Oscilador Harmônico Amortecido

terceira aula

Oscar Éboli 26 de agosto de 2020

Motivação da primeira parte desta aula:

https://www.youtube.com/watch?v=99ZE2RGwqSM

Onde paramos:

- Procuremos duas soluções linearmente independentes para a equação homogênea

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0$$

- Tentemos $x(t) = e^{pt}$ onde p é uma constante. Substituindo temos que $a\ p^2 + b\ p + c = 0$

- <u>Primeiro caso</u>: o discriminante é positivo $b^2 - 4ac > 0$ há duas raízes distintas p_1 e p_2

$$x(t) = c_1\ e^{p_1 t} + c_2\ e^{p_2 t}$$

- <u>Segundo caso</u>: discriminante nulo $b^2 - 4ac = 0$ há uma única raiz $\gamma = -\frac{b}{2a}$

soluções gerais

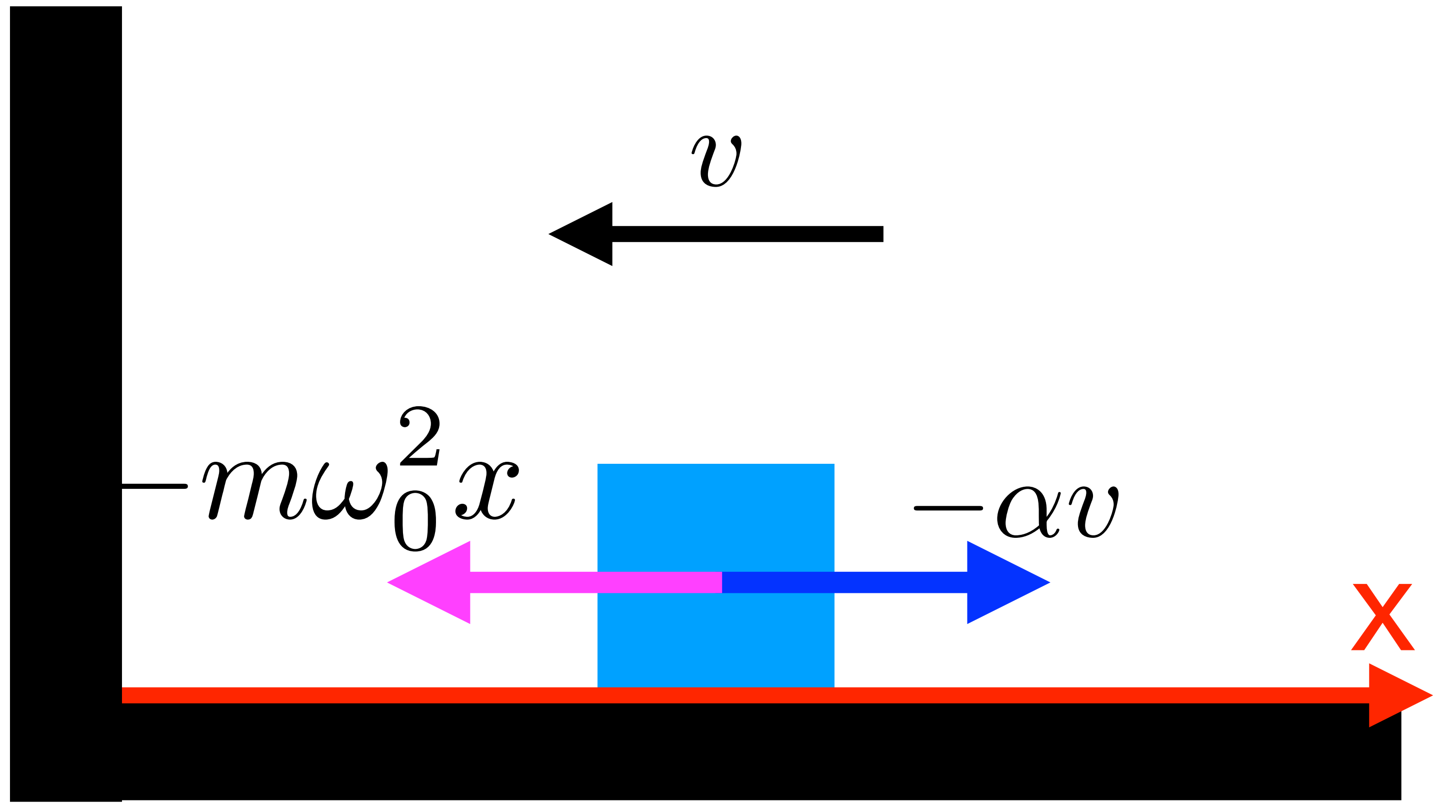
$$x(t) = (c_1 + c_2 t)\ e^{\gamma t}$$

- <u>Terceiro caso</u>: o discriminante é negativo $b^2 - 4ac < 0$ logo $p_{1,2} = -\gamma \pm i\omega$

$$z(t) = e^{-\gamma t}\ (c_1\ e^{-i\omega t} + c_2\ e^{+i\omega t}) \Longrightarrow x(t) = e^{-\gamma t}\ [c_1' \cos(\omega t) + c_2' \sin(\omega t)]$$

1. Oscilador harmônico amortecido

• Consideremos um oscilador com um amortecimento devido a uma força viscosa



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - \alpha\frac{dx}{dt} \Longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

com $\gamma = \dfrac{\alpha}{m}$ $\quad [\gamma] = \dfrac{1}{M}\dfrac{ML}{T^2}\dfrac{T}{L} = \dfrac{1}{T}$

• Esta equação descreve vários sistemas físicos!

• Balanço de energia: $E = \dfrac{m}{2}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \dfrac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$

$$\frac{dE}{dt} = m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + m\omega_0^2 x\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt}\left[m\frac{d^2x}{dt^2} + m\omega_0^2 x\right] = -\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \leq 0$$

movimento será amortecido

- Como sabemos temos três casos:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0 \Longrightarrow p^2+\gamma p+\omega_0^2=0 \Longrightarrow p_{1,2}=-\frac{\gamma}{2}\pm\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2}$$

1. **<u>Amortecimento subcrítico</u>** $\frac{\gamma^2}{4}<\omega_0^2$

cuja solução geral é

$$x(t)=c_1\ e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t)+c_2\ e^{-\frac{\gamma}{2}t}\sin(\omega t)$$

$$\omega\equiv\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}$$

$$=A\ e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t+\varphi)$$

$$z(t)=e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(c'e^{-i\omega t}+c_2'\ e^{+i\omega t}\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \Longrightarrow p^2 + \gamma p + \omega_0^2 = 0 \Longrightarrow p_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

2. **Amortecimento supercrítico** $\frac{\gamma^2}{4} > \omega_0^2$

cuja solução geral é $x(t) = c_1 \ e^{p_1 t} + c_2 \ e^{p_2 t}$

3. **Amortecimento crítico** $\frac{\gamma^2}{4} = \omega_0^2$

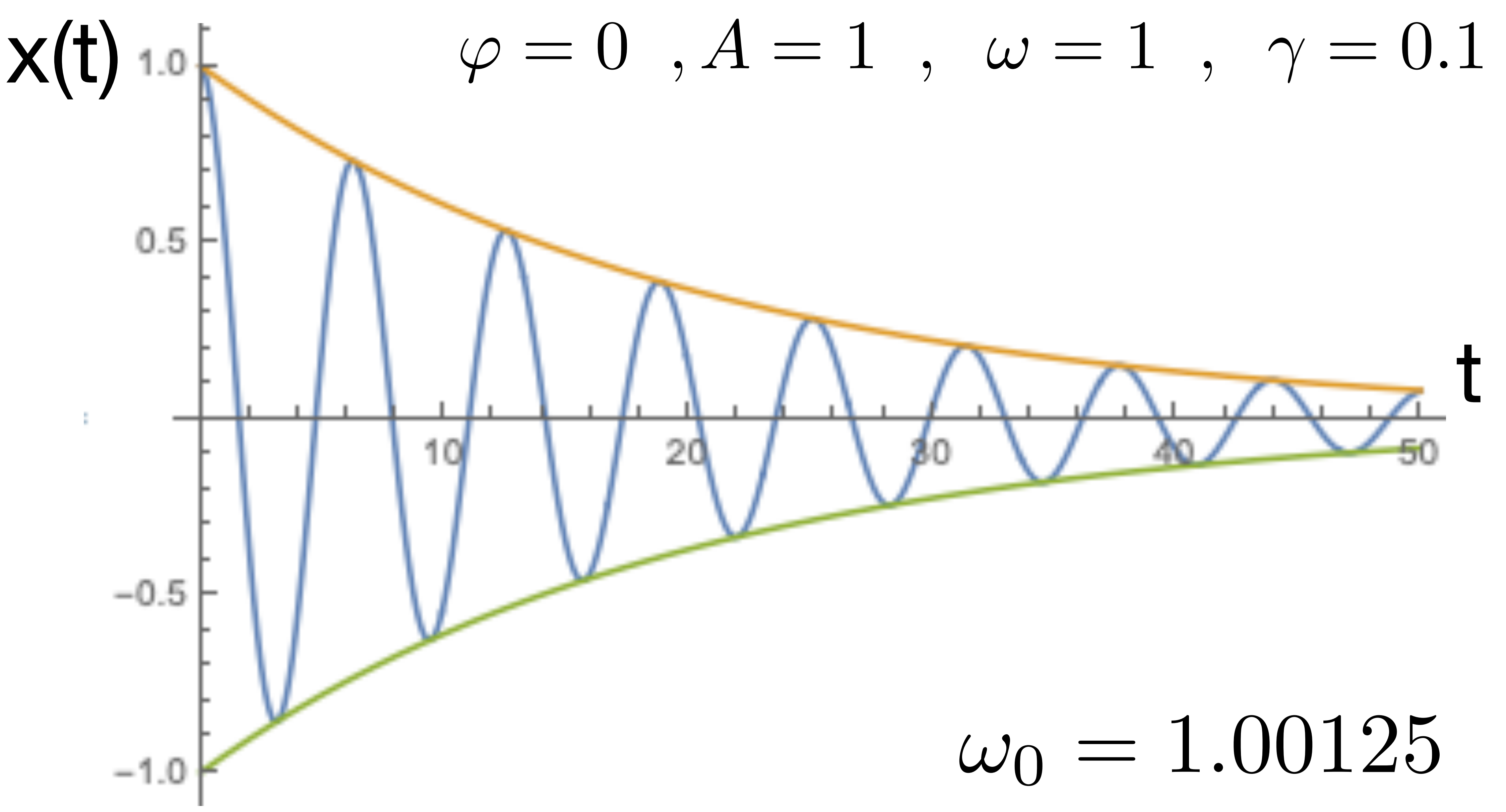
cuja solução geral é $x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(c_1 \ + c_2 \ t)$

Discussão dos resultados:

1. **Amortecimento subcrítico** $\frac{\gamma^2}{4} < \omega_0^2$

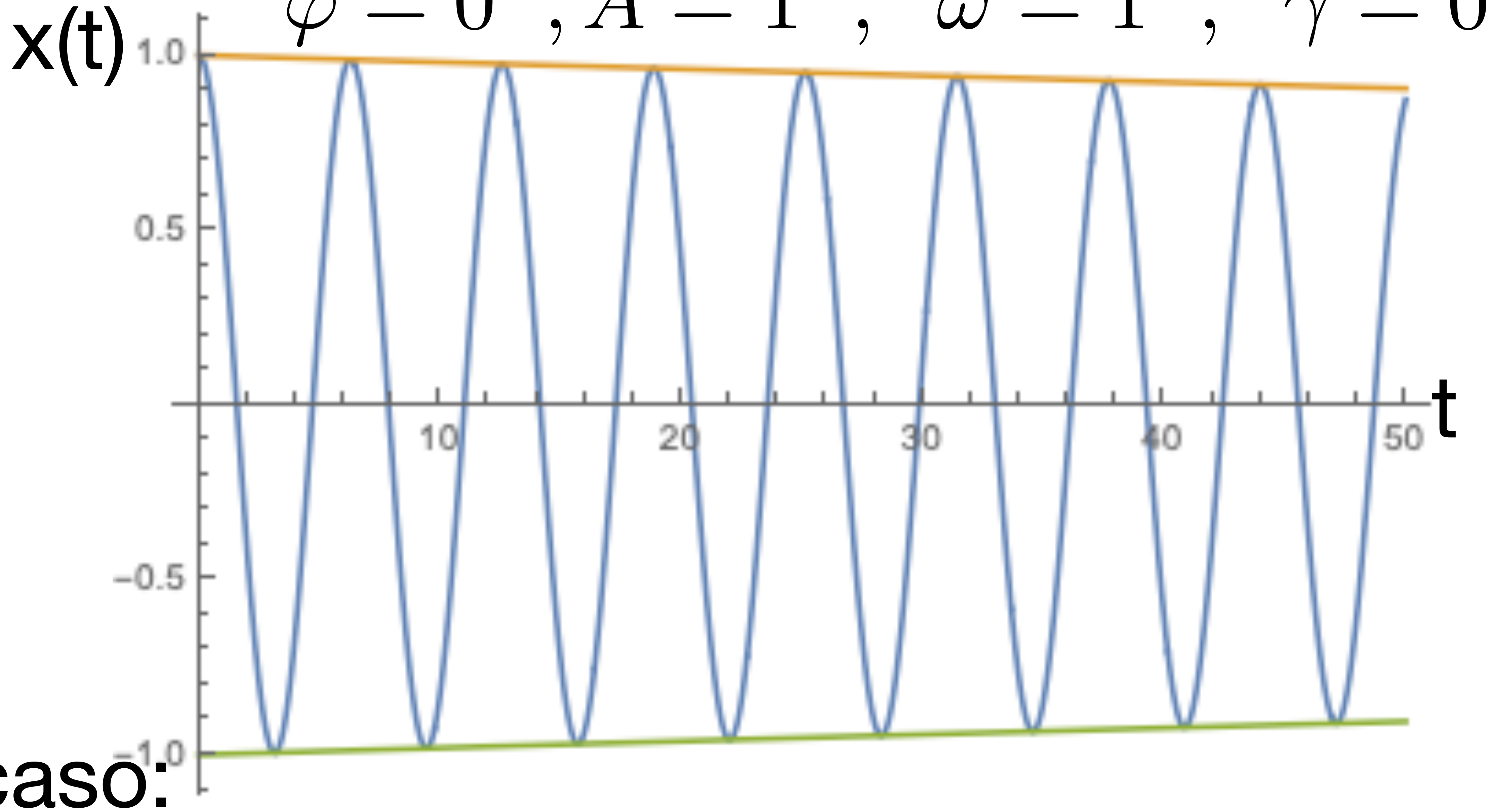
a frequência "de oscilação” é menor $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} < \omega_0$

$$x(t) = A\ e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi)$$



- Para acoplamentos fracos $\frac{\gamma}{2} << \omega_0 \qquad \omega \simeq \omega_0$

$\varphi = 0 \;\; , A = 1 \;\; , \;\; \omega = 1 \;\; , \;\; \gamma = 0.004$



$$x(t) = A\ e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Vejamos o comportamento da energia neste caso:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{\gamma}{2}\ A\ e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi) - \omega\ A\ e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin(\omega t + \varphi) \\ &= -\omega\ A\ e^{-\frac{\gamma}{2}t}\ \left[\sin(\omega t + \varphi) + \frac{\gamma}{2\omega} \cos(\omega t + \varphi)\right] \\ &\simeq -\omega\ A\ e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

$\frac{\gamma}{2} << \omega_0$ $\quad x(t) = A\ e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \varphi)$ $\quad \frac{dx}{dt} \simeq -\omega\ A\ e^{-\frac{\gamma}{2}t}\sin(\omega t + \varphi)$

$$
\begin{aligned}
E(t) &= \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \\
&= \frac{1}{2}m\omega^2A^2e^{-\gamma t}\sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}m\omega^2A^2e^{-\gamma t}\cos^2(\omega t + \varphi) \\
&= \frac{1}{2}m\omega^2A^2e^{-\gamma t} = E(0)e^{-\gamma t}
\end{aligned}
$$

logo a energia decai exponencialmente com o tempo!

- Em um “período" a energia perdida é $\Delta E \simeq -\frac{dE}{dt}\,T = \gamma T E(t)$ com $T = \frac{2\pi}{\omega} \simeq \frac{2\pi}{\omega_0}$

Fator de mérito/qualidade (Q) de um oscilador: $Q \equiv 2\pi\ \frac{E}{\Delta E} = \frac{2\pi}{\gamma T} = \frac{\omega_0}{\gamma}$ adimensional

Fator de mérito/qualidade (Q) de um oscilador: $Q \equiv 2\pi \dfrac{E}{\Delta E} = \dfrac{2\pi}{\gamma T} = \dfrac{\omega_0}{\gamma}$

- Exemplo: diapasão de 440 Hz

assumindo que a intensidade do som diminui por um fator 5 em 4 segundos:

$$E(4) = e^{-\gamma 4} E(0) = \frac{1}{5} E(0) \Longrightarrow \gamma = \frac{1}{4} \ln(5) = 0.4$$

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi 440 = 2764. \qquad Q = \frac{2764}{0.4} = 6911$$

- Exemplo: relógios atômicos possuem $Q \simeq 10^{11}$

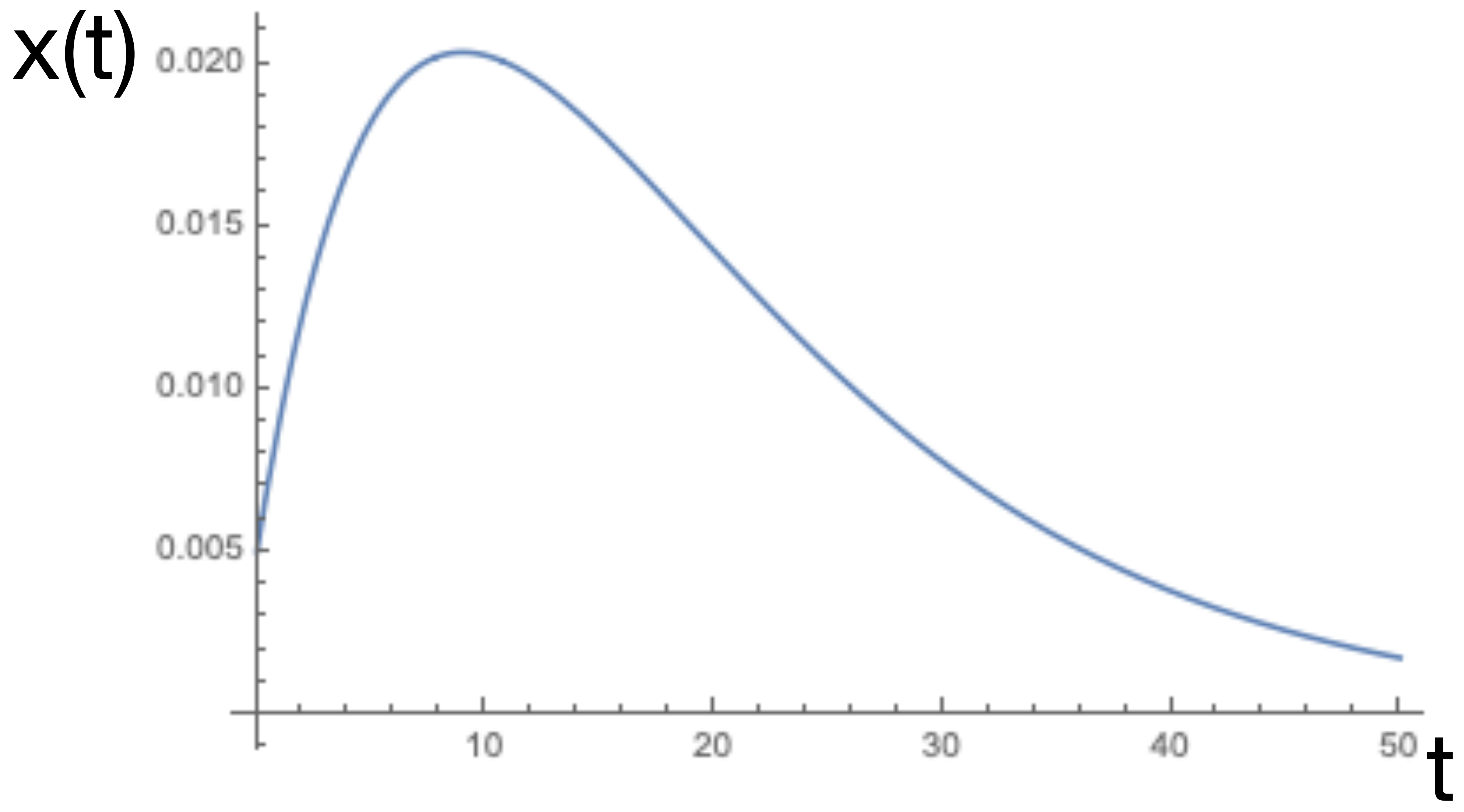
2. **Amortecimento supercrítico** $\frac{\gamma^2}{4} > \omega_0^2$

$$p^2 + \gamma p + \omega_0^2 = 0 \Longrightarrow p_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \equiv -\frac{\gamma}{2} \pm \beta$$

Note que $\beta < \frac{\gamma}{2} \Longrightarrow p_{1,2} < 0$

cuja solução geral é $x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(c_1 e^{-\beta t} + c_2\, e^{\beta t}\right)$

controla o decaimento para tempos grandes



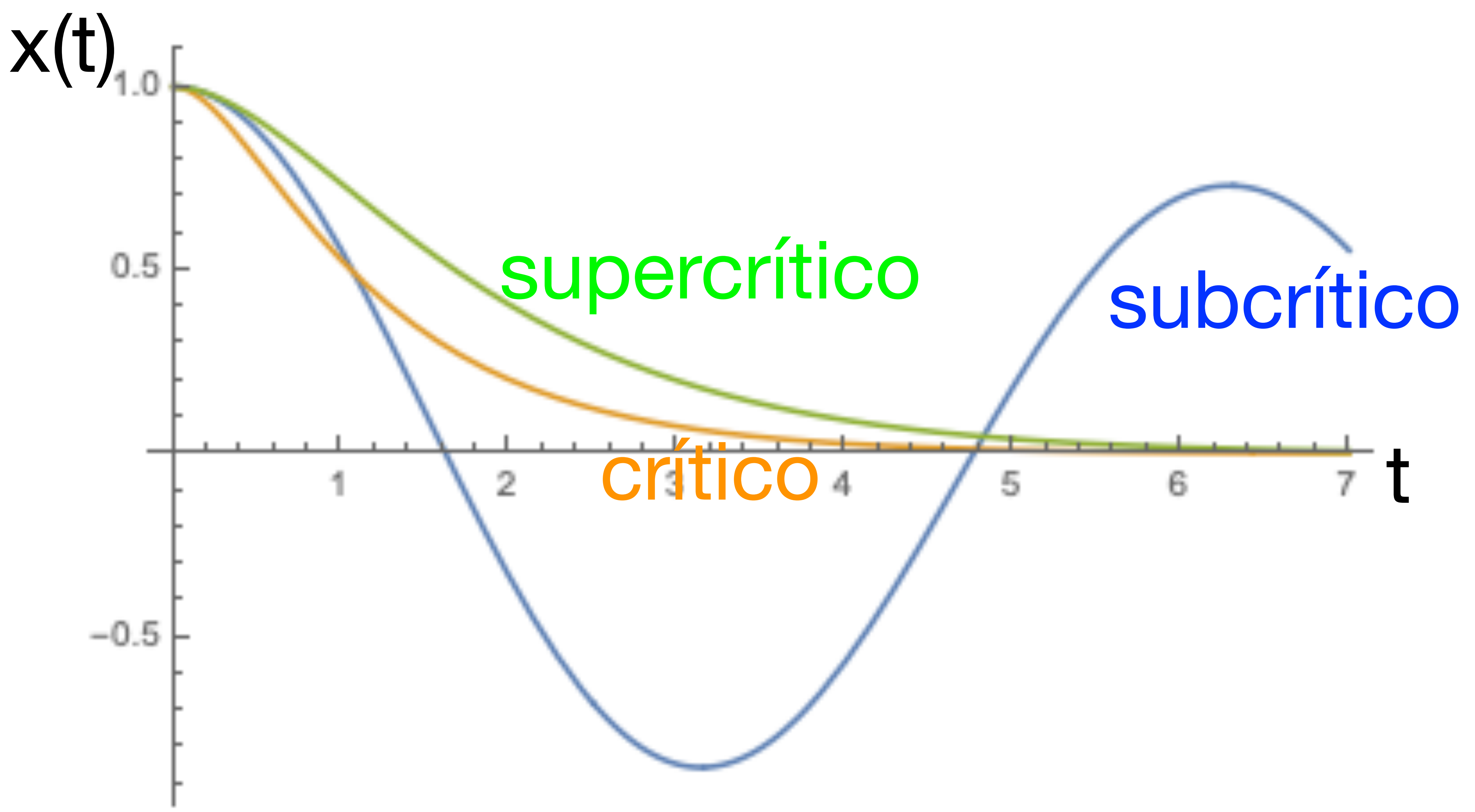
O movimento não é periódico!

3. **Amortecimento crítico** $\dfrac{\gamma^2}{4} = \omega_0^2$

cuja solução geral é $x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(c_1 + c_2\, t)$

O movimento não é periódico!

- o sistema retorna mais rapidamente ao equilíbrio com amortecimento crítico

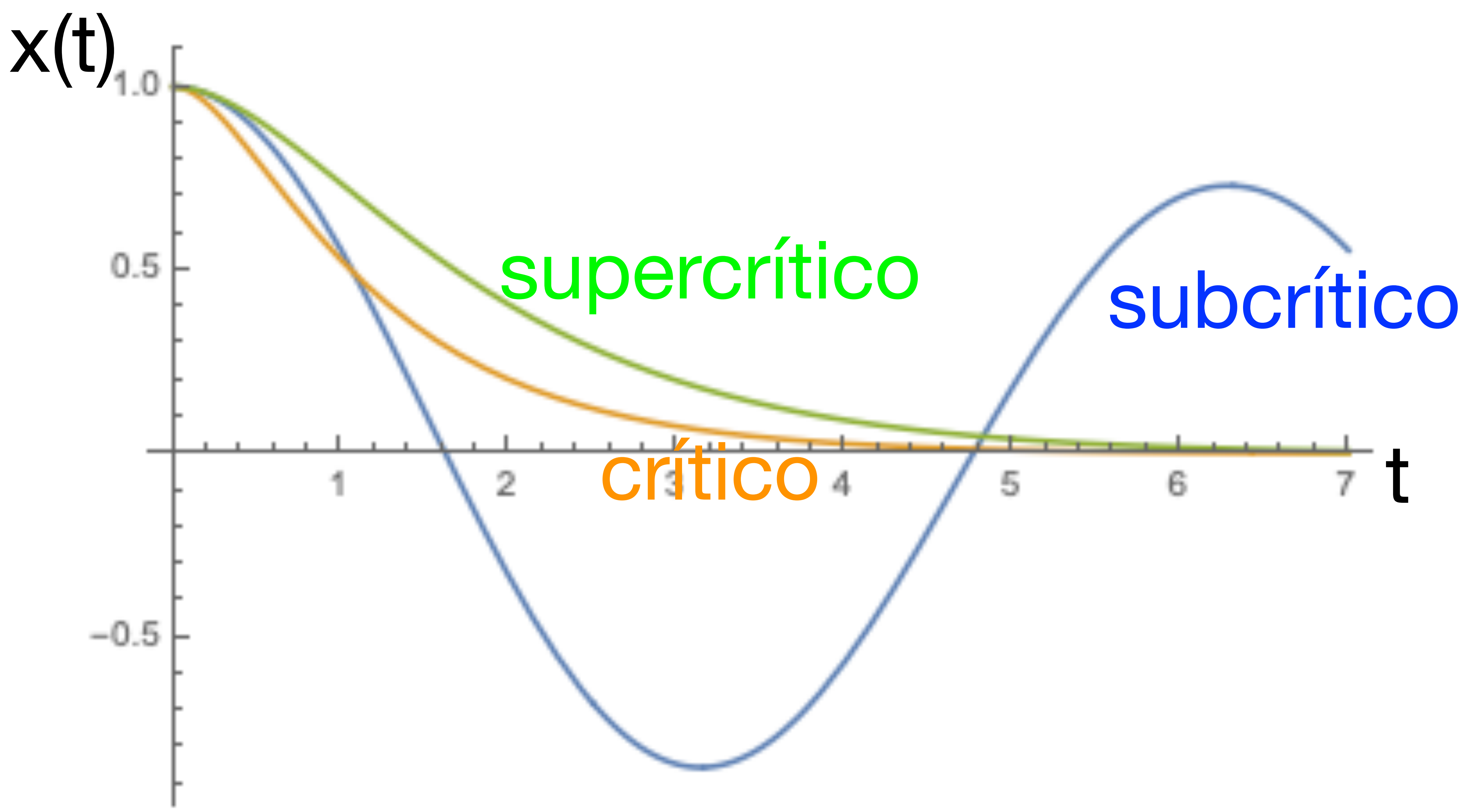


3. **Amortecimento crítico** $\frac{\gamma^2}{4} = \omega_0^2$

cuja solução geral é $x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(c_1 + c_2\, t)$

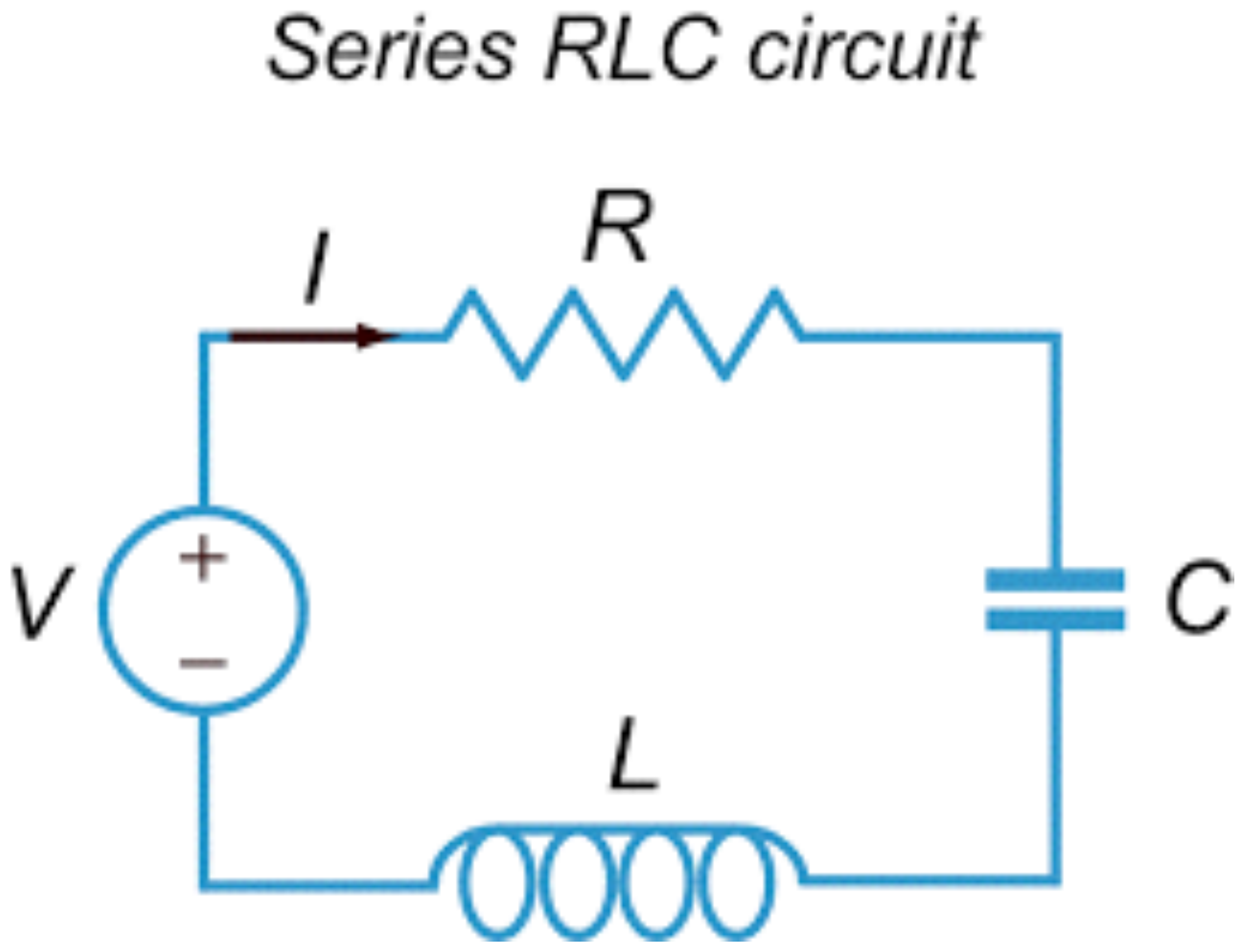
O movimento não é periódico!

- o sistema retorna mais rapidamente ao equilíbrio com amortecimento crítico



Para praticar: dados x(0) e v(0) encontre o valor das constantes c1 e c2 nos 3 casos!

Circuitos elétricos exibem comportamento semelhante



A carga num capacitor de um circuito RLC obedece

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

ou em termos da corrente

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

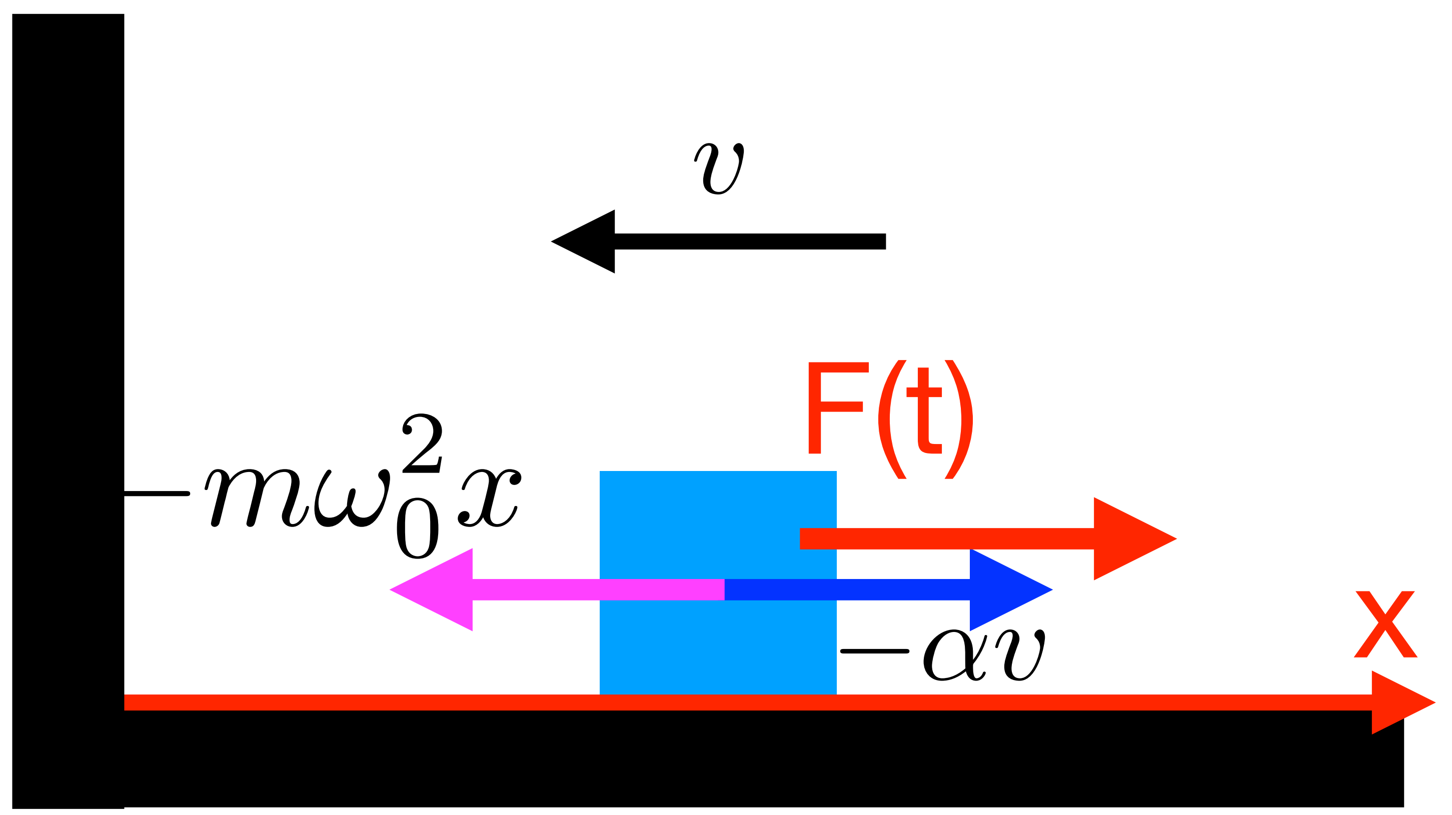
logo, $$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \;\; , \;\; \gamma = \frac{R}{L}$$

Motivação para a segunda parte desta aula:

https://www.youtube.com/watch?v=aZNnwQ8HJHU&t=3s

2. Equações diferenciais não homogêneas

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - \alpha\frac{dx}{dt} + F(t) \Longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$



<u>Fato sobre a EDO</u> $$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = F(t)$$

a solução geral é uma solução particular somada a solução mais geral da homogênea

$$x_p(t) \quad \text{tal que} \quad a\frac{d^2x_p}{dt^2} + b\frac{dx_p}{dt} + cx_p = F(t)$$

$$x(t) = y(t) + x_p(t) \Longrightarrow a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = 0$$ já conheço a solução geral!

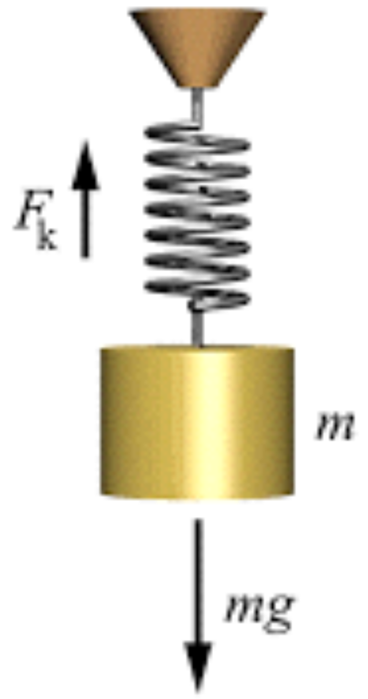
Logo a solução de $$a\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+cx=F(t)$$

é $$x(t)=x_p(t)+c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$$

Como obter a solução particular?

- Tratemos dois casos “particulares"

1. F(t) é constante: $$m\frac{d^2x}{dt^2}=-m\omega_0^2x-\alpha\frac{dx}{dt}+mg\Longrightarrow\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=g$$



$$x_p=\text{constante é solução}\qquad \omega^2x_p=g\Longrightarrow x_p=\frac{g}{\omega_0^2}$$

isso poderia ser feito definindo $x'=x-\dfrac{g}{\omega_0^2}$

2. Força externa $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$

A equação de movimento é $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \gamma \dfrac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \dfrac{F_0}{m} \cos(\omega t)$

note que $F_0 \cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left[F_0 e^{i\omega t}\right]$ logo é útil escrever

$$x(t) = \mathrm{Re}\left[z(t)\right] \Longrightarrow \frac{d^2}{dt^2}\mathrm{Re}\left[z(t)\right] + \gamma \frac{d}{dt}\mathrm{Re}\left[z(t)\right] + \omega_0^2 \mathrm{Re}\left[z(t)\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{F_0}{m} e^{i\omega t}\right]$$

como a parte real comuta com a derivada, podemos procurar z(t) que satisfaz

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

- Solução particular de $$\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma\frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}$$

- Já que a derivada de uma exponencial é proporcional a ela: $z(t) = z_0 e^{i\omega t}$

- implicando que $$(i\omega)^2 z_0 e^{i\omega t} + \gamma i\omega z_0 e^{i\omega t} + \omega_0^2 z_0 e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}$$

$$(-\omega^2 + \omega_0^2 + i\gamma\omega)z_0 = \frac{F_0}{m}$$

$$z_0 = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$

Escrevendo $$z_0 = Ae^{i\varphi} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$

temos $$A^2 = \frac{F_0^2}{m^2((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)}$$

além disso $$Ae^{i\varphi} = \frac{F_0}{m((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)}\,(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega) \Longrightarrow \tan\varphi = -\frac{\gamma\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}$$

logo $$x_p = \mathrm{Re}[z(t)] = A(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

análise da física será feita na próxima aula!

Referências:

1. Moysés Nussenzveig, Curso de Física Básica, vol. 2 seções 4.1 e 4.3
2. Kleppner e Kolenkow, introduction to Mechanics, seções 10.2 e 10.3
3. Kittel, Knight e Ruderman, Mechanics, capítulo 7
4. Feynman, Leyton e Sands, Lectures on Physics, vol. 1, capítulo 21
5. Para equações diferenciais, veja W. Kaplan, Cálculo Avançado, seções 8-9 a 8-11