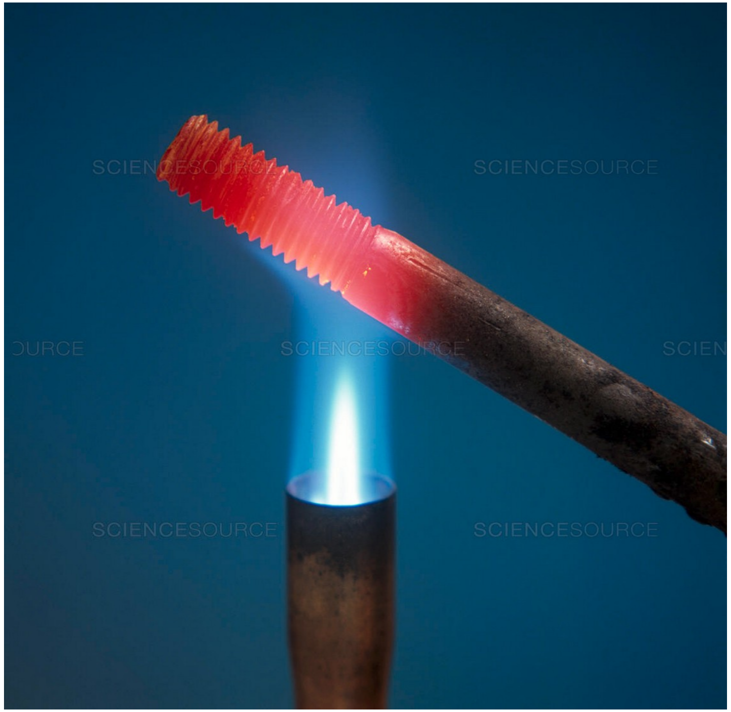
$$\text{constante} = 2{,}6989 \times 10^{-3} \quad \text{m.K}$$

Lei de Wien



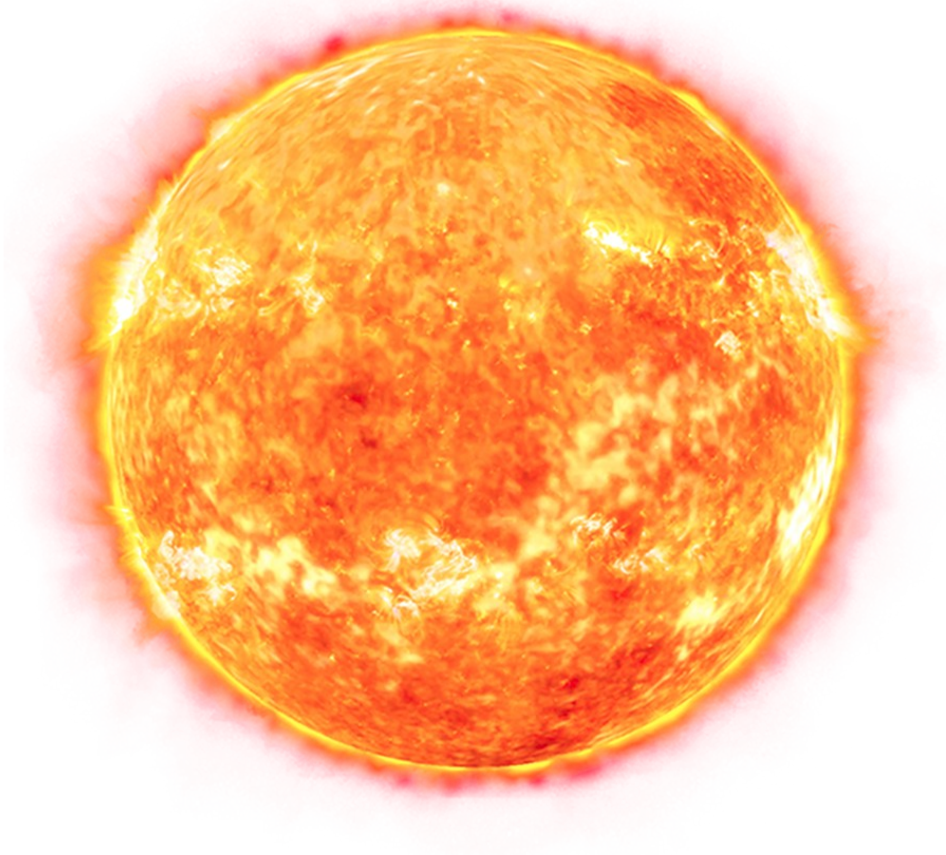


A radiação de corpo negro

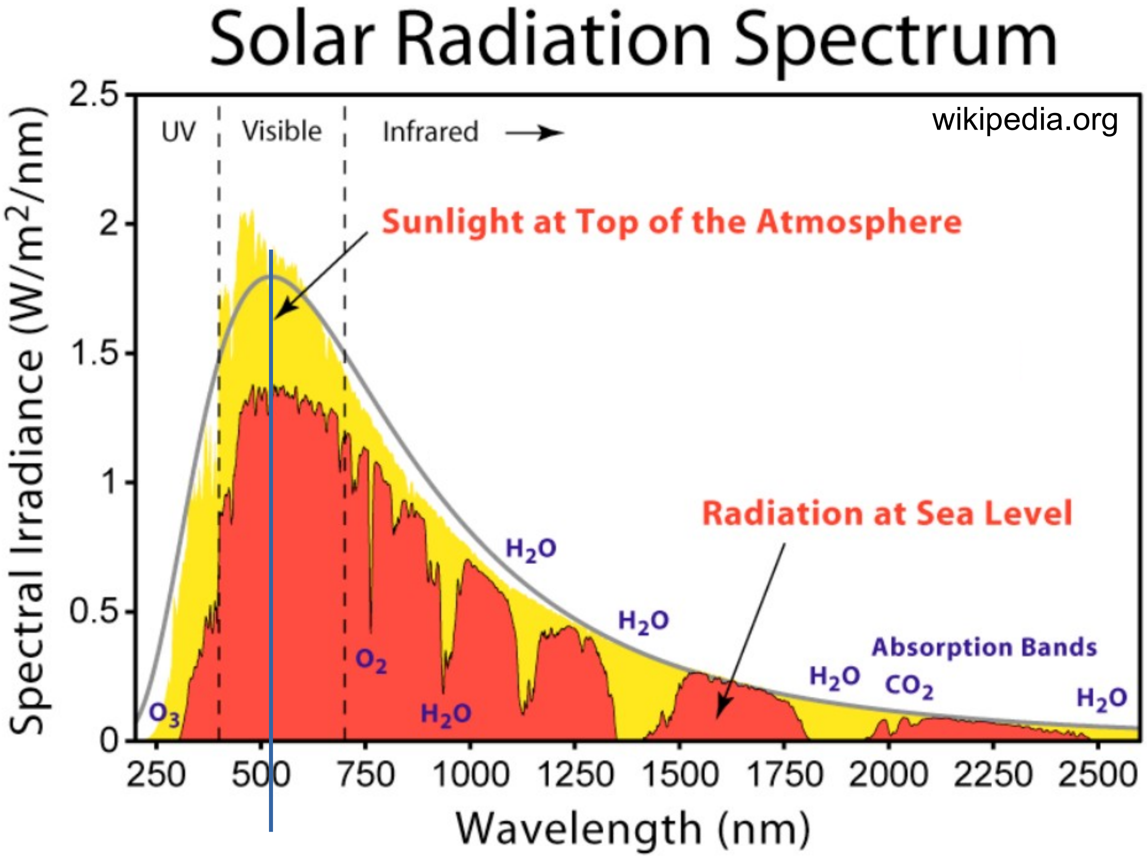


sciencesource.com

A radiação de corpo negro

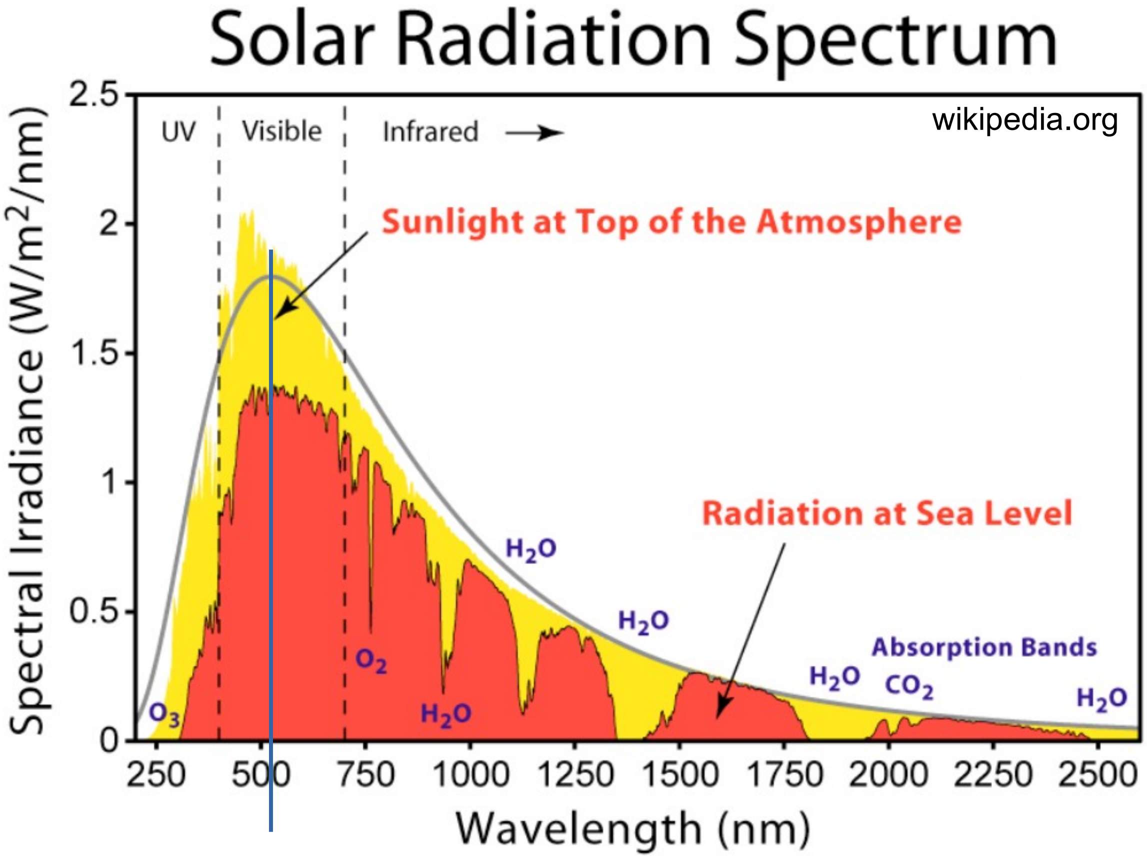


A radiação de corpo negro



$$\lambda_{máx} = 520 \text{ nm}$$

A radiação de corpo negro



$$\lambda_{máx} = 520 \text{ nm}$$

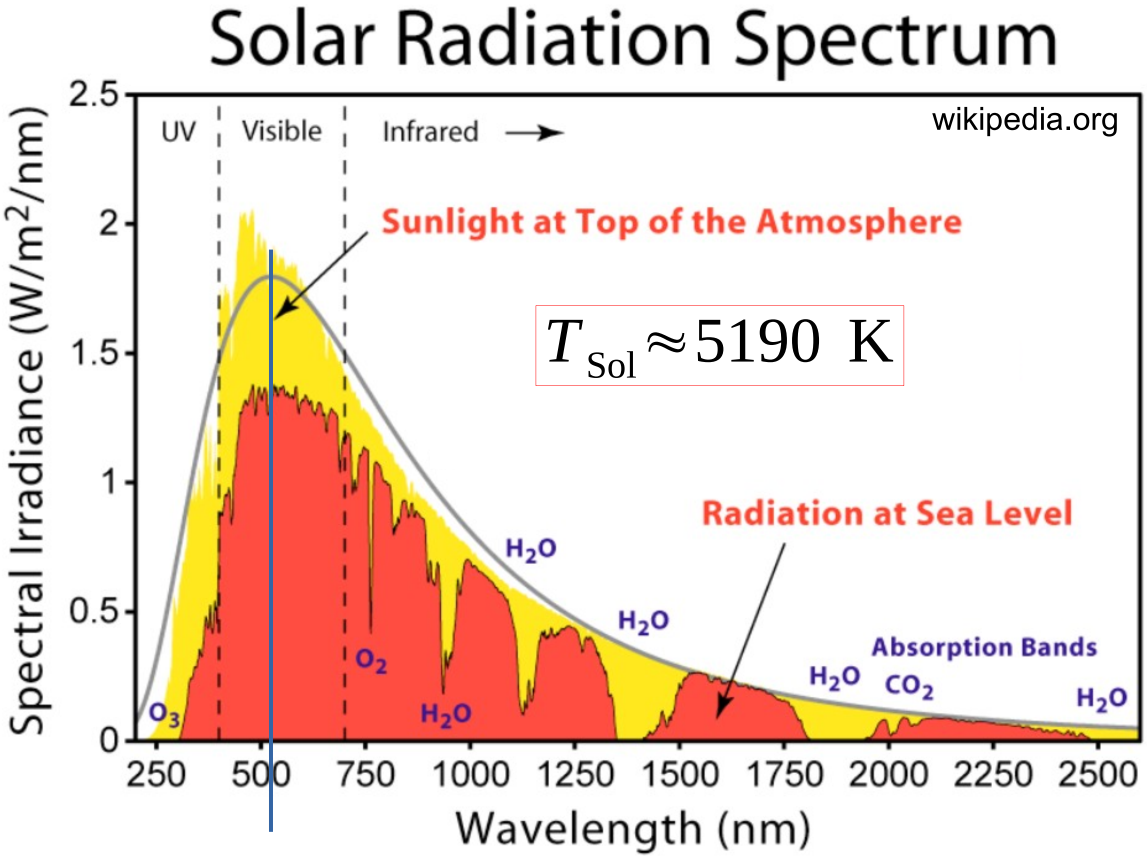
Aplicação da lei de Wien

$$\lambda_{máx} . T = 2{,}6989 \times 10^{-3} \text{ m.K}$$

$$T_{Sol} = \frac{2{,}6989 \times 10^{6} \text{ nm.K}}{520 \text{ nm}}$$

$$\boxed{T_{Sol} \approx 5190 \text{ K}}$$

A radiação de corpo negro

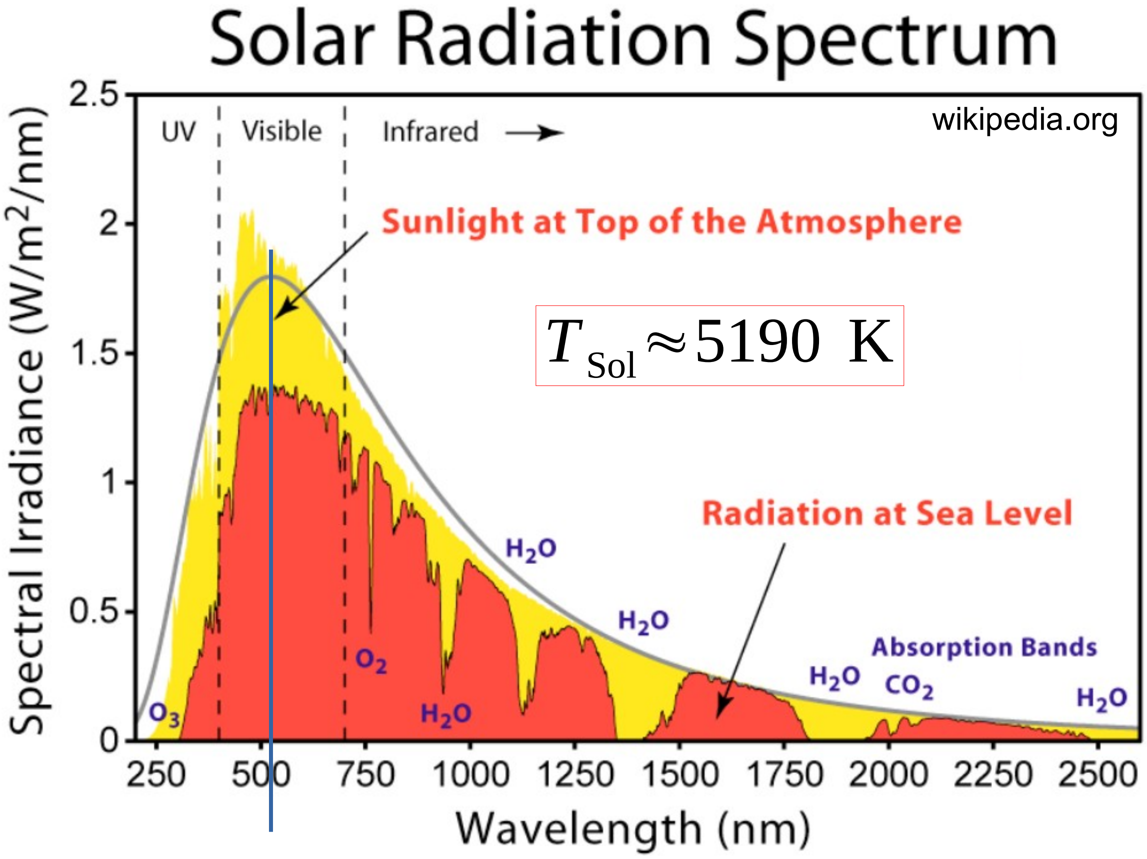


$$T_{\text{Sol}} \approx 5190 \text{ K}$$

$$\lambda_{\text{máx}} = 520 \text{ nm}$$

Aplicação da lei de Stefan-Boltzmann

A radiação de corpo negro



$$\lambda_{máx} = 520\ \mathrm{nm}$$

Aplicação da lei de Stefan-Boltzmann

$$R_{\odot} = 5{,}67 \times 10^{-8} . T^4$$

Potência emitida por unidade de Área!

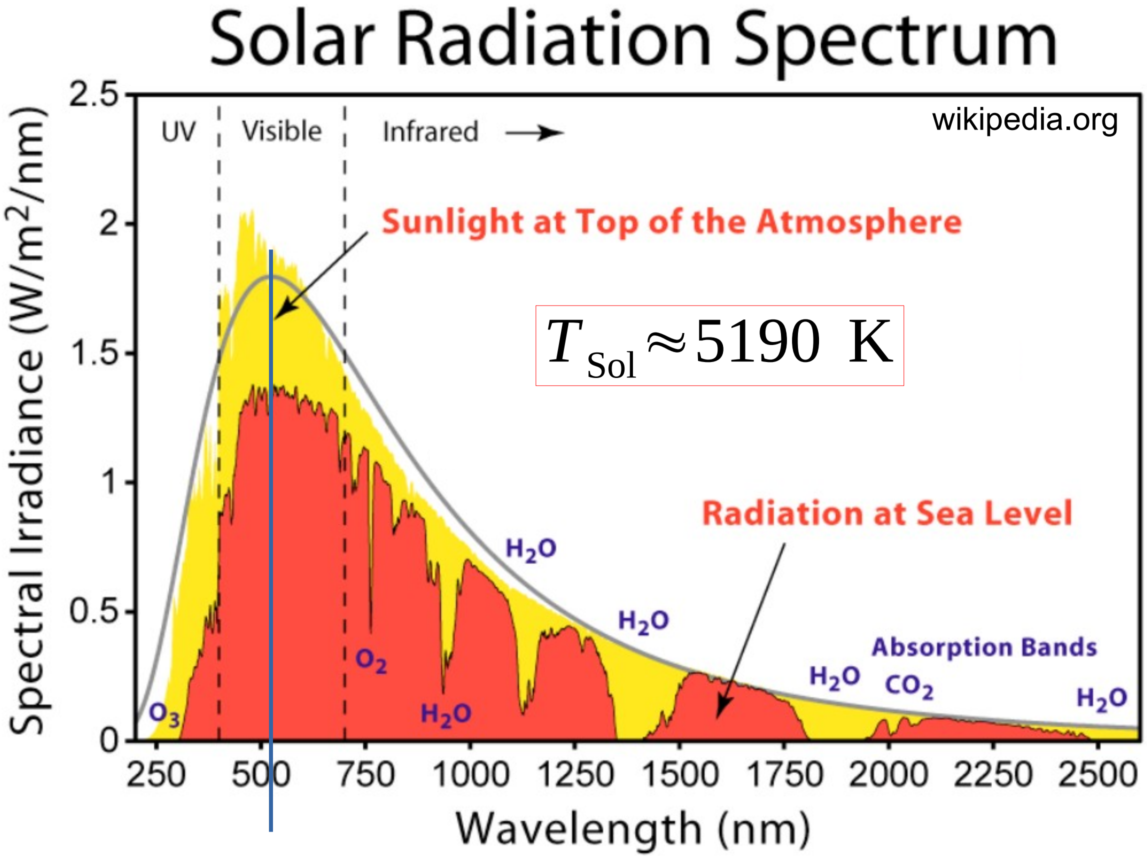
$$R_{\odot} = 5{,}67 \times 10^{-8} . (5190)^4$$

$$R_{\odot} \approx 6{,}7 \times 10^{7}\ \mathrm{W/m^2}$$

ou

$$R_{\odot} \approx 6700\ \mathrm{W/cm^2}$$

A radiação de corpo negro



$\lambda_{máx} = 520\ \text{nm}$

Aplicação da lei de Stefan-Boltzmann

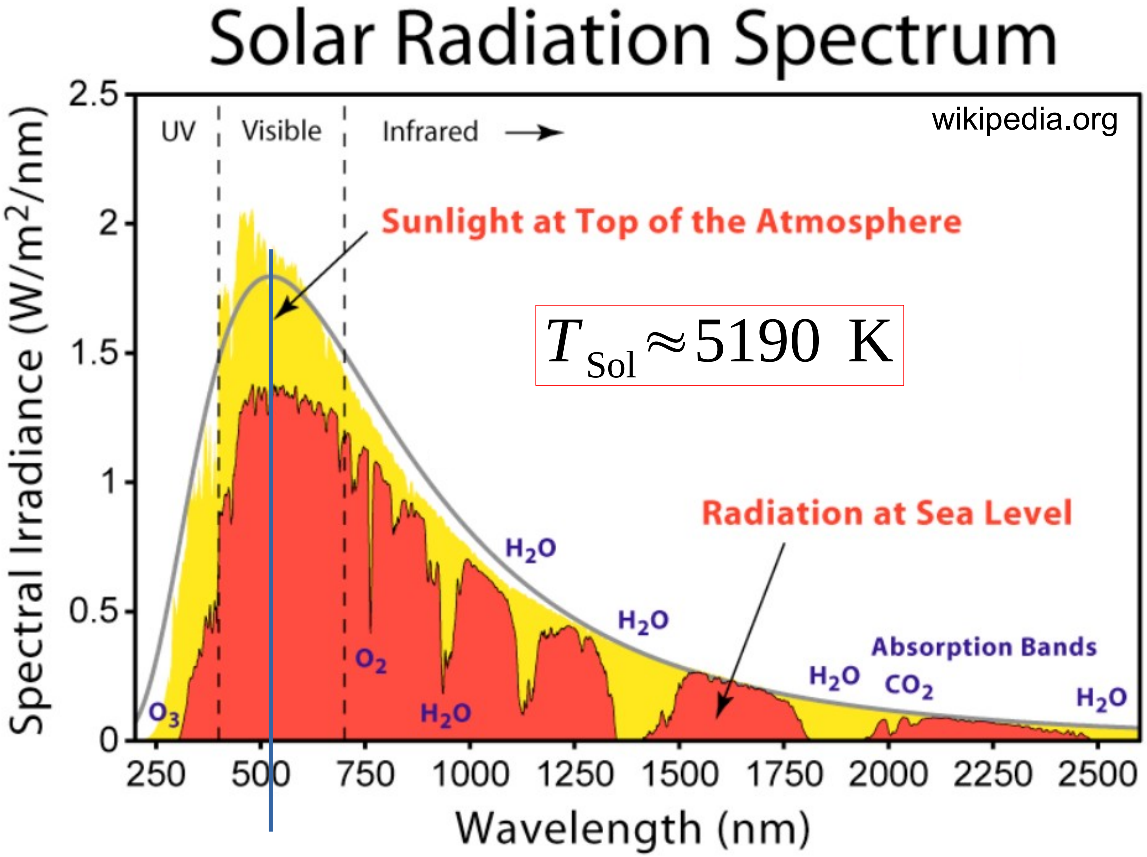
$$R_{\odot} \approx 6700\ \text{W/cm}^2$$

A constante solar é a potência por unidade de área que chega no topo da atmosfera:

$$I_{CS} = \frac{6{,}7 \times 10^7 \frac{\text{W}}{\text{cm}^2} \cdot (\text{Área da superfície do Sol})}{4\pi \cdot (\text{Distância Terra-Sol})^2}$$

$$\boxed{\approx 365\ \text{W/m}^2}$$

A radiação de corpo negro



$\lambda_{máx} = 520\ \mathrm{nm}$

Aplicação da lei de Stefan-Boltzmann

$$R_{\odot} \approx 6700\ \mathrm{W/cm^2}$$

A constante solar é a potência por unidade de área que chega no topo da atmosfera:

$$I_{CS} = \frac{6{,}7\times 10^7\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{cm^2}} \cdot (\text{Área da superfície do Sol})}{4\pi \cdot (\text{Distância Terra-Sol})^2}$$

$$\boxed{\approx 365\ \mathrm{W/m^2}}$$

Aproximadamente 70% disso chega à superfície terrestre.

A radiação de corpo negro

Aplicação da lei de Wien e Stefan-Boltzmann combinadas

Suponha uma estrela que irradia uma potência 100 vezes maior que a do Sol. Esta estrela emite um espectro de radiação com a máxima intensidade em 966 nm.

Qual é o tamanho dessa estrela?

A radiação de corpo negro

Aplicação da lei de Wien e Stefan-Boltzmann combinadas

Suponha uma estrela que irradia uma potência 100 vezes maior que a do Sol. Esta estrela emite um espectro de radiação com a máxima intensidade em 966 nm.

Qual é o tamanho dessa estrela?

$$R = P/A = \sigma . T^4$$

$$P = (4\pi r^2) . \sigma . T^4$$

$$\frac{P}{P_\odot} = \frac{(4\pi r^2) . \sigma . T^4}{(4\pi r_\odot^2) . \sigma . T_\odot^4}$$

A radiação de corpo negro

Aplicação da lei de Wien e Stefan-Boltzmann combinadas

Suponha uma estrela que irradia uma potência 100 vezes maior que a do Sol. Esta estrela emite um espectro de radiação com a máxima intensidade em 966 nm.

Qual é o tamanho dessa estrela?

$$\frac{r}{r_\odot}=\left(\frac{T_\odot}{T}\right)^2\cdot\sqrt{\frac{P}{P_\odot}}=\left(\frac{\lambda_{\text{máx}}}{\lambda_{\text{máx}}^{\odot}}\right)^2\cdot\sqrt{\frac{P}{P_\odot}}$$

$$\frac{r}{r_\odot}=\left(\frac{966}{520}\right)^2.\sqrt{100}=34{,}5$$

$$R=P/A=\sigma.T^4$$

$$P=\left(4\pi r^2\right).\sigma.T^4$$

$$\frac{P}{P_\odot}=\frac{\left(4\pi r^2\right).\sigma.T^4}{\left(4\pi r_\odot^2\right).\sigma.T_\odot^4}$$

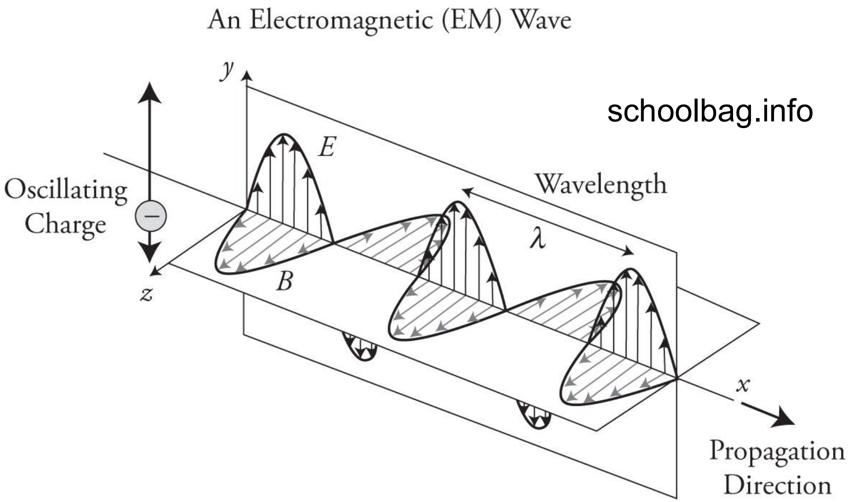
$$r_\odot\approx 7\times 10^8\ \text{m}$$

$$\boxed{r\approx 2{,}4\times 10^{10}\ \text{m}}$$

A radiação de corpo negro

Como essa radiação era interpretada?

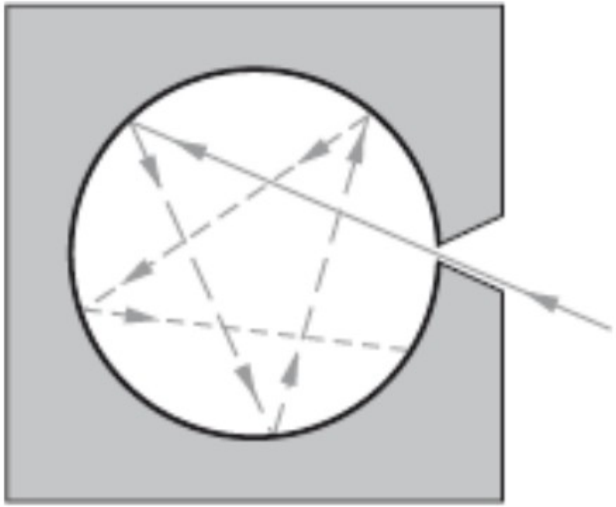
- **Temperatura** → nível de **agitação** das moléculas
  - Conceito da termodinâmica
- **Moléculas possuem cargas**
- Cargas “agitadas” emitem **radiação eletromagnética**
  - Conceito do eletromagnetismo de Maxwell
- **As moléculas na superfície do corpo devem emitir radiação**
- **Então, como explicar o espectro de emissão $R(\lambda)$?**



schoolbag.info

A radiação de corpo negro

- A **emissão de radiação térmica depende de efeitos de superfície** (cor, rugosidade, emissividade, etc)
- A **melhor aproximação** de um corpo negro é o **orifício de uma cavidade**
  - Qualquer radiação incidente no orifício é aprisionada e eventualmente absorvida



Tipler

A radiação de corpo negro

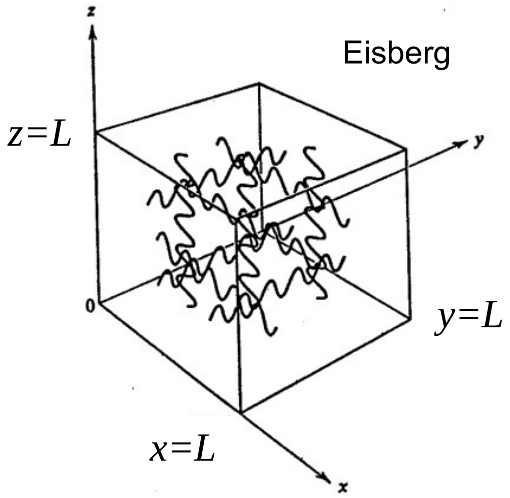
- Corpo negro como uma cavidade não é só uma analogia teórica!
- Fornos de cavidade são vendidas comercialmente para aplicações onde é necessário um espectro de emissão de corpo negro (calibração de equipamentos, por exemplo)

sbir.com

A radiação de corpo negro

A demonstração de Rayleigh-Jeans

- **Supondo uma cavidade cúbica e de paredes metálicas**
- Ondas eletromagnéticas **dentro da cavidade** devem **respeitar as condições de contorno** impostas pelas paredes metálicas
  - Capítulo 18 – Fundamentos da teoria eletromagnética – Reitz, Milford e Christy - 3ª edição, editora Campus.
- **Campos elétrico e magnético nulos nas paredes!**

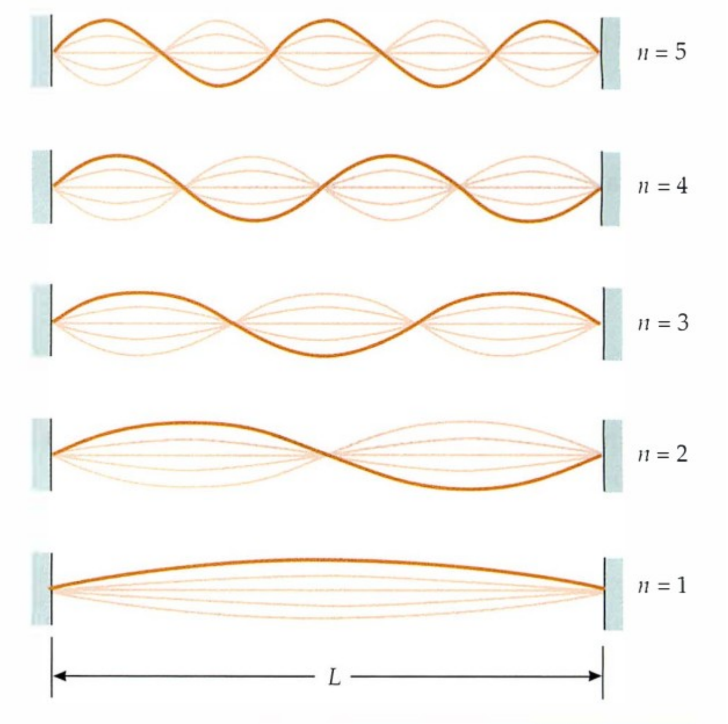


O cálculo da distribuição espectral $R(\lambda)$ envolve **calcular a densidade de ondas eletromagnéticas** dentro da cavidade e multiplicar pela **energia média** de cada onda!

A radiação de corpo negro

A demonstração de Rayleigh-Jeans

- Exemplo **unidimensional**:



Tipler

$$\lambda=\frac{2L}{n}\Rightarrow \text{Comprimentos de onda permitidos}$$

ou

$$\nu=\frac{cn}{2L}\Rightarrow \text{Frequências de onda permitidas}$$

Queremos calcular o número de ondas permitidas entre ν e $\nu+d\nu$ (ou entre λ e $\lambda+d\lambda$).

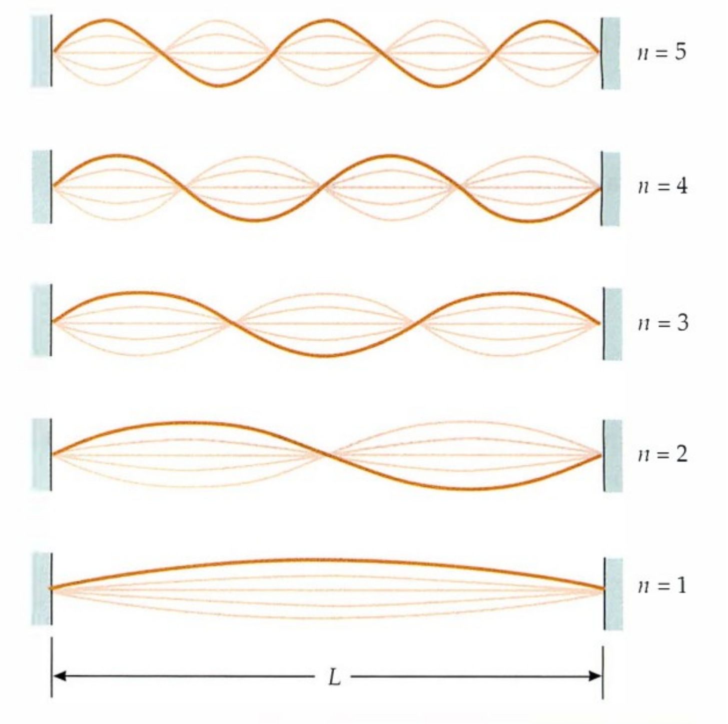
$$\left.\begin{aligned} n_\nu &= \frac{2L}{c}\nu \\ n_{\nu+d\nu} &= \frac{2L}{c}(\nu+d\nu) \end{aligned}\right\} \boxed{\Delta n=\frac{2L}{c}d\nu}$$

x2 polarizações possíveis.

A radiação de corpo negro

A demonstração de Rayleigh-Jeans

- Exemplo **unidimensional**:



Tipler

$$\lambda=\frac{2L}{n}\Rightarrow \text{ Comprimentos de onda permitidos}$$

ou

$$\nu=\frac{cn}{2L}\Rightarrow \text{ Frequências de onda permitidas}$$

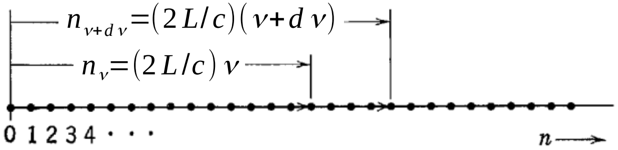
Queremos calcular o número de ondas permitidas entre ν e $\nu+d\nu$ (ou entre λ e $\lambda+d\lambda$).

$$n_\nu=\frac{2L}{c}\nu$$

$$n_{\nu+d\nu}=\frac{2L}{c}(\nu+d\nu)$$

$$\boxed{\Delta n=\frac{2L}{c}d\nu}$$

x2 polarizações possíveis.



A radiação de corpo negro

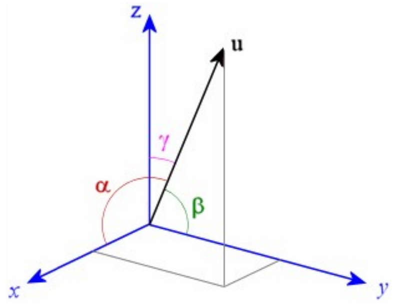
A demonstração de Rayleigh-Jeans

- O caso **tridimensional**:

$$n_x = \frac{2L}{\lambda_x} = \frac{2L}{\lambda} . \cos\alpha$$

$$n_y = \frac{2L}{\lambda_y} = \frac{2L}{\lambda} . \cos\beta$$

$$n_z = \frac{2L}{\lambda_z} = \frac{2L}{\lambda} . \cos\gamma$$



A radiação de corpo negro

A demonstração de Rayleigh-Jeans

- O caso **tridimensional**:

$$n_x = \frac{2L}{\lambda_x} = \frac{2L}{\lambda}.\cos\alpha$$

$$n_y = \frac{2L}{\lambda_y} = \frac{2L}{\lambda}.\cos\beta$$

$$n_z = \frac{2L}{\lambda_z} = \frac{2L}{\lambda}.\cos\gamma$$

$$\left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2 \underbrace{\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma\right)}_{1} = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$$

$$\lambda = \frac{2L}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}}$$

$$\nu = \frac{c}{2L}\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \frac{c}{2L} r$$

$$\boxed{r = \frac{2L}{c}\nu}$$

Com $r = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$

A radiação de corpo negro

A demonstração de Rayleigh-Jeans

- O caso **tridimensional**:

$$n_x = \frac{2L}{\lambda_x} = \frac{2L}{\lambda}.\cos\alpha$$

$$n_y = \frac{2L}{\lambda_y} = \frac{2L}{\lambda}.\cos\beta$$

$$n_z = \frac{2L}{\lambda_z} = \frac{2L}{\lambda}.\cos\gamma$$

$$\left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2 \underbrace{\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma\right)}_{1} = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$$

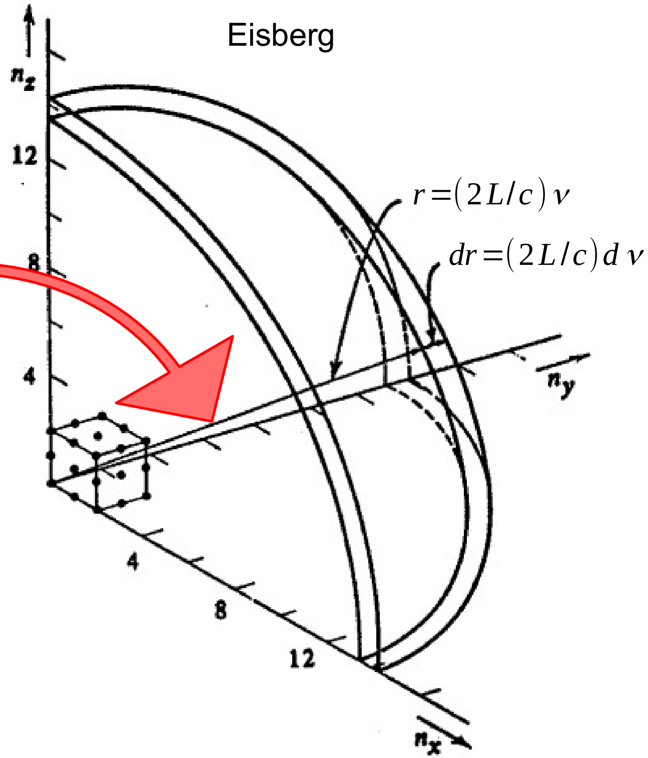
$$\lambda = \frac{2L}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}}$$

$$\nu = \frac{c}{2L}\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \frac{c}{2L} r$$

$$\boxed{r = \frac{2L}{c}\nu}$$

Com $r = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$

Eisberg

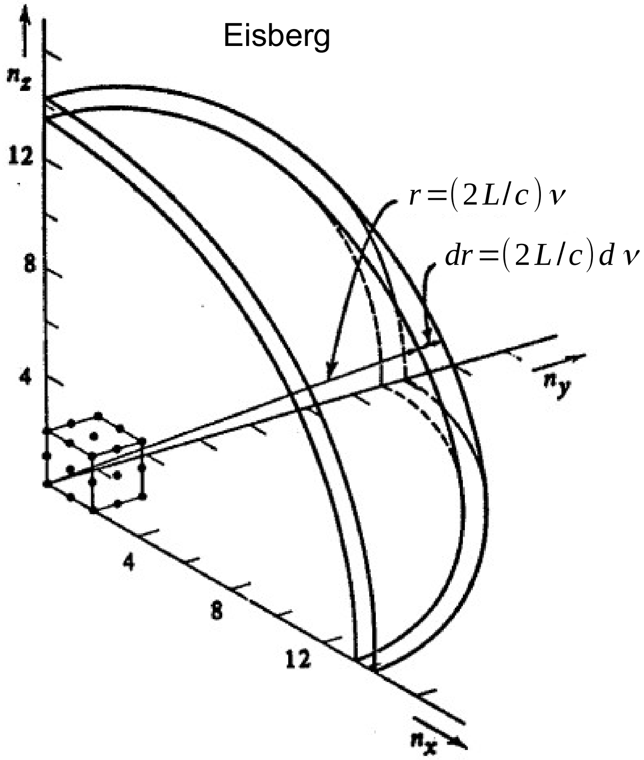


A radiação de corpo negro

A demonstração de Rayleigh-Jeans

- O caso **tridimensional**:

$$N(r)dr =$$



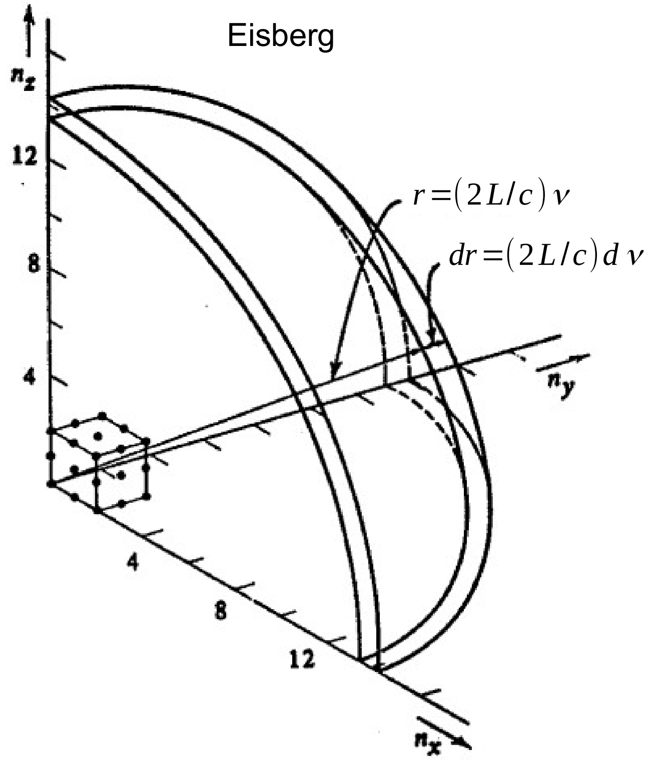
A radiação de corpo negro

A demonstração de Rayleigh-Jeans

- O caso **tridimensional**:

$$N(r)dr = \frac{1}{8} 4\pi r^2 dr = \frac{\pi r^2}{2} dr \qquad r = \frac{2L}{c}\nu \;\Rightarrow\; r^2 dr = \left(\frac{2L}{c}\right)^3 \nu^2 d\nu$$

$$N(\nu) d\nu = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2L}{c}\right)^3 \nu^2 d\nu$$



A radiação de corpo negro

A demonstração de Rayleigh-Jeans

- O caso **tridimensional**:

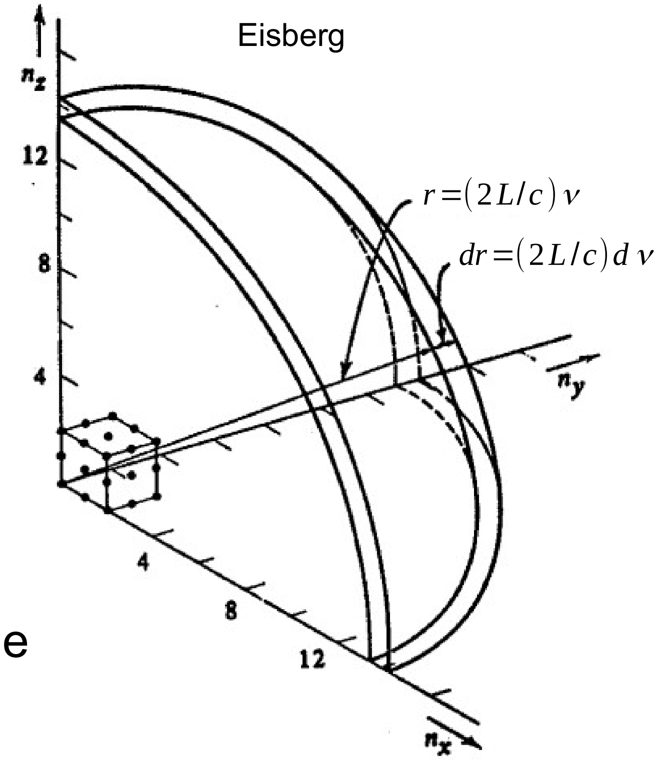
$$N(r)dr = \frac{1}{8} 4\pi r^2 dr = \frac{\pi r^2}{2} dr \qquad r = \frac{2L}{c}\nu \;\Rightarrow\; r^2 dr = \left(\frac{2L}{c}\right)^3 \nu^2 d\nu$$

$$N(\nu)d\nu = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2L}{c}\right)^3 \nu^2 d\nu$$

Densidade de ondas entre ν e $\nu + d\nu$

$$\boxed{n(\nu)d\nu = \left(\frac{4\pi}{c^3}\right)\nu^2 d\nu}$$

x2 polarizações possíveis.



Agora sabemos a **densidade de ondas dentro da cavidade** que respeitam as condições de contorno! Devemos multiplicar esse resultado pela **energia média de cada onda**!

A radiação de corpo negro

A demonstração de Rayleigh-Jeans

- O caso **tridimensional**:

$$n(\nu)\,d\nu = \left(\frac{4\pi}{c^3}\right)\nu^2\,d\nu$$

x2 polarizações possíveis.

- Todos os **osciladores** nas paredes da cavidade (geradores das ondas) estão em **equilíbrio térmico** à temperatura **T**.
- Pelo **princípio da equipartição** da energia:

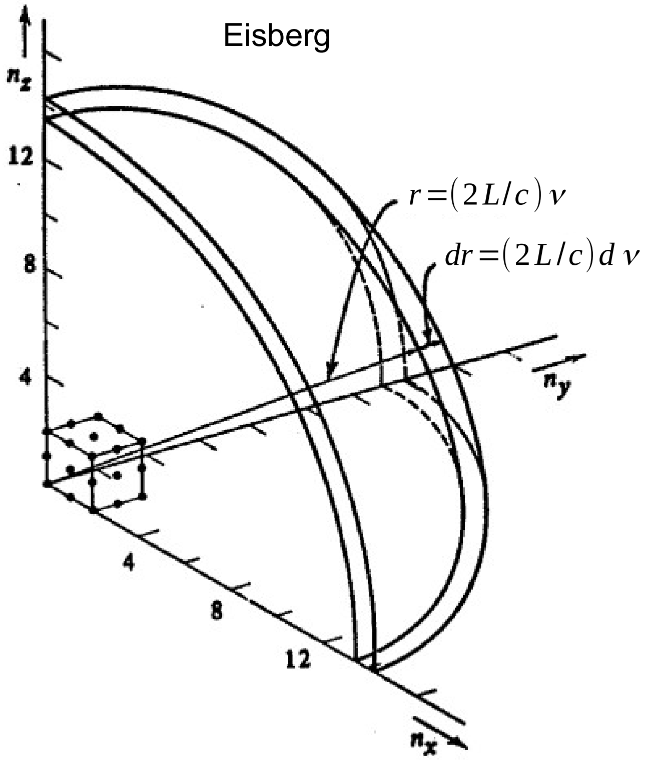
$$\langle E\rangle = kT$$

Resultado da mecânica clássica (dois graus de liberdade no plano)

$\rho = \langle E\rangle . n$ densidade de energia na cavidade

$$\boxed{\rho(\nu)\,d\nu = \left(\frac{8\pi}{c^3}\right)kT\,\nu^2\,d\nu} \qquad \boxed{\rho(\lambda)\,d\lambda = \left(\frac{8\pi}{\lambda^4}\right)kT\,d\lambda}$$

Resultado de Rayleigh-Jeans



A radiação de corpo negro

A demonstração de Rayleigh-Jeans

- O caso **tridimensional**:

$$n(\nu)d\nu = \left(\frac{4\pi}{c^3}\right)\nu^2 d\nu$$

x2 polarizações possíveis.

- Todos os **osciladores** nas paredes da cavidade (geradores das ondas) estão em **equilíbrio térmico** à temperatura **T**.
- Pelo **princípio da equipartição** da energia:

$$\langle E\rangle = kT$$

Resultado da mecânica clássica (dois graus de liberdade no plano)

$$\rho = \langle E\rangle . n \quad \text{densidade de energia na cavidade}$$

$$\boxed{\rho(\nu)d\nu = \left(\frac{8\pi}{c^3}\right)kT\,\nu^2 d\nu} \qquad \boxed{\rho(\lambda)d\lambda = \left(\frac{8\pi}{\lambda^4}\right)kT\,d\lambda}$$

Resultado de Rayleigh-Jeans

Note que o resultado de Rayleigh-Jeans apresenta:

$$\boxed{\int_0^\infty \rho(\lambda)d\lambda = \infty}$$

E não possui ponto de máximo!

A radiação de corpo negro

A demonstração de Rayleigh-Jeans

- O caso **tridimensional**:

$$n(\nu)\,d\nu = \left(\frac{4\pi}{c^3}\right)\nu^2\,d\nu$$

x2 polarizações possíveis.

- Todos os **osciladores** nas paredes da cavidade (geradores das ondas) estão em **equilíbrio térmico** à temperatura **T**.
- Pelo **princípio da equipartição** da energia:

$$\langle E\rangle = kT$$

Resultado da mecânica clássica (dois graus de liberdade no plano)

$$\rho = \langle E\rangle . n \quad \text{densidade de energia na cavidade}$$

$$\boxed{\rho(\nu)\,d\nu = \left(\frac{8\pi}{c^3}\right)kT\,\nu^2\,d\nu} \qquad \boxed{\rho(\lambda)\,d\lambda = \left(\frac{8\pi}{\lambda^4}\right)kT\,d\lambda}$$

Resultado de Rayleigh-Jeans

Note que o resultado de Rayleigh-Jeans apresenta:

$$\boxed{\int_0^\infty \rho(\lambda)\,d\lambda = \infty}$$

E não possui ponto de máximo!

Logo, Lei de Stefan-Boltzmann e de Wien não são respeitadas!

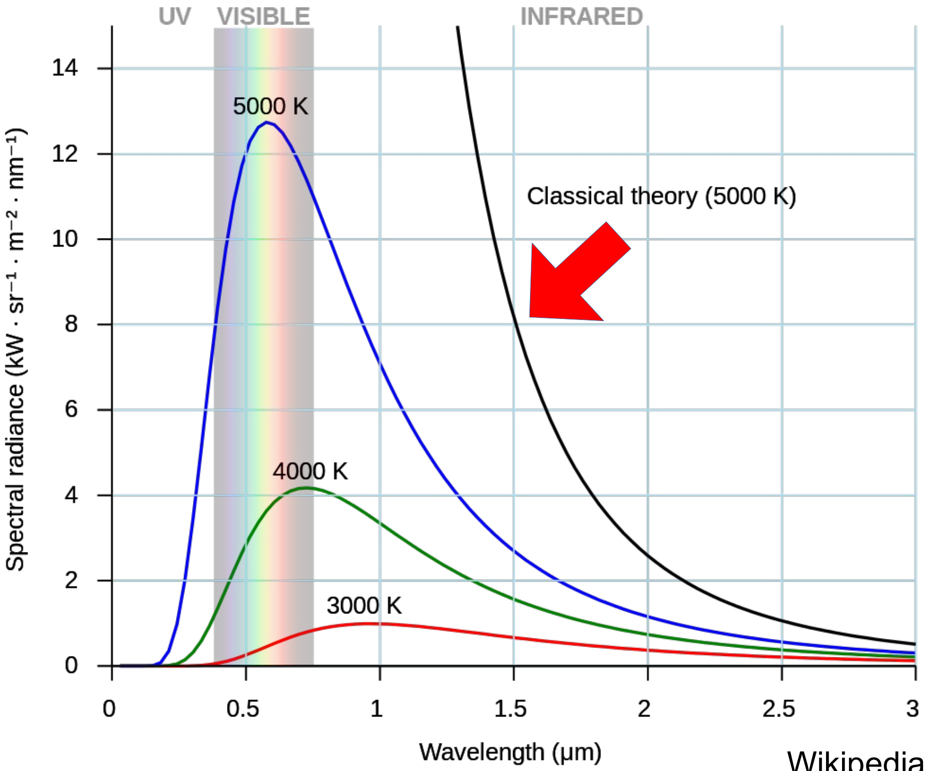
A radiação de corpo negro

A demonstração de Rayleigh-Jeans

$$\boxed{\rho(\nu)\,d\nu = \left(\frac{8\pi}{c^3}\right) kT\,\nu^2\,d\nu}$$

$$\boxed{\rho(\lambda)\,d\lambda = \left(\frac{8\pi}{\lambda^4}\right) kT\,d\lambda}$$

<u>Resultado de Rayleigh-Jeans</u>



Wikipedia

A radiação de corpo negro

A teoria de Planck

- Planck percebeu que para **frequências baixas**, o resultado de **Rayleigh-Jeans era satisfatório**, mas que para **frequências altas** a **discrepância** era enorme! (catástrofe do ultravioleta)
  - Ele então, **desconfiou** da suposição da **equipartição de energia**
  - E como a energia média é calculada?

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty E . f(E) dE}{\int_0^\infty f(E) dE} \qquad\qquad \langle E \rangle = kT$$

Com $f(E) = e^{-E/kT}/kT$ sendo a função de distribuição de energia de Maxwel

  - De alguma forma, Planck precisava impor que: $\lim_{\nu \to 0} \langle E \rangle = kT$ e $\lim_{\nu \to \infty} \langle E \rangle = 0$

A radiação de corpo negro

A teoria de Planck

- Planck percebeu que para **frequências baixas**, o resultado de **Rayleigh-Jeans era satisfatório**, mas que para **frequências altas** a **discrepância** era enorme! (catástrofe do ultravioleta)
  - Ele então, **desconfiou** da suposição da **equipartição de energia**
  - E como a energia média é calculada?

$$\langle E\rangle=\frac{\int_0^\infty E.f(E)dE}{\int_0^\infty f(E)dE} \qquad \langle E\rangle=kT$$

Com $f(E)=e^{-E/kT}/kT$ sendo a função de distribuição de energia de Maxwel

Dependência da frequência

  - De alguma forma, Planck precisava impor que: $\boxed{\lim_{\nu\to 0}\langle E\rangle=kT \quad \text{e} \quad \lim_{\nu\to\infty}\langle E\rangle=0}$

A radiação de corpo negro

A teoria de Planck

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty E.f(E)\,dE}{\int_0^\infty f(E)\,dE}$$

Modelo clássico
Distribuição contínua dos osciladores

$$\langle E \rangle = \frac{\sum n.\Delta E.f(n.\Delta E)}{\sum f(n.\Delta E)}$$

Modelo de Planck
Distribuição discreta dos osciladores

Com $f(E) = e^{-E/kT}/kT$ sendo a função de distribuição de energia de Maxwel

A radiação de corpo negro

A teoria de Planck

$$\langle E \rangle = \frac{\sum n.\Delta E.f(n.\Delta E)}{\sum f(n.\Delta E)}$$

Conceito chave → as diferentes ondas eletromagnéticas **não tem a mesma energia média** (kT), e só podem adotar múltiplos de ΔE.

$$\langle E \rangle = \frac{\left(0+\Delta E.e^{-\Delta E/kT}+2.\Delta E.e^{-2.\Delta E/kT}+3.\Delta E.e^{-3.\Delta E/kT}+\ldots\right)}{\left(1+e^{-\Delta E/kT}+e^{-2.\Delta E/kT}+e^{-3.\Delta E/kT}+\ldots\right)}$$

$$\langle E \rangle = \frac{\Delta E.e^{-\Delta E/kT}.\left(1+2.e^{-\Delta E/kT}+3.e^{-2.\Delta E/kT}+\ldots\right)}{\left(1+e^{-\Delta E/kT}+e^{-2.\Delta E/kT}+e^{-3.\Delta E/kT}+\ldots\right)}$$

$$x=e^{-\Delta E/kT}$$

A radiação de corpo negro

A teoria de Planck

$$\langle E \rangle = \frac{\sum n.\Delta E.f(n.\Delta E)}{\sum f(n.\Delta E)}$$

Conceito chave → as diferentes ondas eletromagnéticas **não tem a mesma energia média** (kT), e só podem adotar múltiplos de ΔE.

$$\langle E \rangle = \frac{(0 + \Delta E.e^{-\Delta E/kT} + 2.\Delta E.e^{-2.\Delta E/kT} + 3.\Delta E.e^{-3.\Delta E/kT} + \ldots)}{(0 + e^{-\Delta E/kT} + e^{-2.\Delta E/kT} + e^{-3.\Delta E/kT} + \ldots)}$$

$$\langle E \rangle = \frac{\Delta E.e^{-\Delta E/kT}.(1 + 2.x + 3.x^2 + \ldots)}{(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)}$$

$$x = e^{-\Delta E/kT}$$

A radiação de corpo negro

A teoria de Planck

$$\langle E\rangle = \frac{\sum n.\Delta E.f(n.\Delta E)}{\sum f(n.\Delta E)}$$

Conceito chave → as diferentes ondas eletromagnéticas **não tem a mesma energia média** (kT), e só podem adotar múltiplos de ΔE.

$$\langle E\rangle = \frac{\left(0+\Delta E.e^{-\Delta E/kT}+2.\Delta E.e^{-2.\Delta E/kT}+3.\Delta E.e^{-3.\Delta E/kT}+\ldots\right)}{\left(0+e^{-\Delta E/kT}+e^{-2.\Delta E/kT}+e^{-3.\Delta E/kT}+\ldots\right)}$$

$$\langle E\rangle = \frac{\Delta E.e^{-\Delta E/kT}.\overbrace{\left(1+2.x+3.x^2+\ldots\right)}^{\frac{1}{(1-x)^2}}}{\underbrace{\left(1+x+x^2+x^3+\ldots\right)}_{\frac{1}{1-x}}}$$

$$x=e^{-\Delta E/kT}$$

A radiação de corpo negro

A teoria de Planck

$$\langle E \rangle = \frac{\sum n.\Delta E.f(n.\Delta E)}{\sum f(n.\Delta E)}$$

Conceito chave → as diferentes ondas eletromagnéticas **não tem a mesma energia média** (kT), e só podem adotar múltiplos de ΔE.

$$\langle E \rangle = \frac{(0+\Delta E.e^{-\Delta E/kT}+2.\Delta E.e^{-2.\Delta E/kT}+3.\Delta E.e^{-3.\Delta E/kT}+\ldots)}{(0+e^{-\Delta E/kT}+e^{-2.\Delta E/kT}+e^{-3.\Delta E/kT}+\ldots)}$$

$$x = e^{-\Delta E/kT}$$

$$\langle E \rangle = \frac{\Delta E.e^{-\Delta E/kT}.\overbrace{(1+2.x+3.x^2+\ldots)}^{\frac{1}{(1-x)^2}}}{\underbrace{(1+x+x^2+x^3+\ldots)}_{\frac{1}{1-x}}}$$

$$\langle E \rangle = \frac{\Delta E.e^{-\Delta E/kT}.(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{\Delta E.e^{-\Delta E/kT}}{(1-x)}$$

$$\boxed{\langle E \rangle = \frac{\Delta E.e^{-\Delta E/kT}}{(1-e^{-\Delta E/kT})} = \frac{\Delta E}{(e^{\Delta E/kT}-1)}}$$

A radiação de corpo negro

A teoria de Planck

Note que com isso,
Planck obteve:

$$\boxed{\langle E \rangle = \frac{\Delta E}{\left(e^{\Delta E/kT} - 1\right)}}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\Delta E \to 0} \langle E \rangle = \lim\limits_{\Delta E \to 0} \dfrac{\Delta E}{\left(e^{\Delta E/kT} - 1\right)} = \dfrac{\Delta E}{\Delta E/kT} = kT \\[2ex] \lim\limits_{\Delta E \to \infty} \langle E \rangle = \lim\limits_{\Delta E \to \infty} \dfrac{\Delta E}{\left(e^{\Delta E/kT} - 1\right)} = 0 \end{cases}$$

A radiação de corpo negro

A teoria de Planck

Do slide 34!

Só faltava agora, resolver a dependência com a frequência:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\nu\to 0}\langle E\rangle = kT \\ \lim\limits_{\nu\to\infty}\langle E\rangle = 0\end{array}\right\} \quad \Delta E = h.\nu$$

Voltando a:

$\rho = \langle E\rangle . n$ densidade de energia na cavidade

$$n(\nu)\,d\nu = \left(\frac{8\pi}{c^3}\right)\nu^2\,d\nu$$

$$\boxed{\rho(\nu)\,d\nu = \left(\frac{8\pi}{c^3}\right)\frac{h.\nu^3}{\left(e^{h.\nu/kT}-1\right)}\,d\nu}$$

$$\boxed{\rho(\lambda)\,d\lambda = \frac{8\pi.h.c\,\lambda^{-5}}{e^{h.c/\lambda.kT}-1}\,d\lambda}$$

Resultado de Planck

A radiação de corpo negro

A teoria de Planck

$$\boxed{\rho(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi.h.c\lambda^{-5}}{e^{h.c/\lambda.kT}-1}d\lambda}$$

Resultado de Planck

Note que para comprimentos de onda grandes: $\lim_{\lambda\to\infty}(e^{h.c/\lambda.kT}-1)\approx\frac{h.c}{\lambda.kT}$

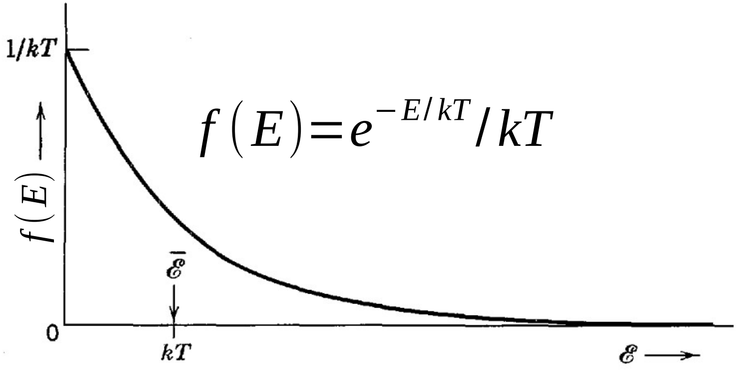
Logo: $\boxed{\rho(\lambda)d\lambda \to \frac{8\pi}{\lambda^4}kT\,d\lambda}$ que é o resultado de Rayleigh-Jeans!

Já para comprimentos de onda pequenos: $\boxed{\rho(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi.h.c\lambda^{-5}}{e^{h.c/\lambda.kT}}d\lambda \to 0}$

Resolvendo a “catástrofe do ultravioleta”!

A radiação de corpo negro

A teoria de Planck



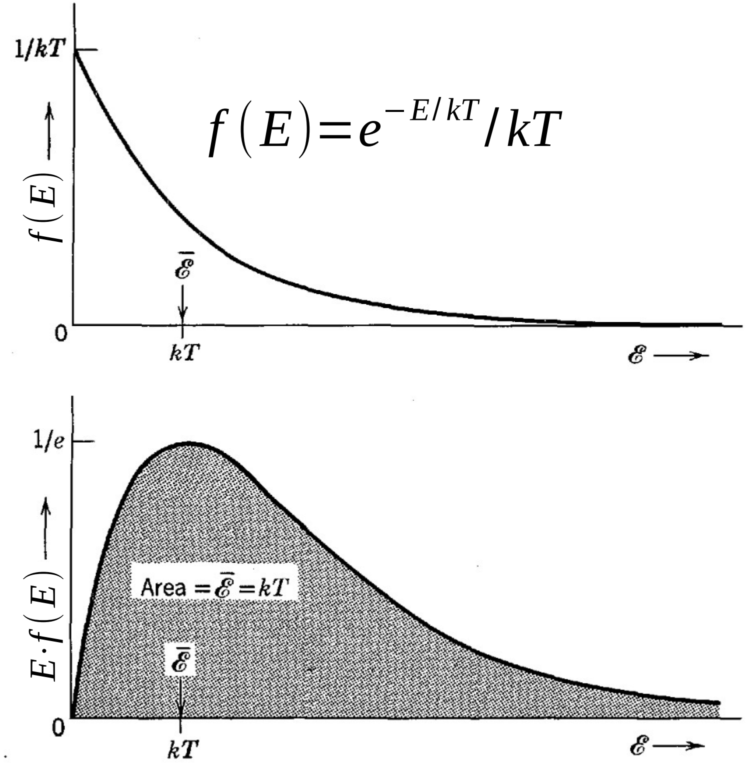
$$f(E) = e^{-E/kT}/kT$$

Eisberg

$$\boxed{\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty E.f(E)dE}{\int_0^\infty f(E)dE} = kT}$$

A radiação de corpo negro

A teoria de Planck



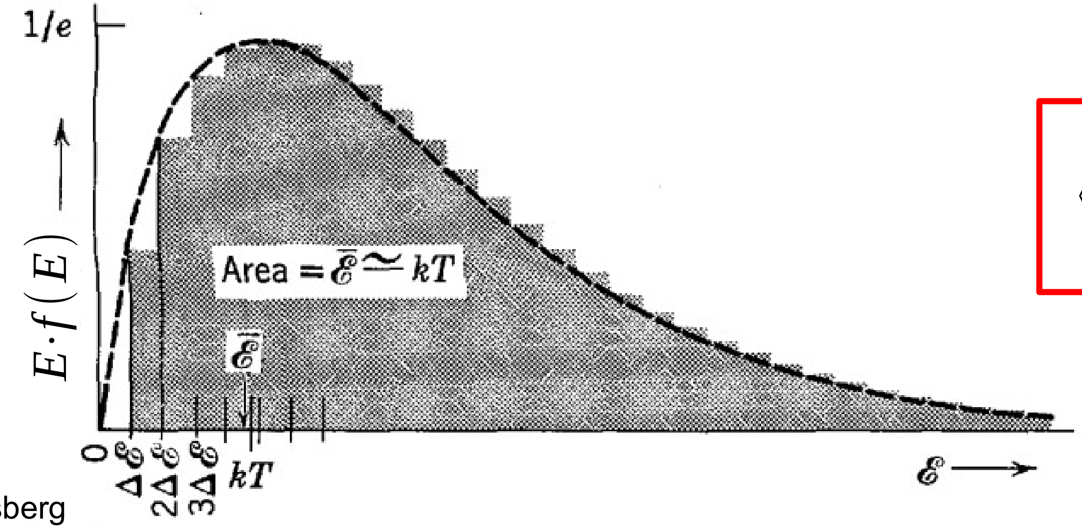
$$f(E) = e^{-E/kT}/kT$$

Eisberg

$$\boxed{\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty E.f(E)\,dE}{\int_0^\infty f(E)\,dE} = kT}$$

A radiação de corpo negro

A teoria de Planck

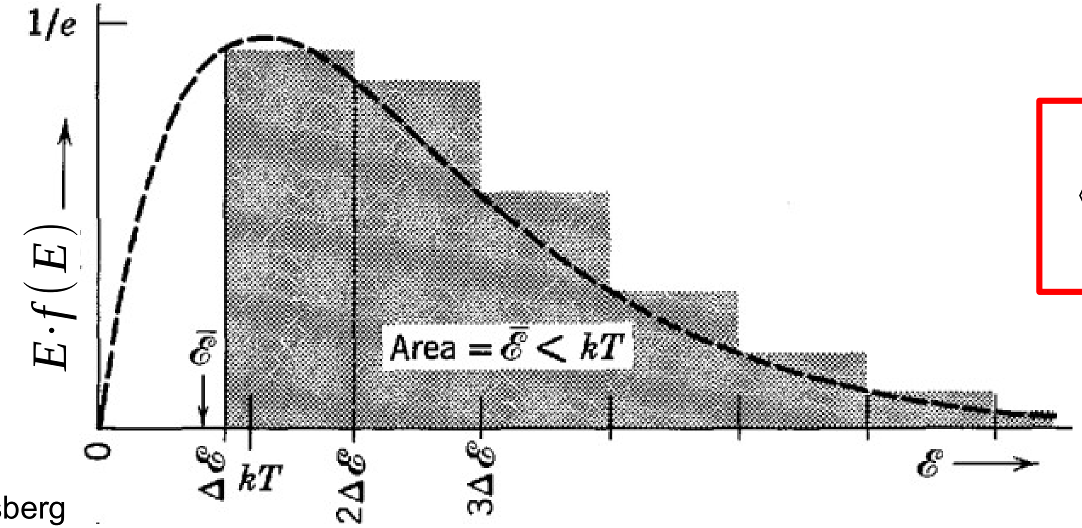


Eisberg

$$\langle E\rangle = \frac{\sum n.\Delta E.f(n.\Delta E)}{\sum f(n.\Delta E)} \approx kT$$

A radiação de corpo negro

A teoria de Planck

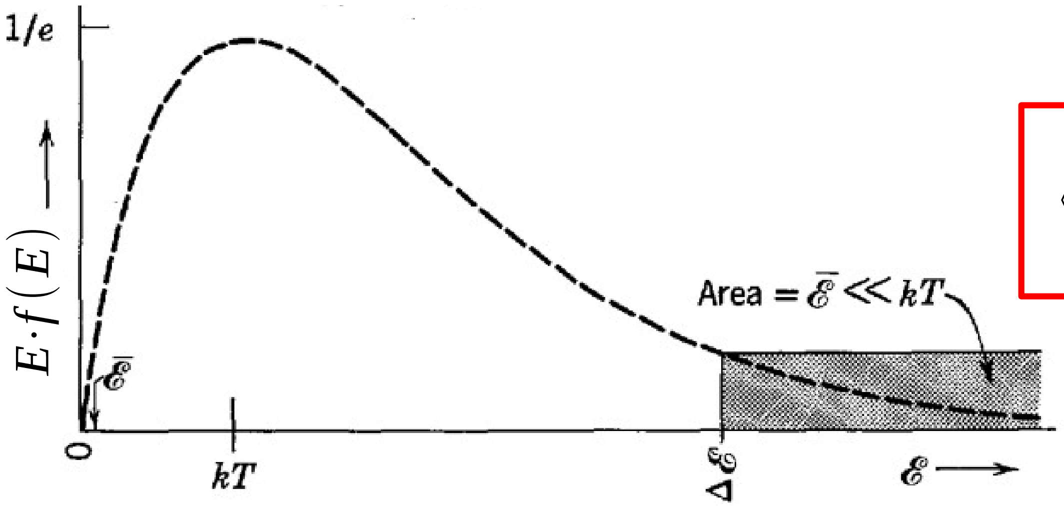


Eisberg

$$\boxed{\langle E \rangle = \frac{\sum n.\Delta E.f(n.\Delta E)}{\sum f(n.\Delta E)} < kT}$$

A radiação de corpo negro

A teoria de Planck



Eisberg

$$\boxed{\langle E \rangle = \frac{\sum n.\Delta E.f(n.\Delta E)}{\sum f(n.\Delta E)} \ll kT}$$

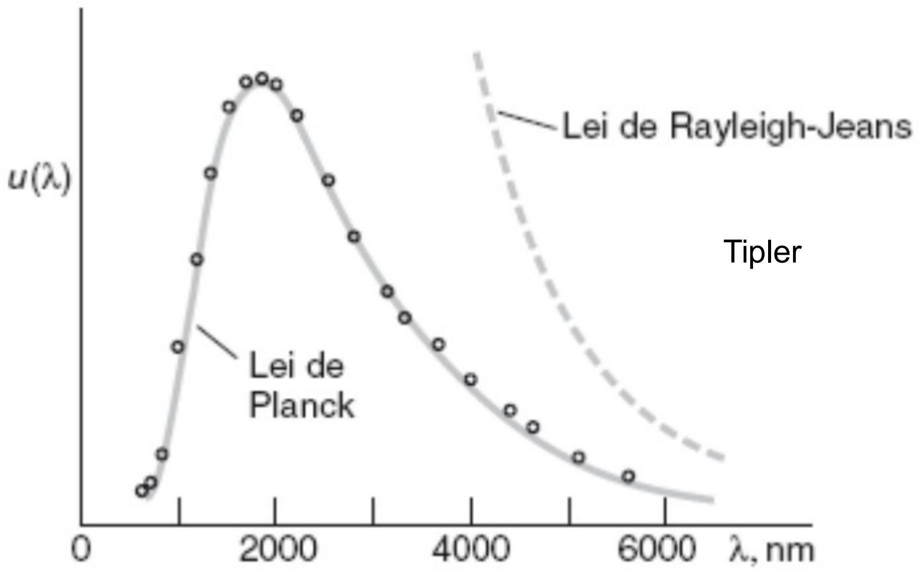
A radiação de corpo negro

A teoria de Planck

- Planck achava que ele tinha **desenvolvido um artifício matemático** para resolver o problema da catástrofe do ultravioleta, e obteve o valor de h que **melhor descrevia os dados experimentais** disponíveis na época:

$$\boxed{h = 6{,}63 \times 10^{-34} \text{ J.s}}$$

Constante de Planck



Tipler

A radiação de corpo negro

A teoria de Planck

- Planck achava que ele tinha **desenvolvido um artifício matemático** para resolver o problema da catástrofe do ultravioleta, e obteve o valor de h que **melhor descrevia os dados experimentais** disponíveis na época:

$$\boxed{h = 6{,}63 \times 10^{-34}\ \mathrm{J.s}}$$

Constante de Planck

- Na verdade, **a suposição de Planck** impõem que os pequenos **osciladores** que constituem as paredes da cavidade e estão em equilíbrio térmico, **só podem assumir certos valores discretos de energia**

Próxima aula...

- O efeito fotoelétrico:
  - Definição do efeito fotoelétrico
  - As hipóteses de Einstein
  - O experimento de Millikan
  - O efeito Compton
  - A produção e a aniquilação de pares