PNV3421 - Processos Estocásticos

Notas de Aula de Teoria de Filas 27/08/2020

Variável Aleatória Sem Memória - Definição, Interpretação e Exemplos

1. Definição

Diz-se que uma variável aleatória não negativa X não tem memória se, para quaisquer $s, t \geq 0$,

$$P[X > s + t / X > s] = P[X > t] \quad (1)$$

Lembrando da disciplina de Probabilidade que a probabilidade condicional $P[A/B]$ é:

$$P[A/B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} \quad (2)$$

é possível apresentar uma definição alternativa para variável aleatória sem memória. De fato, de acordo com (2), o lado esquerdo da expressão (1) pode ser escrito como:

$$P[X > s + t / X > s] = \frac{P[X > s + t \cap X > s]}{P[X > s]}$$

e, sendo X uma variável não negativa, resulta:

$$P[X > s+t / X > s] = \frac{P[X > s+t]}{P[X > s]} \quad (3)$$

Assim, a partir das expressões (1) e (3), decorre a definição alternativa:

Diz-se que uma variável aleatória não negativa X não tem memória se, para quaisquer $s, t \geq 0$

$$P[X > s+t] = P[X > s] P[X > t] \quad (4)$$

Lembrando ainda da disciplina de Probabilidade que:

$$F_X(x) = P[X \leq x] \quad \text{e}$$

$$\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x) = P[X > x]$$

a expressão (4) pode ser reescrita na forma

$$\bar{F}_X(s+t) = \bar{F}_X(s) \cdot \bar{F}_X(t) \quad (4')$$

2. Interpretação

Caso 1

Admita que a variável aleatória não negativa X represente a vida útil de um dado equipamento, dispositivo ou material. Considere a Figura 1 abaixo; no instante zero, o equipamento foi colocado em operação e no instante s continuava em operação; deseja-se saber qual é a probabilidade que a vida útil X seja maior que $s+t$, dado que $X > s$, isto é deseja-se saber o valor de $P[X > s+t / X > s]$. Na figura 1, Z representa a idade do equipamento no instante s e Y a vida residual a partir deste instante.

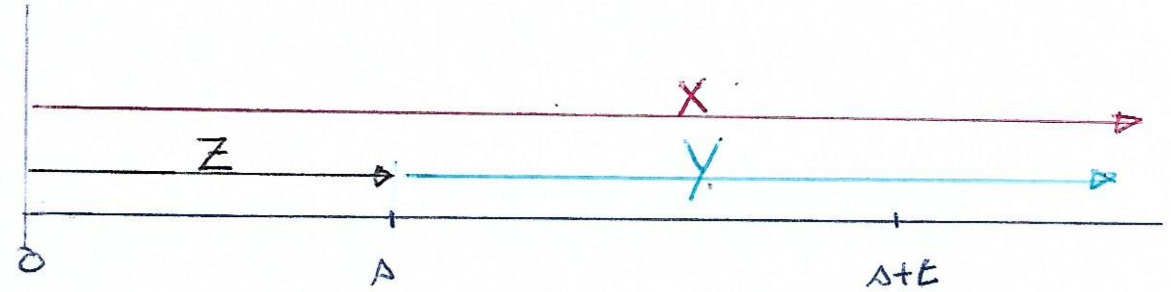

Figura 1 Acompanhamento da vida útil de um equipamento

Observe-se que $X > s+t / X > s$ implica que a vida residual Y seja maior que t e reciprocamente.

Assim,

$$P[X>s+t/X>s] = P[Y>t] \quad (5)$$

Agora, se for aceita a hipótese que X é uma variável aleatória sem memória, de (1) e (5) resulta:

$$P[X>t] = P[Y>t] \quad (6)$$

Isto é, a vida útil de um equipamento, X, e a vida residual deste equipamento, a partir de um instante qualquer $s>0$, têm a mesma distribuição de probabilidade. Isto é, "com o uso do equipamento, não haveria desgaste que afetasse a sua durabilidade". Você aceitaria que a vida útil da bateria elétrica de um carro, X, e a vida residual desta mesma bateria depois de 2 anos de operação, Y, possam ser representadas por uma mesma distribuição de probabilidade? Ou que $P[X>2] = P[Y>2]$?

Caso 2

Admita que a variável aleatória não negativo X represente os intervalos entre chegadas consecutivas de navios a um dado porto. Admita ainda que você estava no porto e observou a chegada de um navio; a partir deste instante, designado por instante zero, você passa a aguardar a chegada do próximo navio. Caso após 3 horas não tenha chegado nenhum navio, qual é a probabilidade que você tenha de esperar mais duas horas para a chegada do próximo navio? Isto é, qual é o valor de

$$P[X > 3+2 / X > 3] \quad ?$$

Na Figura 2, análoga à Figura 1, Y representa o intervalo residual até a próxima chegada, medido a partir do instante 3. Como no caso da vida útil de um equipamento, vale a relação

$$P[X > 3+2 / X > 3] = P[Y > 2] \quad (7)$$

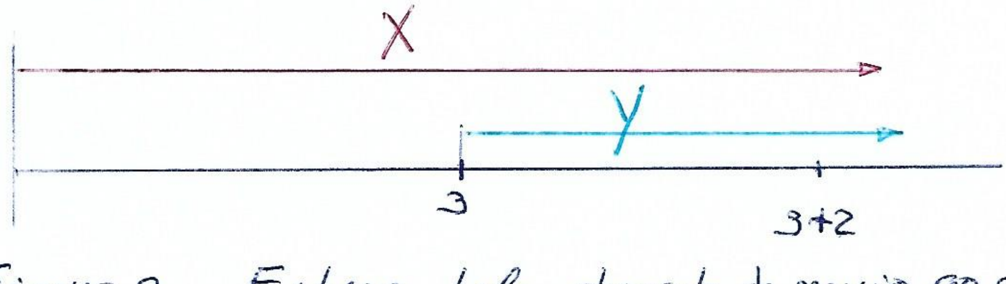

Figura 2 . Espera pela chegada de navio ao porto

Caso a variável aleatória X não tenha memória, satisfazendo, portanto, a expressão (1), de (1) e (7) resulta:

$$P[X > 2] = P[Y > 2] \quad (8)$$

Ou seja: você já esperou 3 horas e a probabilidade de esperar mais de duas horas adicionais até a próxima chegada é igual à probabilidade que você tinha de esperar mais de duas horas no instante zero.

3 Exemplos de Variável Aleatória Sem Memória

Cabe agora mostrar que existem variáveis aleatórias sem memória, que a expressão (1) não é apenas um devaneio matemático. O passo seguinte seria identificar que processos reais elas representam.

3.1 A variável aleatória exponencial não tem memória

Lembrando da disciplina de Probabilidade, uma variável aleatória exponencial X tem função densidade de probabilidade $f_X(x)$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0 \quad (9)$$

e função acumulada de probabilidade $F_X(x)$

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \int_0^x f_X(t)\,dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt$$

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad , x \geq 0 \qquad (10)$$

Ainda,

$$\bar{F}_X(x) = P[X > x] = 1 - F_X(x)$$

$$\bar{F}_X(x) = e^{-\lambda x} \qquad (11)$$

A partir da expressão (11), é simples mostrar que a variável aleatória exponencial não tem memória pois satisfaz a expressão (4'). De fato,

$$\bar{F}_X(s+t) = e^{-\lambda(s+t)} = e^{-\lambda s} \cdot e^{-\lambda t} =$$

$$= \bar{F}_X(s) \cdot \bar{F}_X(t) \qquad (4')$$

3.2 A variável exponencial é a única variável aleatória contínua que não tem memória. (sem demonstração)

Esta propriedade confere à variável aleatória exponencial um papel de destaque no estudo de processos estocásticos.

3.3 A variável aleatória geométrica não tem memória.

Considere-se uma sequência de experimentos com as seguintes características: em qualquer experimento há dois resultados possíveis: sucesso ou fracasso; e a probabilidade de sucesso, p, é constante ao longo da sequência de experimentos. Seja, então, N o número de experimentos até a obtenção do primeiro sucesso. A variável aleatória N tem a seguinte distribuição:

$$P[N=n] = (1-p)^{n-1} \cdot p \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (12)$$

conforme ilustrado na figura abaixo.

$$\begin{array}{cccccccc} F & F & F & \_ & \_ & \_ \ldots & F & S \\ 1 & 2 & 3 & & & & n-1 & n \end{array}$$

Esta variável N, cuja distribuição é expressa de acordo com (12) é chamada de variável aleatória geométrica. Cabe agora mostrar que ela não tem memória. Para tanto, calcula-se

$$\bar{F}_N(n) = P[N>n] = \sum_{k=n+1}^{\infty} P[N=k] =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p \quad = p \sum_{k=n+1}^{\infty} (1-p)^{k-1} =$$

$$= p \sum_{k=n}^{\infty} (1-p)^k = p\frac{(1-p)^n}{p} = (1-p)^n \quad (13)$$

O mesmo resultado pode ser obtido mais facilmente que $P[N>n]$ é igual a probabilidade de que os primeiros n experimentos resultem em fracasso.

A partir de (1), para quaisquer $s, t \geq 0$

$$\bar{F}_N(s+t) = (1-p)^{s+t} = (1-p)^s \cdot (1-p)^t =$$

$$= \bar{F}_N(s) \cdot \bar{F}_N(t) \quad (14)$$

que é igual a (4'). Portanto, a variável geométrica não tem memória.

Aprendendo a Trabalhar com Duas Variáveis Aleatórias em um Mesmo Problema

Em geral, nos cursos básicos de Probabilidade, os problemas envolvem apenas uma variável aleatória e não se trata de distribuição conjunta de duas variáveis aleatórias. Como em Teoria de Filas serão examinados problemas envolvendo duas variáveis aleatórias, pretende-se mostrar, por meio de alguns exemplos, como trabalhar com duas variáveis aleatórias sem recorrer à distribuição conjunta dessas variáveis. A seguir, apresenta-se o primeiro exemplo.

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias exponenciais com as seguintes funções densidades de probabilidade:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad f_Y(y) = \mu e^{-\mu y}$$

$$(\bar{F}_X(x) = e^{-\lambda x})$$

Qual é a probabilidade de que X seja maior que Y?

O procedimento utilizado para dar resposta a essa questão é o seguinte:

1- Fixando-se um valor t para a variável Y, calcula-se a probabilidade condicional $P[X>Y/Y=t]$;

2 - Para eliminar a condicionalidade ao valor fixado t, pondera-se a probabilidade condicional obtida pela função densidade de probabilidade da variável Y e integra-se o produto em todo o campo de definição da variável Y.

Implemetação do procedimento acima descrito

Passo 1

$$P[X>Y/Y=t] = P[X>t] =$$

$$= \bar{F}_X(t) = e^{-\lambda t}$$

Passo 2

$$P[X>Y] = \int_0^\infty P[X>Y/Y=t]\, f_Y(t)\, dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mu e^{-\mu t} dt = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \int_0^\infty (\lambda+\mu) e^{-(\lambda+\mu)t} dt$$

$$= \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$