Programação Dinâmica - II

Mauro Rodrigues (USP)

2020

Descentralização do modelo neoclássico

- Famílias e firmas tomam decisões
  - Famílias: consumo, oferta de trabalho, poupança/investimento
  - Firmas: demanda de trabalho e capital, oferta de produto
- Interagem via mercado:
  - Decisões mediadas pelo sistema de preços
  - Preços são tais que decisões de oferta e demanda são consistentes entre si
- Famílias são donas dos fatores de produção
  - Vendem serviços dos fatores de produção para firmas
  - Compram produto das firmas, que pode ser usado para consumo e investimento

Formulação sequencial

- Em cada período t, há 4 mercados abertos:
  - Trabalho
    - Oferta = famílias
    - Demanda = firmas
  - Capital
    - Oferta = famílias
    - Demanda = firmas
  - Produto
    - Oferta = firmas
    - Demanda = famílias
  - Ativo financeiro: em cada período t, agentes podem comprar/vender ativo financeiro entre si

Ativo financeiro

- Para cada unidade comprada em t, promete pagar 1 unidade de produto no período seguinte
- Q_t: preço do ativo em t, que vencerá em $t+1$
- Taxa de juros entre t e $t+1$:

$$R_{t+1} = \frac{1}{Q_t} - 1$$

- Ou:

$$Q_t = \frac{1}{1 + R_{t+1}}$$

Preços

- Supomos o produto como o numerário dessa economia
- w_t: salário (preço do trabalho)
- r_t: taxa de aluguel do capital (preço do capital)
- Q_t: preço do ativo financeiro

- Não arbitragem: retorno do capital físico igual ao do ativo financeiro:

$$R_t = r_t - \delta$$

Problema da família representativa

- Preferência:

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1 - n_t)$$

- Restrição orçamentária em t:

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + Q_t b_{t+1} \leq w_t n_t + r_t k_t + b_t$$

- Lado esquerdo – recursos disponíveis em t
  - $w_t n_t$: renda do trabalho
  - $r_t k_t$: renda do capital
  - b_t: ativos adquiridos em $t-1$, e que estão vencendo em t (cada um paga 1 unidade de produto)
    - se $b_t < 0$ família precisa repagar empréstimo contraído)
- Lado direito – usos a serem dados para recursos
  - c_t: consumo (preço $= 1$)
  - $i_t = k_{t+1} - (1-\delta)k_t$: investimento (preço $= 1$)
  - $Q_t b_{t+1}$: aquisição de títulos novos (a vencer em $t+1$)

Problema da família representativa

- **Problema sequencial**: resolver as trajetórias ótimas inteiras uma única vez
- Encontrar sequências ótimas de consumo, trabalho e ativos $\{c_t, n_t, k_{t+1}, b_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ que maximizam U, dadas as restrições
  - Restrição orçamentária em todo $t \geq 0$
  - Condição de Non-Ponzi Game (NPG)
  - Estoques iniciais de ativos dados – k_0, b_0
  - Sequência inteira de preços dada – $\{w_t, r_t, Q_t\}_{t=0}^{\infty}$
    - ★ Problema competitivo

Problema da família representativa

$$\max_{\{c_t, n_t, k_{t+1}, b_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1 - n_t) \right\}$$

s.t.

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + Q_t b_{t+1} \leq w_t n_t + r_t k_t + b_t, \ \forall t \geq 0$$

$$k_0, b_0, \{w_t, r_t, Q_t\}_{t=0}^{\infty} \text{ dados}$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{\prod_{s=1}^{t}(1 + R_s)} b_t \geq 0 \text{ (NPG)}$$

- Lembrando que $R_{t+1} = 1/Q_t - 1$

Condições de primeira ordem

- Lagrangeano:

$$\mathscr{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{u(c_t, 1 - n_t) +$$

$$+\mu_t [w_t n_t + r_t k_t + b_t - c_t - k_{t+1} + (1-\delta) k_t - Q_t b_{t+1}]\}$$

- Condições de primeira ordem

$$c_t : \beta^t \{u_{ct} - \mu_t\} = 0$$

$$n_t : \beta^t \{-u_{lt} + \mu_t w_t\} = 0$$

$$k_{t+1} : -\beta^t \mu_t + \beta^{t+1} \mu_{t+1} \{r_{t+1} + (1-\delta)\} = 0$$

$$b_{t+1} : -\beta^t \mu_t Q_t + \beta^{t+1} \mu_{t+1} = 0$$

Condições de primeira ordem

- Reescrevendo:

$$u_{ct} = \lambda_t$$

$$u_{lt} = u_{ct} w_t$$

$$u_{ct} = \beta u_{c,t+1}\{r_{t+1} + (1-\delta)\}$$

$$u_{ct} Q_t = \beta u_{c,t+1}$$

- Das duas equações de Euler, note que:

$$\frac{u_{ct}}{\beta u_{c,t+1}} = r_{t+1} + (1-\delta) = \frac{1}{Q_t} = 1 + R_{t+1}$$

- Logo, temos a condição de não arbitragem entre capital e ativo financeiro:

$$R_t = r_t - \delta$$

Condição de transversalidade

- Reescrevendo Lagrangeano:

$$\mathscr{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{u(c_t, 1-n_t) + \lambda_t [F_{kt} k_t + F_{nt} n_t - c_t - k_{t+1} + (1-\delta) k_t]\}$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{u(c_t, 1-n_t) + \mu_t [w_t n_t - c_t]\}$$

$$+ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \mu_t \{[r_t + (1-\delta)] k_t - k_{t+1}\} + \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \mu_t \{[b_t - Q_t b_{t+1}\}$$

  - Abrindo a segunda soma do lado direito:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \mu_t \{[r_t + (1-\delta)] k_t - k_{t+1}\} = \mu_0 \{[r_0 + (1-\delta)] k_0 - \mu_0 k_1$$

$$+ \beta \mu_1 [r_1 + (1-\delta)] k_1 - \beta \mu_1 k_2 + \ldots +$$

$$+ \beta^t \mu_t \{[r_t + (1-\delta)] k_t - \beta^t \mu_t k_{t+1} +$$

$$+ \beta^{t+1} \mu_{t+1} \{[r_{t+1} + (1-\delta)] k_{t+1}$$

$$- \beta^{t+1} \mu_{t+1} k_{t+2} + \ldots$$

Condição de transversalidade

- Rearranjando a soma do slide anterior

$$\begin{aligned}
&\mu_0[r_0+(1-\delta)]k_0+\\
&+\sum_{t=0}^{\infty}\{\beta^{t+1}\mu_{t+1}[r_{t+1}+(1-\delta)]+\beta^t\mu_t\}k_{t+1}\\
&-\lim_{t\to\infty}\beta^t\mu_t k_{t+1}
\end{aligned}$$

  - Como k_0 é dado, o primeiro termo permanece
  - O segundo termo é nulo por causa da equação de Euler
  - No ótimo, o planejador escolhe a trajetória de modo a tornar o último termo o menor possível. Como o capital não pode ser negativo, segue que:

$$\lim_{t\to\infty}\beta^t u_{ct}k_{t+1}=0$$

- De maneira análoga para a soma referente ao ativo financeiro:

$$\lim_{t\to\infty}\beta^t u_{ct}Q_t b_{t+1}=0$$

Condição NPG

- Obter soma descontada das restrições orçamentárias
  - Restrição orçamentária intertemporal
- Lembre que $Q_t = 1/(1+R_{t+1})$
- Desconto entre tempo zero e tempo t:

$$\frac{1}{1+R_1}\frac{1}{1+R_2}\cdots\frac{1}{1+R_t} = Q_0 Q_1 \ldots Q_{t-1}$$

- Além disso, por não arbitragem:

$$\frac{1}{Q_{t-1}} = 1+R_t = r_t + 1 - \delta, \text{ para } t \geq 1$$

Condição NPG

- Restrição orçamentária em t:

$$c_t + k_{t+1} + Q_t b_{t+1} = w_t n_t + [r_t + 1 - \delta] k_t + b_t$$

  - Para $t \geq 1$:

$$c_t + k_{t+1} + Q_t b_{t+1} = w_t n_t + \frac{1}{Q_{t-1}} k_t + b_t$$

- Traga então cada restrição orçamentária a valor presente para $t = 0$ e some:

$$c_0 + k_1 + Q_0 b_1 = w_0 n_0 + [r_0 + 1 - \delta] k_0 + b_0$$

$$+$$

$$Q_0 \{c_1 + k_2 + Q_1 b_2\} = Q_0 \left\{ w_1 n_1 + \frac{1}{Q_0} k_1 + b_1 \right\}$$

$$+$$

$$Q_0 Q_1 \{c_2 + k_3 + Q_2 b_3\} = Q_0 Q_1 \left\{ w_2 n_2 + \frac{1}{Q_1} k_2 + b_2 \right\}$$

$$+ \ldots$$

Condição NPG

- Cancelando termos associados a k_t e b_t, $t \geq 1$

$$c_0 + Q_0 c_1 + Q_0 Q_1 c_2 + \ldots + \lim_{t\to\infty}\left(\prod_{s=0}^{t-1} Q_s\right) k_{t+1} + \lim_{t\to\infty}\left(\prod_{s=0}^{t} Q_s\right) b_{t+1} =$$

$$[r_0 + 1 - \delta]k_0 + b_0 + w_0 n_0 + Q_0 w_1 n_1 + Q_0 Q_1 w_2 n_2 + \ldots$$

- Condição de transversalidade implica que:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\prod_{s=0}^{t-1} Q_s\right) k_{t+1} = 0$$

- Condição NPG:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\prod_{s=0}^{t} Q_s\right) b_{t+1} \geq 0$$

- Ou:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\prod_{s=1}^{t+1}(1+R_s)} b_{t+1} \geq 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\prod_{s=1}^{t}(1+R_s)} b_t \geq 0$$

Restrição orçamentária intertemporal

- No ótimo, limite é igual a zero. Segue então a restrição orçamentária intertemporal:

$$c_0 + Q_0 c_1 + Q_0 Q_1 c_2 + \ldots =$$

$$[r_0 + (1-\delta)] k_0 + b_0 + w_0 n_0 + Q_0 w_1 n_1 + Q_0 Q_1 w_2 n_2 + \ldots$$

- Ou:

$$c_0 + \sum_{t=1}^{\infty} \left(\prod_{s=0}^{t-1} Q_s \right) c_t = [r_0 + (1-\delta)] k_0 + b_0 + w_0 n_0 + \sum_{t=1}^{\infty} \left(\prod_{s=0}^{t-1} Q_s \right) w_t n_t$$

$$c_0 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{c_t}{\prod_{s=1}^{t} (1 + R_s)} = [r_0 + (1-\delta)] k_0 + b_0 + w_0 n_0 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w_t n_t}{\prod_{s=1}^{t} (1 + R_s)}$$

Firmas

- Operam função de produção $F(k, n)$
  - Contratam capital e trabalho, e os usam para gerar produto
  - Retornos constantes de escala – resolver como se tivéssemos uma única firma
  - Competição perfeita: firma toma salário e aluguel do capital como dados
- Problema estático

$$\max_{k_t^d, n_t^d} \left\{ F(k_t^d, n_t^d) - w_t n_t^d - r_t k_t^d \right\}$$

$$w_t, r_t \text{ dados}$$

- Condições de primeira ordem:

$$F_n(k_t^d, n_t^d) = w_t$$

$$F_k(k_t^d, n_t^d) = r_t$$

Equilíbrio competitivo

Um **equilíbrio competitivo** é:

- Uma sequência de alocações $\{c_t, n_t, k_{t+1}, b_{t+1}; k_t^d, n_t^d\}_{t=0}^{\infty}$
- Uma sequência de preços $\{w_t, r_t, Q_t\}_{t=0}^{\infty}$

Tais que:

1. Dados $k_0,\ b_0 = 0$ e $\{w_t, r_t, Q_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{c_t, n_t, k_{t+1}, b_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ resolve o problema da família representativa
2. Dados $\{w_t, r_t, Q_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{k_t^d, n_t^d\}_{t=0}^{\infty}$ resolve o problema da firma
3. Mercados em equilíbrio (market clearing) – para todo $t \geq 0$

$$k_t = k_t^d$$

$$n_t = n_t^d$$

$$b_t = 0$$

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t = F(k_t, n_t)$$

Formulação Recursiva

- Problema da família representativa:
  - Variáveis de estado individuais: estoque de capital individual (k), estoque individual do ativo financeiro
  - Variável de estado agregada: estoque de capital agregado (K)
- Preços dependem apenas do estado agregado
  - Problema competitivo
  - Funções preço: $r(K)$, $w(K)$, $Q(K)$
- Observação: para economizar notação, não especificar estado agregado para ativo financeiro ($B = B' = 0$)

Função Valor

- Função valor da família representativa

$$V(k,b,K) = \max_{c,n,k',b'} \{u(c,1-n) + \beta V(k',b',K')\}$$

s.t.

$$c + k' - (1-\delta)k + Q(K)b' \leq w(K)n + r(K)k + b$$

$$K' = H(K)$$

- Lei de movimento agregada: $K' = H(K)$
  - Percepção do agente sobre a evolução do capital agregado no tempo
  - Previsão sobre a evolução dos preços no futuro, que condicionam o problema de maximização nos próximos períodos (resumidos em $V(k',b',K')$)
- Regras de decisão:

$$c(k,b,K), n(k,b,K), k'(k,b,K), b'(k,b,K)$$

Firma

- Problema da firma:

$$\max_{k^d, n^d} \left\{ F(k^d, n) - w(K)n^d - r(K)k^d \right\}$$

- Regras de decisão:

$$k^d(K), n^d(K)$$

Equilíbrio Competitivo Recursivo

Um **equilíbrio competitivo recursivo** é:

1. Uma função valor $V(k, b, K)$
2. Regras de decisão para família representativa: $c(k, b, K), n(k, b, K), k'(k, b, K), b'(k, b, K)$
3. Regras de decisão para firma: $k^d(K), n^d(K)$
4. Funções preço: $w(K), r(K), Q(K)$
5. Lei de movimento para o capital agregado: $K' = H(K)$

Equilíbrio Competitivo Recursivo

Tais que:

- Dados preços (4) e a lei de movimento agregada (5), regras de decisão (2) resolvem o problema da família representativa
- Dados preços (4), regras de decisão (3) resolve o problema da firma
- Mercados em equilíbrio

$$k^d(K) = k = K$$

$$n^d(K) = n(k, b, K)$$

$$b = B = 0$$

$$c(k, b, K) + k'(k, b, K) - (1 - \delta)k = F(k, n(k, b, K))$$

- Percepções são corretas (expectativas racionais):

$$k'(k, b, K) = H(K)$$

$$b'(k, b, K) = 0$$

Famílias

- Função valor

$$V(k,b,K) = \max_{n,k',b'} \{u(c,1-n) + \beta V(k',b',K')\}$$

$$c = w(K)n + r(K)k + b - k' + (1-\delta)k - Q(K)b'$$

$$K' = H(K)$$

- Condições de primeira ordem:

$$\begin{aligned} n &: u_c w(K) - u_l = 0 \\ k' &: -u_c + \beta V_1(k',b',K') = 0 \\ b' &: -u_c Q(K) + \beta V_2(k',b',K') = 0 \end{aligned}$$

Famílias

- Envelope:

$$V_1(k,b,K) = u_c[r(K) + (1-\delta)]$$
$$V_2(k,b,K) = u_c$$

- Adiantando 1 período:

$$V_1(k',b',K') = u_{c'}[r(K') + (1-\delta)]$$
$$V_2(k',b',K') = u_{c'}$$

- Logo:

$$u_l = w(K)u_c$$
$$u_c = \beta u_{c'}[r(K') + (1-\delta)]$$
$$u_c Q(K) = \beta u_{c'}$$

Firma

- Problema da firma:

$$\max_{k^d, n^d} \left\{ F(k^d, n) - w(K)n^d - r(K)k^d \right\}$$

- Condições de primeira ordem:

$$w(K) = F_n(k^d, n^d)$$

$$r(K) = F_k(k^d, n^d)$$

Equilíbrio

- Portanto:

$$u_l(c, 1-n) = F_n(k, n).u_c(c, 1-n)$$

$$u_c(c, 1-n) = \beta u_c(c', 1-n').[F_k(k', n') + (1-\delta)]$$

$$c + k' - (1-\delta)k = F(k, n)$$